بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات | الاختبار الفصلي الثاني | الفصل الأول: ١٤٣٠-١٤٣١

كلية العلوم | (٣٨٤ ريض) | الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول:

(i) افرض أن $f_n \in R(a,b)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و أن (f_n) تتقارب بانتظام من f على $[a,b]$. أثبت أن $f \in R(a,b)$ و أن $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$. 4

(ii) إذا كان $g_n(x) = \frac{n}{(x-n)^2+n^2}$، أثبت التالي:

(أ) (g_n) تتقارب بانتظام من دالة g على $[0,\infty)$. 2

(ب) التكاملان $\int_0^\infty g_n(x)\,dx$, $\int_0^\infty g(x)\,dx$ موجودان. 1

(ج) $\int_0^\infty g(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(x)\,dx$. هل يناقض هذا ما ورد في (i)؟ 1

السؤال الثاني:

(i) أثبت شرط فايشتراس لتقارب $\sum_n f_n$ بانتظام على D. 3

(ii) أثبت أن $\sum_k \frac{x^2}{x^2+k^2}$ تتقارب بانتظام على $[0,1]$ من دالة قابلة للاشتقاق على $[0,1]$. 3

السؤال الثالث:

(i) لتكن $\mathcal{D}$ المجموعة المكونة من المجموعات ذات العنصر الواحد. جد حلقة سيجما المولدة بواسطة $\mathcal{D}$. 2

(ii) أثبت أن جبر سيجما بوريل تولد بواسطة الفترات من الشكل $(-\infty, b]$.

(iii) إذا كان $m^*(E)=0$، فأثبت أن E قابلة لقياس لبيق.