المدخل إلى التحليل الحقيقي

٣٨٢ ريض

تمـــــــــــــاريــــــن

فـــإن التقاريـــر الثلاثة P، Q، R متكافئة (لماذا؟). وكثيراً ما يتَّبع هذا الأسلوب لإثبات تكافؤ أي عدد من التقارير.

3. المسوِّرات (quantifiers)

يســـتخدم رمـــز الشـــمول $\forall$ بدلاً عن العبارة "لكل"، كما يستخدم رمز الوجـــود $\exists$ بـــدلاً عـــن "يوجد"، وذلك من أجل صياغة الجمل الرياضية بشكل مختصـــر، ولكـــي نتجنب بعض الإشكالات اللغوية التي أشرنا إليها في مطلع هذا البند. فبوسعنا الآن أن نعيد كتابة الجملة (1.1) بالشكل

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \forall\, x \geq 0$$

أو بالشكل

$$\forall\, x \geq 0,\ f(x) = \sqrt{x}.$$

كما نستطيع كتابة الجملة

يوجد عدد موجب x بحيث $x^2 = 2$

بالشكل

$$\exists\, x > 0,\ x^2 = 2.$$

تمارين 1.1

1. ليكن P هو التقرير "الجو بارد" و Q التقرير "السماء ممطرة". عبِّر عن التقارير التالية باستخدام رموز المنطق:
   (i) إذا كان الجو بارداً فإن السماء ممطرة.
   (ii) الجو ليس بارداً ولا السماء ممطرة.

(iii) الجو بارد أو السماء ممطرة.

(iv) لا يكون الجو بارداً إلا إذا كانت السماء ممطرة.

(v) لا يكون الجو بارداً إلا إذا كانت السماء ممطرة ولا تكون السماء ممطرة إلا إذا كان الجو بارداً.

2. ضع جدول الصواب للتقارير التالية :

(i) $P \to (Q \vee R)$

(ii) $(\sim P \vee Q) \to \sim R$

(iii) $(P \vee Q) \leftrightarrow \sim P$

(iv) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim R \wedge S)$

3. أثبت أن كل تقريرين مما يلي متكافئان

(i) P ، $\sim(\sim P)$

(ii) $\sim(P \vee Q)$ ، $(\sim P) \wedge (\sim Q)$

(iii) $P \to Q$ ، $(P \wedge \sim Q) \to \sim P$

(iv) $P \leftrightarrow Q$ ، $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

4. يسمى التقرير المركب P **تناقضاً** (contradiction)، أو يقال إن P **خاطئ منطقياً**، إذا كان P تقريراً خاطئاً في كل الأحوال. لأي تقرير بسيط Q، أثبت أن التقرير المركب $Q \wedge (\sim Q)$ تناقض.

5. يسمى التقرير المركب P **مصدوقة** (tautology)، أو يقال إن P **صائب منطقياً**، إذا كان P تقريراً صائباً في جميع الأحوال. أثبت أنه لكل تقرير بسيط Q يكون التقرير المركب $Q \vee (\sim Q)$ مصدوقة.

6. أثبت أن كلاً من التقارير التالية تكافئ $P \to Q$

(i) $\sim Q \to \sim P$

(ii) $P \wedge (\sim Q) \to Q$

(iii) $P \wedge (\sim Q) \to R$ حيث R تقرير خاطئ منطقياً.

1.2 المجموعات

لعــل **المجمـــوعة** (set) أهم مفهوم جادت به رياضيات القرن التاسع عشر، لكـــوها اللبـــنة الـــتي تبنى منها بقية المفاهيم الرياضية. وكغيرها من المفاهيم التي تستخدم في تعريف ما عداها، فهي غير قابلة للتعريف، ولذلك تسمى **مفهوماً أولياً** (primitive concept).

المجموعة، في عموميتها، تدل على أي تجمع من الأشياء، غير أن الذي يهمنا في هـــذا المقـــام هـــو المجموعات المكونة من أعداد. ونحن، إذ نعد أنفسنا لدراسة مجمـــوعات ونظم الأعداد بشيء من التفصيل في الفصل القادم، سنفترض في هذه المـــرحلة حـــيازة القـــارئ على قدر كاف من المعرفة بها لتوضيح بعض المفاهيم الأساسية.

قد تكون المجموعة قيد البحث في دراستنا **مجموعة منتهية** (finite set)، مثل مجمـــوعة الأعداد الفردية من 1 إلى 9 المكونة من خمسة عناصر (elements) والتي تكتب بالشكل

$$\{1,3,5,7,9\} \tag{1.3}$$

أو قـــد تكـــون **غـــير منتهـــية** (infinite) مـــثل مجمـــوعة الأعـــداد الطبيعية (natural numbers)

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\cdots\}. \tag{1.4}$$

إذا كان a عنصراً في المجموعة A فسنعبّر عن ذلك بكتابة

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$
$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

تمارين 1.2

1. متناقضة رسل (Russel's paradox):

نقــول إن مجموعة ما A "شاذة" إذا كانت $A\in A$ وإلا فسنسميها "عادية". لــتكن X هـــي المجموعة المكونة من المجموعات العادية. إذا كانت X عادية فأثبت أنها بالضرورة شاذة، وإذا كانت X شاذة فهي بالضرورة عادية.

