بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود
كلية / إدارة العلوم
قسم الرياضيات

الموضوع: الاختبار الفصلي الأول / الفصل الأول

٣٨٤ ريض   ١٤٢٩/١٢/٢٣

س١: لتكن f محدودة على $[a,b]$. أثبت شرط ريمان لقابلية f للتكامل الريماني على $[a,b]$

س٢: افرض أن $f \in R(a,b)$. إذا كان $c > 0$ و $g(x) = f(\frac{x}{c})$ لكل $x \in [ac, bc]$، فأثبت أن $g \in R(ac, bc)$ وأن

$$\int_{ac}^{bc} g = c \int_a^b f$$

س٣: احسب النهاية: $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$

س٤: ناقش تقارب المتتالية (f_n) المنتظم فيما يلي:

(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} x\sqrt{n} & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

س٥: لكل $n \in \mathbb{N}$، افرض أن f_n دالة محدودة على D. إذا كانت المتتالية (f_n) متقاربة بانتظام على D، فأثبت وجود K بحيث

$$|f_n(x)| \le K, \quad \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}.$$

59

[illegible] ٣٨٤ ريض [illegible] [illegible]

س ٣ : [illegible] $Q = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ [illegible]

س ٤ : [illegible]

[illegible] $U(g, Q) = \sum_{0}^{n-1}$ [illegible]

$U(g, Q) = c\,U(f, Q)$ [illegible]

[illegible]

$U(g) = c\,U(f)$

ج ٤ : [illegible] P [illegible] $\omega = \left(\frac{1}{n}, \ldots\right)$ [illegible]

$S(f, P, \omega) = \sum$ [illegible] $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ [illegible]

$= \sum_{1}^{n} \frac{k}{1+(k/n)^2}$ [illegible]

$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P, \omega) = \int_0^1 f$ [illegible]

$= \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

س ٥ : (i) إذا $x = 0$ فإن $f_n(x) = 0 \to 0$

وإذا $x \neq 0$ فإن $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \to 0$

إذن $f_n \xrightarrow{p} 0$

$f_n'(x) = \frac{[illegible]}{(1+nx^2)^2} = [illegible]$

[illegible] القيمة العظمى $|f_n|$ [illegible] $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ [illegible]

$\sup_{x} |f_n(x)| = \frac{1}{1+1} = 2 \not\to 0$

إذن التقارب غير منتظم

(ii) إذا $x = 0$ فإن $f_n(x) = 0 \to 0$

إذا $x > 0$ فهنالك N بحيث [illegible] $x > \frac{1}{N}$ [illegible] $f_n(x) = 0$ [illegible]

$f_n(x) = 0$ ... f_n

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]} |f_n(x)| \le \frac{1}{n}\sqrt{n} \longrightarrow 0$$

∴ التقارب منتظم

مثال: لكل ... $|f_n(x)| \le k_n$ لكل $x \in D$

افرض $\varepsilon = 1$ ... $|f_n(x) - f(x)| \le 1$ لكل $x \in D$

... $|f(x) - f_N(x)| \le 1$ لكل $x \in D$

... $|f(x)| \le 1 + |f_N(x)| \le 1 + k_N$ لكل $x \in D$.