جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار النصفي الأول لمقرر (٣٨٤) رياض
الفصل الأول عام ١٤٢٨ - ١٤٢٨ هـ

الأحد في ٨/١١/١٤٢٨هـ
الزمن: ساعة ونصف.

السؤال الأول: أ) لتكن f دالة محدودة على $[a,b]$. برهن أنه إذا كانت P_n متتالية من التجزئيات لـ $[a,b]$ بحيث بأن $\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0$ فإن f قابلة للتكامل على $[a,b]$.

ب) إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بـ $f(x)=x$. باستخدام الفقرة أ)، برهن أن f قابلة للتكامل على $[a,b]$ ثم احسب $\int_a^b f(x)dx$.

السؤال الثاني: أ) لتكن الدالة

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q},\ (p,q)=1\end{cases}$$

حيث $0\le x\le 1$.

برهن أنه φ قابلة للتكامل على الفترة $[0,1]$ ثم احسب قيمة التكامل $\int_0^1\varphi(x)dx$.

ب) برهن أنه بحسب دالتين قابليتهما للتكامل ليس بالضرورة أن تكون دالة قابلة للتكامل (أعط مثالاً على ذلك).

السؤال الثالث: أ) إذا كانت f متزايدة على الفترة $[a,b]$، برهن أن f قابلة للتكامل على $[a,b]$.

ب) إذا كانت f، g دالتين محدودتين على $[a,b]$، برهن صحة المتباينة $V(f+g)\le V(f)+V(g)$.