2. أثبت أن العمليتين $\cup$، $\cap$ إبداليتان وتجميعيتان، بمعنى أن

$$A\cup B = B\cup A,\ A\cap B = B\cap A$$

لأي مجموعتين A و B. ولأي ثلاث مجموعات A، B، C أثبت أن

$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C.$$

3. أثبت قانوني التوزيع

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C).$$

4. أثبت ما يلي:

(i) $A\backslash B = A\backslash(A\cap B)$

(ii) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B)\cup(A\cap C)$

(iii) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C)$

(iv) $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

$$(A\cup B)\backslash C=(A\backslash C)\cup(B\backslash C) \qquad \text{(v)}$$

5. إذا عرّفنا

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$

فمثّل $A\Delta B$ بشكل مناسب ثم أثبت أن

(i) Δ عملية إبدالية وتجميعية

(ii) $A\Delta\varnothing=A$

(iii) $A\Delta A=\varnothing$

(iv) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

(v) $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$

1.3 الدوال

لنفرض أن A ، B أي مجموعتين غير خاليتين وأن

$$a\in A,\ b\in B.$$

من تعريف تساوي المجموعات نستطيع أن نكتب

$$\{a,b\}=\{b,a\}$$

ممـــا يعني أن ترتيب العنصرين a ، b في المجموعة $\{a,b\}$ ليس له أي دلالة. أما إن رغبنا أن يكون لترتيبهما دلالة فإننا نعرف **الزوج المرتب** (ordered pair) (a,b) بأنه المجموعة $\{a,\{a,b\}\}$ ونلاحظ على الفور أن

$$(a,b)=(c,d)\Rightarrow\{a,\{a,b\}\}=\{c,\{c,d\}\}\Rightarrow a=c,\ b=d$$

ويترتب على ذلك أن المساواة

$$(a,b)=(b,a)$$

لا تتحقق إلا في حالة $a=b$.

(iii) الدالة f/g هي الدالة المعرفة على

$$D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\}$$

بالقاعدة

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

لاحظ أن التعريف (ii) يضم تعريف الدالة kf حيث k عدد حقيقي ثابت، وأننا نستطيع أن نعرف $f-g$ بأنها

$$f - g = f + (-1)g.$$

في ختام هذا الفصل من الضروري أن نذكر أننا سنتعرض في هذا الكتاب لبعض الدوال المألوفة مثل الدوال المثلثية والأسية واللوغاريتمية، وسنستخدم خواصها المعروفة، وإن كان تعريفها المحكم يستلزم الانتظار للجزء الثاني من هذا الكتاب. إن الذي يشفع لنا في هذا المسلك المناقض لمقتضيات الترتيب المنطقي هو يقيننا الكامل بمعرفة القارئ لهذه الخواص من دراسته السابقة لحساب التفاضل والتكامل، وحرصنا على ألا نسلب الأمثلة والتمارين في الفصول الأولى قدراً كبيراً من الحيوية بإهمال هذه الدوال.

تمارين 1.3

1. أثبت ما يلي

(i) $A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$

(ii) $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2)$

2. أثبت النتائج (1.11) و (1.12).

3. أعط مثالاً لدالتين f و g بحيث $f \neq g$ ولكن $f \circ g = g \circ f$.

4. إذا كانت $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ معطاة بالقاعدة

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

فأثبت أن $f^{-1}=f$.

5. بالرجوع إلى تعريف المحصلة، أثبت أن

$$D_{g\circ f}=f^{-1}\left(D_g\right)$$

6. أثبت النتائج (i)، (ii)، (iii) الواردة في بند التحصيل.

7. لتكن $f:A\to B$. أثبت ما يلي:

(i) $f\left(f^{-1}(E)\right)\subset E \quad \forall E\subset B$

ويتحقق التساوي لكل E إذا وفقط إذا كانت f شاملة.

(ii) $f^{-1}(f(C))\supset C \quad \forall C\subset A$

ويتم التساوي لكل C إذا وفقط إذا كانت f متباينة.

(iii) f متباينة إذا وفقط إذا

$$f(C_1\cap C_2)=f(C_1)\cap f(C_2) \quad \forall C_1,C_2\subset A$$

(iv) f شاملة $\Leftrightarrow$ $[f(C)]^c\subset f\left(C^c\right) \quad \forall C\subset A$

8. افرض أن

$$f:A\to B, \ , g:C\to D.$$

أوجد مجال التعريف والمدى لكل من $f\circ g$ ، $g\circ f$.

$$b=0. \qquad (م7)$$

بالإستناد إلى م4 يمكن تعريف عملية الطرح $-$ على $\mathbb{R}$ بالشكل

$$a-b=a+(-b) \quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$$

كما نستخدم م8 لتعريف عملية القسمة

$$a\div b=a\cdot\left(b^{-1}\right) \quad \forall\, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

وسنترك للقارئ التحقق من أن هاتين العمليتين غير إبداليتين.

