بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات　　　　الاختبار الفصلي الثاني　　　　الفصل الثاني: ١٤٣٠-١٤٣١

كلية العلوم　　　　(٣٨٤ ريض)　　　　الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول:

(i) أفرض أن $f_n \in R(a,b)\ \forall n \in \mathbb{N}$. إذا كان $f_n \xrightarrow{u} f$ على (a,b)، أثبت أن $f \in R(a,b)$ و أن $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) خذ $f_n(x) = \begin{cases} 1/x & x \le n \\ 0 & x > \frac{1}{n} \end{cases}$. أثبت أن (f_n) تتقارب بانتظام على $(1,\infty)$ من دالة f حيث $\int_1^\infty f_n(x)\,dx$ موجود لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكن $\int_1^\infty f(x)\,dx$ غير موجود. هل يناقض هذا ما ورد في (i) ؟

السؤال الثاني:

(i) أثبت شرط فايرشتراس لتقارب المتسلسلة و استخدمه لإثبات تقارب $\sum_n \frac{1}{1+n^2x}$ المنتظم على $[a,\infty)$ لكل $a>0$. هل تتقارب المتسلسلة بانتظام على $(0,\infty)$؟

(ii) احسب نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_n \frac{n!}{n^n}x^n$، ثم أثبت أن

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{n!x^n}{n^n}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n(n+1)}$$

السؤال الثالث:

عرف قياس لبيق الخارجي ثم أثبت أن

(i) $m^*([a,b)) = b-a$

(ii) $m^*(A)=0$ لكل A قابلة للعد.