بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات	الاختبار الفصلي الأول	الفصل الثاني: ١٤٣٠-١٤٣١
كلية العلوم	(٣٨٤ ريض)	الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول:

(i) أثبت شرط ريمان لقابلية الدالة المحدودة f للتكامل الريماني على $[a,b]$.

(ii) إذا كانت f متناقصة على $[a,b]$، أثبت أن $f \in R(a,b)$.

السؤال الثاني:

(i) لتكن $F' \in R(a,b)$. أثبت أن: $\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

(ii) إذا كان $f', g' \in R(a,b)$، أثبت أن

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'(x)f(x)\,dx .$$

(iii) لتكن f و g متصلتين على $[a,b]$ و $g(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$. عمم نظرية القيمة المتوسطة بإثبات وجود $c \in (a,b)$ تحقق: $\int_a^b f(x)g(x)\,dt = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

(iv) إذا كانت f و g' متصلتين على $[a,b]$ و $g'(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فأثبت وجود $c \in (a,b)$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c f(x)\,dx + f(b)\int_c^b f(x)\,dx$$

ارشاد: ضع $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ واستخدم الأجزاء السابقة.

السؤال الثالث:

ادرس التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) على $D = [0,1]$ **:**

(i) $f_n(x) = \int_0^{x-\frac{1}{n}} g(t)\,dt$ حيث $g \in R(0,1)$.

(ii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}$.

(iii) $f_n(x) = x^n\left(1-x^n\right)$.