تمارين 2.1

أثبت التقارير التالية مستخدماً المسلمات م1 إلى م9.

1. لكل $a,b\in\mathbb{R}$ يكون للمعادلة

$$a+x=b$$

حل وحيد هو

$$x=b-a$$

2. لكل $a,b\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ يكون للمعادلة

$$a\cdot x=b$$

حل وحيد هو

$$x=a^{-1}\cdot b$$

3. $\forall\, a\in\mathbb{R},\quad -(-a)=a$
4. إذا كان $a\neq 0$ فإن $a^{-1}\neq 0$ و $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$
5. $\forall\, a\in\mathbb{R},\quad (-1)\cdot a=-a$
6. $\forall\, a,b\in\mathbb{R},\quad (-a)\cdot b=-(a\cdot b)$
7. $\forall\, a,b\in\mathbb{R},\quad (-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

8. $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad (-a)^{-1} = -\left(a^{-1}\right)$
9. إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن $a \cdot b \neq 0$، كما أن
$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

2.2 مسلمات الترتيب

نفتـــرض وجـــود مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، نرمز لها بـــ P، تحقق الفرضيات التالية:

(م10) لكل $a \in \mathbb{R}$ تتحقق واحدة من العلاقات التالية:

$a \in P$ أو $a = 0$ أو $-a \in P$

(م11) $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P, a \cdot b \in P$

تســـمى P **مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة** (positive real numbers)، ونعرف العلاقة $>$ (أكبر من) على $\mathbb{R}$ بالشكل التالي:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in P$$

ونقول عندئذ إن a **أكبر** من b، كما نقول إن b **أصغر** من a ونكتب $b < a$. نلاحظ على الفور أن

$$P = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$$

وإذا كانت

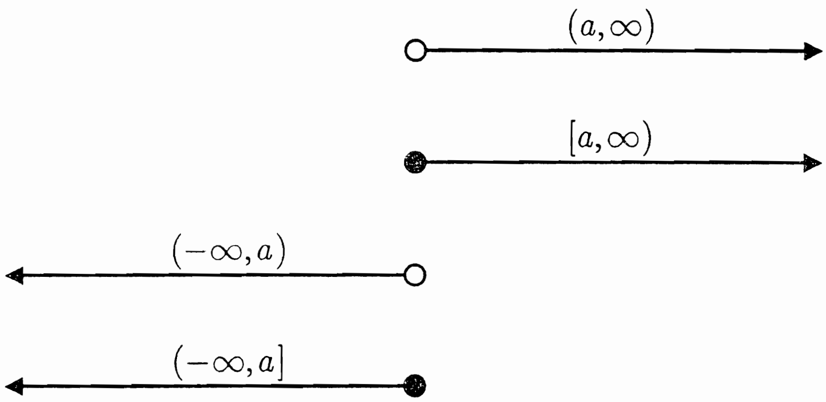
$$P^{-} = \{a \in \mathbb{R} : -a \in P\}$$

فإن

$$P^{-} = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}$$

كما سنستخدم الفترات **غير المحدودة** التالية

$$
\begin{aligned}
(a,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} : x>a\}\\
[a,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} : x\geq a\}\\
(-\infty,a) &= \{x\in\mathbb{R} : x<a\}\\
(-\infty,a] &= \{x\in\mathbb{R} : x\leq a\}\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$



شكل 2.3

تمارين 2.2

1. أثبت التقارير التالية

$$
\begin{aligned}
&a\leq b,\ b\leq a \quad\Rightarrow\quad a=b && \text{(i)}\\
&a\neq 0 \quad\Rightarrow\quad a^2=a\cdot a>0 && \text{(ii)}\\
&1>0 && \text{(iii)}\\
&a>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a}>0 && \text{(iv)}\\
&a>b>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a}<\frac{1}{b} && \text{(v)}
\end{aligned}
$$

(vi) إذا كان $ab > 0$ فإما أن $a > 0$ و $b > 0$، أو أن $a < 0$ و $b < 0$.

(vii) $a \le b, c < d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$

(viii) $0 < a < b, 0 < c < d \;\Rightarrow\; ac < bd$

(ix) $a < b, c < d \;\Rightarrow\; ad + bc < ac + bd$

(x) $0 < a < 1 \;\Rightarrow\; a^2 < a$

$a > 1 \;\Rightarrow\; a^2 > a$

2. إذا كان $a < b + \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$، فأثبت أن $a \le b$.

إذا كان $|x| < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$، فاستنتج أن $x = 0$.

3. أثبت الأجزاء (i)، (ii)، (iii)، (iv)، (vi) من النظرية 2.1.

4. إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ و $b \neq 0$ فأثبت أن

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

5. متى تتحقق المساواة في متباينة المثلث (الفقرة (v) من نظرية 2.1).

