جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الامتحان الفصلي الثاني لمقرر (٣٨٤ ريض)
العام الدراسي ١٤٢٨-١٤٢٩هـ
الفصل الأول.

يوم الأربعاء في ٢٤/١٢/١٤٢٨هـ
الزمن: ساعة ونصف

---

**السؤال الأول:** لتعرّف متتالية من الدوال $\{f_n(x)\}$ على الفترة $[0,1]$ على النحو التالي:

$$f_n(x)=\begin{cases}1-nx & ; \quad 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 0 & ; \quad \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$$

أ) ارسم الدوال الثلاثة الأولى $f_1, f_2, f_3$ .

ب) احسب $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ لكل $0\le x\le 1$

ج) هل هذا التقارب منتظم أم تقارب نقطي على الفترة $[0,1]$ ؟!

---

**السؤال الثاني:** أ) قارن بين تقارب المتتاليتين $(f_n(x))=(e^{-nx})$ و $(g_n(x))=xe^{-nx}$ على الفترة $[0,\infty)$ من حيث التقارب المنتظم.

ب) نفرض أن المتتالية $(f_n(x))$ معرّفة على $D\subseteq\mathbb{R}$. برهن أن

$f_n \xrightarrow{u} f$ على $D$ $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$ .

---

**السؤال الثالث:** أ) نفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ على الفترة $[a,b]$ . وإذا كانت $(f_n'(x))$ متتالية متصلة على $[a,b]$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وكانت $f_n' \xrightarrow{u} g$ على $[a,b]$ .

برهن أن $\int_a^x g(t)\,dt=f(x)-f(a)$ لكل $a\le x\le b$ وأن $g(x)=f'(x)$

ب) برهن أن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n+1}$ متقاربة بانتظام على $D=\{x: |x|>a>1\}$

ج) برهن أن $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{\pi} \frac{\sin nx}{nx}\,dx=0$ ، حيث $a>0$ .