جامعة الملك سعود

بسم الله الرحمن الرحيم

كلية / إدارة العلوم .... الموضوع: الاختبار الفصلي الثاني — الفصل الأول

٣٨٤ ريض ١٤/١/١٤٣٠

س١ (أ) أثبت شرط فايرشتراس لتقارب المتسلسلة $\sum_n f_n$ المنتظم على D.

(ب) أثبت أن $\sum_n \frac{x^2}{n^2+x^2}$ تتقارب بانتظام على $[0,1]$ إلى دالة قابلة للاشتقاق.

س٢ (أ) إذا كان R هو نصف قطر تقارب $\sum_n a_n x^n$ وكان $0<r<R$، فأثبت أن المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[-r,r]$.

(ب) إذا علمت أن $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ فأثبت باستخدام $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ أن

$$\frac{\pi}{6}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\,3^{k+\frac{1}{2}}}$$

س٣ (أ) لتكن $\mathcal{A}$ المجموعة المكونة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية (القابلة للعد ومتمماتها). أثبت أن $\mathcal{A}$ جبر سيجما.

وإذا كان $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ معرفة بالتالي:

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & E \text{ قابلة للعد}\\ 1 & E \text{ غير قابلة للعد}\end{cases}$$

فأثبت أن μ قياس على $\mathcal{A}$.

(ب) أثبت أن μ^* تتمتع بخاصية دون التجميع القابل للعد.

الفصل الثاني

١٤٣٠ - ١٤٢٩

الاجابة النموذجية

س (١) راجع الكتاب ص ١٠٤

$f_n(x) = \frac{x}{\dots}$

$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$ ... $\sum f_n$ ...

[٠،١] بفضل اختبار فايرشتراس ... $\sum f_n$ ... نستنتج أن ... بفضل فايرشتراس

نستنتج أن $\sum f_n$ متقاربة بانتظام

س (٢) راجع الكتاب ص ١١٨

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

(ب)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (-1)^k x^{2k}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\dots}$$

أي

لكن ...

س (٣) (أ) افرض أن $E \subset X$ ... قابلة للعد فإن $E^c \in \mathcal{A}$ لأن ... قابلة للعد

وإذا E ليست قابلة للعد فإن E^c قابلة للعد ... $\mathcal{A}$.

افرض أن $E_i \in \mathcal{A}$ لكل $i \in \mathbb{N}$ ... $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. إذا كانت كل

E_i قابلة للعد فإن E قابلة للعد ... $E \in \mathcal{A}$ ... أو ... E_j غير قابلة

للعد ... فإن $E^c \subseteq E_j^c$ قابلة للعد ... $E \in \mathcal{A}$.

(ب) ... $\mu(A) = 0$ ... افرض أن $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ...

وإذا كانت كل A_i قابلة للعد فإن A قابلة للعد ... $\mu(A) = \mu(A_i) = 0$

أي $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ... A_j ... تكون

غير قابلة للعد لكل ... A_i قابلة للعد ... A^c قابلة للعد

... $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ... $\mathbb{R} = (A_i \cap A_j)^c = A_i^c \cup A_j^c$ مجموعة قابلة للعد

هذا مستحيل. لأن $\mu(A)=1$ و $\mu(A_i)=0$ لكل $i=1,\ldots$ ومنه

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

[illegible]

العلاقات السابقة