6. عين مجموعة الأعداد x التي تحقق المتباينة المعطاة ثم مثلها على خط الأعداد:

(i) $-1 < 3x - 7 \le 4$

(ii) $|8x - 1| < 2$

(iii) $5 \le |4 - 6x|$

(iv) $\dfrac{1}{x} < 1$

(v) $x^2 - 7x + 10 > 0$

(vi) $|x + 4| < |2x - 1|$

(vii) $|x| + |x + 1| < 3$

(viii) $\dfrac{1}{x - 4} < \dfrac{5}{x + 1}$

7. إذا كان

$$|x-x_0|<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right\},\quad |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$$

فأثبت أن

$$|xy-x_0y_0|<\varepsilon$$

8. أثبت أن

$$|x_1y_1|+|x_2y_2|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

وعمم لتحصل على **متباينة شوارتز** (Schwarz Inequality)

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(إرشاد: استخدم $2ab\le a^2+b^2$)

9. إذا كان $x,y\in\mathbb{R}$ فأثبت أن

$$\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$$
$$\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$$

2.3 الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية

من الآثار المترتبة على اختيارنا لتقديم الأعداد الحقيقية عن طريق المسلمات، بدلاً عن بنائها بدءاً بالأعداد الطبيعية ومروراً بالصحيحة والنسبية، ضرورة السعي

وعليه

$$b^2 = 2m^2.$$

إذن b^2 عدد زوجي، فيترتب على ذلك أن b أيضاً زوجي، وهذا يناقض افتراضنا ألا عامل مشترك بين a و b. □

هــذه النظرية تدل على قصور المجموعة $\mathbb{Q}$ عن التعبير عن الفكر الرياضي المــتاح لنا حتى قبل عدة قرون، ولما كانت $\mathbb{Q}$ تحقق المسلمات م1–م11 فلا سبيل للخـــروج مـــن المأزق الذي نبهت إليه النظرية 2.4 سوى إضافة مسلمات جديدة لـــتفادي هذا القصور. سنرى في الواقع أن مسلمة إضافية واحدة تكفي لتجعل $\mathbb{R}$ مجمـــوعة قادرة على تلبية احتياجات جزء كبير من الفكر الرياضي، وبخاصة تلك المتعلقة بحساب التفاضل والتكامل.

تمارين 2.3

1. أثبت ما يلي
   - (i) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة P استقرائية.
   - (ii) المجموعة $\{x \in P : x \neq 5\}$ غير استقرائية.
   - (iii) إذا كانت المجموعة A_λ استقرائية لكل $\lambda \in \Lambda$ فإن $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ استقرائية.
2. أثبت الجزء الثاني من مثال 2.5.
3. أثبت تكافؤ مبدأ الاستقراء الرياضي مع الصياغتين المقدمتين في البند 2.3.
4. أثبت ما يلي بالاستقراء على n:

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{r=1}^{n} \frac{4}{r(r+1)(r+2)} = 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

(iii) إذا كان $u_{r+1} = 2u_r + 1$ فإن $u_n = 2^{n-1}(u_1+1) - 1$

احسب أيضاً $\sum_{r=1}^{n} u_r$ إذا كان $u_1 = 1$.

(iv) $3^{2n} + 7$ تقبل القسمة على 8 لكل $n \in \mathbb{N}$.

(v) $(3n+1)7^n - 1$ تقبل القسمة على 9 لكل $n \in \mathbb{N}$.

5. إذا كان $x > -1$ فأثبت أن

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

6. إذا كان $a > 0$ فأثبت أن

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$

7. افرض أن التقارير $\mathrm{P}(n)$ تحقق

(i) $\mathrm{P}(m)$ صحيح

(ii) إذا كان $\mathrm{P}(n)$ صحيحاً، حيث n أي عدد طبيعي يحقق $n \geq m$، فإن $\mathrm{P}(n+1)$ صحيح.

أثبت أن $\mathrm{P}(n)$ صحيح لكل $n \geq m$.

استخدم هذه الحقيقة لتثبت أن

$$2^n \leq n! \quad \forall n \geq 4$$

8. تحقق أن $\mathbb{N}$ تحقق المسلمات م1، م2، م5، م6، م7، م9.

9. تحقق أن $\mathbb{Z}$ تحقق جميع المسلمات م1–م11 ماعدا م8.

10. تحقق أن $\mathbb{Q}$ تحقق جميع المسلمات م1–م11.

11. أثبت أن كلاً من $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$، $\sqrt[3]{2}$، $\sqrt[3]{3}$ عدد غير نسبي.

12. أثبت أن $\sqrt{p}$ عدد غير نسبي لكل عدد أولي p.

13. أثبت أن

$$0 \leq a \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a^n \leq a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

وأن

$$a \geq 1 \quad \Rightarrow \quad a^n \geq a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

وأنــه يمكن وضع العلاقة $>$ مكان $\leq$ في الاقتضاء الأول والعلاقة $<$ مكان $\geq$ في الاقتضاء الثاني.

