بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات	الاختبار الفصلي الثاني	الفصل الثاني: ١٤٢٩-١٤٣٠
كلية العلوم	(٣٨٤ ريض)	الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول:

(i) أفرض أن $f_n \xrightarrow{u} f$ على D. إذا كان كل f_n متصلة عند $c \in D$، فأثبت أن f متصلة عند c.

(ii) إذا كان $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$، فأثبت أن (f_n) لا تتقارب بانتظام على أي فترة تحتوي 1.

(iii) لتكن φ قابلة للاشتقاق على $[0,2]$ و افرض أن $f_n(x) = \varphi(x)|x-1|^n$. إذا كان (f_n) متقاربة بانتظام على $[0,2]$ من f، فاحسب $\varphi(0)$، $\varphi(2)$ و استنتج وجود $c \in [0,2]$ بحيث $\varphi'(c) = 0$.

السؤال الثاني:

(i) أثبت شرط فايشتراس لتقارب $\sum_n f_n$ بانتظام على D.

(ii) أثبت أن $\sum_k \frac{x}{k(x+k)}$ تتقارب بانتظام على $[0,1]$ واستنتج أن

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)}\, dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

(iii) لتكن $A = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$. إذاكان $a_n = \begin{cases} 2 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$، فاحسب نصف قطر تقارب $\sum_n a_n x^n$.

السؤال الثالث:

(i) لتكن $\mathcal{D}$ المجموعة المكونة من المجموعات ذات العنصر الواحد. جد حلقة سيجما المولدة بواسطة $\mathcal{D}$.

(ii) أثبت أن جبر سيجما بوريل تولد بواسطة الفترات من الشكل $]a,b)$.

(iii) أثبت أن m^* تتمتع بخاصة دون التجميع القابل للعد.

الإجابة النموذجية

الاختبار الفصلي الثاني - الفصل الثاني

السؤال الأول (i) راجع الكتاب - المقرر (ص ١٠٠)

(ii) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ حيث $f(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \end{cases}$

بما أن كل f_n متصلة بينما f ليست متصلة عند 1 فالتقارب ليس منتظماً.

(iii) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ حيث $f(x) = \begin{cases} 0 & x\in(0,2) \\ \varphi(2) & x=2 \\ \varphi(0) & x=0 \end{cases}$

وبما أن f متصلة بالضرورة فإن $\varphi(2)=\varphi(0)=0$. الشرط اللازم

لصحة حفظ الاتصال

السؤال الثاني (i) راجع الكتاب المقرر (ص ...)

(ii) إذا $f_k(x) = \frac{x}{k(x+k)}$ فإن $|f_n(x)| \le \frac{1}{k^2} \quad \forall x\in[0,1], \forall n$

وعليه من شرط فايرشتراس تتقارب المتسلسلة بانتظام، وعليه لذا

تبديل التكامل والمجموع نحصل

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x\,dx}{k(x+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x\,dx}{k(x+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[x-\ln(x+k)\right]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[1-\left(\ln(k+1)-\ln k\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right).$$

(iii) $$\sup_n a_n^{\frac{1}{n}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{\frac{1}{k^2}} = 1$$

$\therefore \quad R=1$

[illegible]

السؤال الثالث

(i) لتكن $\mathcal{G}$ هي مجموعة المجموعات القابلة للعد

عندئذ $\mathcal{G}$ مغلقة سيجما وتحتوي $\mathcal{D}$. إذن $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}(\mathcal{D})$

كذلك إذا $E=\{a_1,a_2,\ldots\}$ قابلة للعد فإن

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\} \in \mathcal{G}(\mathcal{D})$$

إذن $\mathcal{G}(\mathcal{D}) \supseteq \mathcal{G}$.

(ii) بما أن $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-\frac{1}{n}]$ فإن سيجما المولد بواسطة الفترات $(a,b]$ يحتوي الفترات المفتوحة ... يحتوي $\mathcal{B}$.

كذلك $(a,b] = (a,b)\cup\{b\}$ وبما أن كلاً من $\{b\}, (a,b)\in\mathcal{B}$

فإن $(a,b]\in\mathcal{B}$. إذن $\mathcal{B}$ تحتوي سيجما المولد بالفترات $(a,b]$

(iii) نفس الإثبات السابق