2.4 مسلمة التمـــام

قبل تقديمنا للمسلمة الأخيرة نحتاج إلى بعض التعاريف التمهيدية.

تعريف 2.6

(i) نقول إن $b \in \mathbb{R}$ **حد علوي** (upper bound) للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان

$$\forall\, a \in A, \quad a \leq b$$

ونقول عن المجموعة A إنها **محدودة من أعلى** (bounded above) إذا كان لها حد علوي.

(ii) إذا كان $c \in \mathbb{R}$ يحقق

$$\forall\, a \in A, \quad a \geq c$$

حـــيث يمكن أن يرتبط ظهور أحد العددين 0 أو 1 بانفتاح أو إنغلاق دائرة كهربائية.

تمارين 2.4

1. احسب $\sup A$ و $\inf A$ إن وجدا فيما يلي:

(i) $A=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2-9>0\right\}$

(ii) $A=\left\{1-\dfrac{(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

(iii) $A=\mathbb{Q}$.

(iv) $A=\mathbb{N}\cup\{0\}$

2. إذا كـــان b حـــداً علوياً للمجموعة A فأثبت أن $b=\sup A$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $a\in A$ بحيث $a>b-\varepsilon$.

اكتب وأثبت نتيجة مماثلة لـــ $\inf A$.

3. إذا كانت A و B مجموعتين محدودتين من أعلى و $A\subset B$ فأثبت أن

$$\sup A\leq\sup B$$

ماذا نستطيع أن نقول عن $\inf A$ و $\inf B$؟

4. إذا كانـــت A و B محدودتين من أعلى فأثبت أن $A\cup B$ محدودة من أعلى وأن

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$$

ماذا نستطيع أن نقول عن $\inf(A\cup B)$؟

5. إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ ، فإننا نعرف

$$A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$$

أثبت أن

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$$

متى كانت A و B محدودتين من أعلى.

اذكر وأثبت نتيجة مماثلة لـــ $\inf(A+B)$.

6. لتكن $A\subset\mathbb{R}$، $k\in\mathbb{R}$ ولنعرف

$$kA=\{ka: a\in A\}$$

إذا كانت A محدودة من أعلى و $k>0$ فأثبت أن

$$\sup(kA)=k\cdot\sup A$$

ماذا يحدث لو كانت $k\leq 0$؟

7. إذا كانت $x\in\mathbb{Q}$، $y\notin\mathbb{Q}$، فأثبت أن $x+y\notin\mathbb{Q}$. متى يكون $xy\in\mathbb{Q}$؟

8. إذا كانت $x>0$ فأثبت أن لكل $y\in\mathbb{R}$ توجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث

$$nx>y$$

9. افرض أن X و Y مجموعتان غير خاليتين وتحققان

(i) $X\cup Y=\mathbb{R}$

(ii) $x\in X, y\in Y \quad\Rightarrow\quad x<y$

أثبت وجود $c\in\mathbb{R}$ بحيث

$$z<c \quad\Rightarrow\quad z\in X$$

و

$$z>c \quad\Rightarrow\quad z\in Y$$

10. أوجد المفكوك العشري والثنائي والثلاثي لكل من الأعداد

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{11}{15}$ (iii) $\frac{5}{8}$

11. أوجد الأعداد النسبية ذات المفكوكات التالية

(i) المفكوك العشري $0.37212121\cdots$

(ii) المفكوك الثلاثي 0.020121212

12. استخدم المفكوك العشري لتثبت كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

13. إذا كان $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $x_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}$، $i \geq 1$، فأثبت أن

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

مجموعة محدودة من أعلى، وإذا كان x هو حدها الأعلى الأصغر فإن مفكوك x هو

$$x = x_0.x_1x_2\cdots$$

2.5 المجموعات القابلة للعد

لو تأملنا المجموعات

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{a,b,c\}$$
$$C = \{-1,0,1\}$$

فإننا سندرك على الفور أن عدد عناصر B مساو لعدد عناصر C وأنه أقل من عدد عناصر A. ليس الأمر بمثل هذا الوضوح إن ابتغينا مقارنة المجموعات غير المنتهية، مثل $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، P. وتبدو حاجتنا جلية إلى فهم رياضي يسمح بمقارنة عدد عناصر مجموعتين غير منتهيتين. لعل من أهم إنجازات **نظرية المجموعات** على يد العالم الرياضي **جورج كانتور** (Georg Cantor) في أواخر القرن التاسع عشر هي

تمارين 2.5

1. في هـــذا التمـــرين نريدك أن تثبت أن المجموعة غير المنتهية تتميز بتكافئها مع إحدى مجموعاتها الجزئية الفعلية.

(i) إذا كانـــت A غـــير منتهية وقابلة للعد، فأثبت وجود $B \subset A$ بحيث $B \neq A$، $B \sim A$.

(ii) إذا كانت A غير منتهية فأثبت وجود $B \subset A$ قابلة للعد.

(iii) إذا كانـــت A غـــير منتهية فاستنتج وجود $C \subset A$ بحيث $C \neq A$، $C \sim A$.

(iv) إذا كانت A منتهية و $B \subset A$ فأثبت أن $B \sim A \Rightarrow B = A$.

2. أثبت أن $(a,b) \sim (0,1)$.

3. أثبت أن $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

إرشاد: هل تذكر من حساب التفاضل دالة تقابل مجالها $(-\pi/2, \pi/2)$ ومداها $\mathbb{R}$؟

4. أثبت أن مربع الوحدة $[0,1] \times [0,1]$ يكافئ $[0,1]$.

إرشاد: استخدم المفكوكات العشرية.

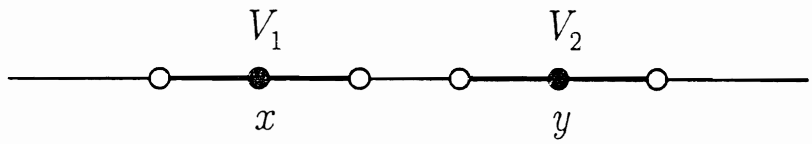
5. أثبت أن مجموعة أصفار كثيرات الحدود ذوات المعاملات النسبية قابلة للعد.

إرشـــاد: أثـــبت أن مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة n ذوات المعاملات النسبية قابلة للعد.

6. إذا كانت هنالك دالة شاملة $f : \mathbb{N} \to A$ فأثبت أن A قابلة للعد.

خاصة $\mathbb{R}$ التي تجعل النهاية وحيدة:

افرض أن $x \neq y$. عندئذ يوجد جوار V_1 للنقطة x وجوار V_2 للنقطة y بحيث $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.



شكل 3.3

لترى هذا خذ $V_1 = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ و $V_2 = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ حيث، $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2}$ مـــثلاً. لمـــا كان $x_n \to x$ فجميع حدود المتتالية من حد ما تقع في V_1، وكذلك جمـــيع حدود المتتالية من حد ما تقع في V_2، إذ أن $x_n \to y$. لكن هذا يناقض أن $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. □

تمارين 3.1

1. اكتب الحد رقم n للمتتاليات الآتية على افتراض استمرار النمط المعطى

(i) $(5, 8, 11, 14, \cdots)$

(ii) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\right)$

(iii) $\left(1, -\frac{1}{4}, 9, -\frac{1}{16}, \cdots\right)$

2. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (x_n) إذا كان

(i) $x_1 = 2, x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$

(ii) $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$

(iii) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$

3. إذا كـــان مقياس القرب هو 0.005 فاختر N بحيث تكون كل قيم x_n لـــ $n \geq N$ قريبة من x في الحالات التالية

(i) $x_n = \dfrac{1}{n}$ ، $x = 0$

(ii) $x_n = \dfrac{1}{2n-1}$ ، $x = 0$

(iii) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ، $x = 0$

(iv) $x_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ ، $x = 3$

4. استخدم تعريف 3.2 لتثبت ما يلي

(i) $\lim \dfrac{n^3+1}{3n^3+n} = \dfrac{1}{3}$

(ii) $\lim \dfrac{1}{n^2+2} = 0$

(iii) $\lim \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n+1}\right) = 1$

(iv) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad \lim \dfrac{k}{n} = 0$

5. أثبت أن المتتالية الثابتة متقاربة.

6. إذا كانت $x_n \to z$ ، $y_n \to z$ فأثبت أن المتتالية $(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots)$ متقاربة ونهايتها z.

7. أثبت أن الفترة المفتوحة (a,b) جوار لكل عنصر من عناصرها.

8. أثبت أن $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ جوار لكل $x \neq c$.

تمارين 3.2

1. قرر ما إذا كانت (x_n) متقاربة أم لا. احسب النهاية متى وجدت.

(i) $x_n = \dfrac{2n^3+3}{n^2+4}$

(ii) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$

(iii) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(iv) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$

(v) $x_n = \begin{cases} 1/n & n \in \mathbb{N}_1 \\ 0 & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$

حيث $\mathbb{N}_1$، $\mathbb{N}_2$ مجموعتا الأعداد الطبيعية الفردية والزوجية بالترتيب.

2. إذا كانت $(x_n + y_n)$ متقاربة و (x_n) متقاربة فأثبت أن (y_n) متقاربة. ما نهايتها؟ هل تستطيع تقديم نتيجة مشابهة تتعلق بالمتتالية $(x_n \cdot y_n)$؟.

3. هات مثالا لمتتاليتين (x_n)، (y_n) بحيث تكون $(x_n + y_n)$ متقاربة دون أن تكون (x_n) و (y_n) متقاربتين.

4. هات مثالا لمتتالية (x_n) غير متقاربة بحيث تكون $(|x_n|)$ متقاربة. متى يكون التقرير $x_n \to x \Rightarrow |x_n| \to |x|$ صحيحاً؟

5. إذا كانت $\lim \dfrac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0$ فأثبت أن (x_n) محدودة ثم استنتج أن $x_n \to 1$.

6. إذا كان $0 < b < 1$ فأثبت أن $nb^n \to 0$ (انظر البرهان المقدم في المثال 3.6).

7. إذا كان $0 < a < b$ فأثبت أن $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

8. لتكن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$. إذا كان $L < 1$ ، فأثبت أن $\lim x_n = 0$ باتباع الخطوات التالية:

(i) خذ $L < r < 1$. باستخدام $\varepsilon = r - L$ أثبت وجود $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < r \quad \forall n \geq N$$

(ii) أثبت أن

$$x_n < x_N \cdot r^{n-N} \quad \forall\, n > N$$

(iii) استنتج أن $x_n \to 0$.

إذا كان $L > 1$ فأثبت أن (x_n) غير محدودة وبالتالي غير متقاربة. هات مثالاً لمتتالية متقاربة (x_n) وأخرى غير متقاربة (y_n) بحيث يكون

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

9. استخدم نتيجة السؤال رقم 8 لتحسب $\lim x_n$ فيما يلي:

(i) $x_n = \frac{a^n}{3^n}$ حيث $a > 0$

(ii) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

(iii) $x_n = \frac{a^n}{n^2}$ حيث $a > 0$

(iv) $x_n = \frac{a^n}{n^n}$.

10. نقول إن (x_n) **متقاربة على غرار سيزارو** إذا كانت $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ متقاربة.

أثبت أن كل متتالية متقاربة، متقاربة على غرار سيزارو. هات مثالاً لمتتالية

ليست متقاربة ولكنها متقاربة على غرار سيزارو.

11. أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}$ بحيث $x_n \to x$.

12. أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}^c$ بحيث $x_n \to x$.

13. إذا كانت $a_n > 0$ و $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ فأثبت أن $\sqrt[n]{a_n} \to L$.

(تستطيع تعديل برهان التمرين رقم 8)

3.3 المتتاليات المطردة

لعل القارئ اليقظ الآن في انتظار آثار مسلمة التمام على مفهوم التقارب. في الواقع سنرى بصمات هذه المسلمة في أغلب ما تبقى من هذا الفصل. ونبدأ بالحالة الخاصة التي تكون فيها المتتالية مطردة حسب التعريف التالي:

تعريف 3.4

نقول إن المتتالية (x_n) **متزايدة** (increasing) إذا كان

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وإذا كانت $x_{n+1} > x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإننا نقول إن (x_n) **متزايدة فعلاً**.

وتسمى (x_n) **متناقصة** (decreasing) إذا كان

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ومتناقصة فعلاً إذا كانت $x_{n+1} < x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وإن كانت (x_n) متزايدة أو متناقصة فهي تسمى **مطردة** (monotone).

لاحظ أن (x_n) متزايدة إذا وفقط إذا كانت $(-x_n)$ متناقصة، وبالتالي فإننا

تمارين 3.3

1. أثبت فيما يلي أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم احسب نهايتها

(i) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n + 5)$

(ii) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

(iii) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}$

2. إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \cdots + \frac{1}{2n}$ فأثبت أن (x_n) متقاربة.

3. افرض أن $0 < x_1 < y_1$ وأن المتتاليتين (x_n) و (y_n) معرفتان بالتالي

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

أثبت أن (x_n) و (y_n) متقاربتان ومن النهاية نفسها.

4. افرض أن $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4.6 \cdots 2n}$

(i) أثبت أن (x_n) متقاربة.

(ii) أثبت أن $((2n+1)x_n^2)$ متقاربة.

(iii) احسب $\lim x_n$.

5. إذا كانت A غير خالية ومحدودة من أعلى فأثبت أن فيها متتالية متزايدة (x_n) بحيث $\lim x_n = \sup A$.

6. لتكن (x_n) متتالية محدودة. عرف المتتاليتين (y_n) و (z_n) كما يلي:

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$$
$$z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

أثبت أن كلاً من (y_n) و (z_n) متقاربة. أثبت أن (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت

$$\lim y_n = \lim z_n.$$

تسمى $\lim y_n$ **نهاية** (x_n) **العليا** ويرمز لها بـــ $\limsup x_n$ أو $\overline{\lim}\, x_n$، كما أن $\lim z_n$ تدعـــى **نهايـــة** (x_n) **الســـفلى** ويرمز إليها بـــ $\liminf x_n$ أو $\underline{\lim}\, x_n$. إذا كانـــت (x_n) غير محدودة من أعلى فقد جرت العادة على وضع $\limsup x_n = \infty$، وإن كانـــت غـــير محـــدودة مـــن أســـفل على وضع $\liminf x_n = -\infty$.

3.4 معيار كوشي ونظرية بولزانو – فايرشتراس

إذا تأملنا أمثلتنا السابقة فسنرى أن تقارب المتتالية غير المطردة، والتي لا تقبل التفتـــيت بواسطة العمليات الجبرية، لا يتقرر إلا بالرجوع إلى التعريف، وفي هذه الحالـــة لا بـــد لنا من تخمين النهاية قبل الشروع في إثبات التقارب. من الجلي أننا بحاجة إلى معيار يمكننا من تقرير التقارب دون الحاجة إلى معرفة النهاية. وفي سعينا لإيجـــاد هذا المعيار سنحتاج إلى استحداث بعض التعاريف والمفاهيم واستخلاص العديد من النتائج المهمة لذاتها ولتحقيق ذلك الهدف.

تعريف 3.5

تســـمى (x_n) متتالية من نوع كوشي، أو **متتالية كوشي** (Cauchy sequence)، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$m, n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

والاستعانة بالتمرين 3.1.6 لإكمال البرهان. في البند التالي سنسلك سبيلاً أكثر عمومية ونقدم من خلال ذلك مفهوماً جديداً.

تمارين 3.4

1. أوجد $\widehat{A}$ فيما يلي:

(i) $A=\mathbb{N}$

(ii) $A=[0,1)\cup(3,4)\cup(5,6]$

(iii) $A=\left\{3^n+\dfrac{1}{k}:n,k\in\mathbb{N}\right\}$

(iv) $A=\mathbb{Q}\backslash\{1/n:n\in\mathbb{N}\}$

2. إذا كانت $A\subset B$ فما العلاقة بين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$؟

3. هات مثالاً

(i) لمجموعة $A\subset\mathbb{R}$ لها أربع نقاط تراكم فقط

(ii) لمجموعة $A\subset\mathbb{R}$ بحيث تكون $\widehat{A}$ قابلة للعد.

4. لكل $A,B\subset\mathbb{R}$ أثبت ما يلي:

(i) $\widehat{(A\cup B)}=\widehat{A}\cup\widehat{B}$

(ii) $\widehat{(A\cap B)}\subset\widehat{A}\cap\widehat{B}$.

وهات مثالاً لمجموعتين A,B بحيث $\widehat{(A\cap B)}\neq\widehat{A}\cap\widehat{B}$.

5. إذا كانت $A\subset\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من أعلى و $\sup A\notin A$، فأثبت أن $\sup A\in\widehat{A}$.

6. هات مثالاً لمتتالية من الفترات المحدودة المفتوحة (I_n) بحيث $I_{n+1}\subset I_n$ و

$$\cdot \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$$

7. إذا كان $x_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{r^2}$ فأثبت أن (x_n) من نوع كوشي (ولذا متقاربة).
8. إذا كانــت (x_n) و (y_n) من نوع كوشي فأثبت أن كلاً من $(x_n + y_n)$ و $(x_n y_n)$ من نوع كوشي.
9. أثبت صحة المعادلتين (3.6) و (3.7) في المثال 3.16.

3.5 المتتاليات الجزئية

تعريف 3.7

لتكن (x_n) متتالية ما. إذا كانت (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلاً، أي إذا كانت

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

فإنـــنا نســـمي المتتالـــية (x_{n_k})، أي $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots)$، **متتالـــية جـــزئية** (subsequence) من (x_n).

مـــن هـــذا التعريف نرى أن المتتالية الجزئية هي نتيجة الاستغناء عن بعض عناصـــر المتتالـــية الأم وإعادة ترقيم الحدود الباقية دون الإخلال بالترتيب السابق. لنورد بعض الأمثلة:

(i) كـــل ذيـــل من (x_n) يشكل متتالية جزئية منها، فمثلاً الذيل رقم 3 هو المتتالية $(x_4, x_5, x_6, \cdots)$. وبكتابة $n_k = k + 3$ فإن $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$،

خــذ $N=1$، عــندئذ نستطيع إيجاد $n_1 \geq N$ بحيث $\left|x_{n_1}-x\right| \geq \varepsilon$. الآن خذ $N=n_1+1$، عندئذ توجد $n_2 \geq N$، أي $n_2 > n_1$، بحيث $\left|x_{n_2}-x\right| \geq \varepsilon$، ··· الخ.

إذا سرنا على هذا المنوال فسنحصل بالاستقراء على متتالية جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ تحقق

$$\left|x_{n_k}-x\right| \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

الآن المتتالــية $\left(x_{n_k}\right)$ محــدودة وعليه فإن لها متتالية جزئية $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ متقاربة (نظرية 3.13). وبمــا أن $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ متتالــية جــزئية من $\left(x_n\right)$ فإن نهايتها هي x بمقتضى المعطيات. ولكن هذا يتناقض مع كون $\left|x_{n_{k_j}}-x\right| \geq \varepsilon$ لكل j. إذن لا مناص من أن $x_n \to x$. □

3.5 تمارين

1. مثل لما يلي:
   (i) متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة.
   (ii) متتالية غير محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.

2. إذا كانت كل متتالية جزئية من $\left(x_n\right)$ لها متتالية جزئية نهايتها 0 فأثبت أن
$$\lim x_n = 0$$

3. افــرض أن $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا كانت $\left((-1)^n x_n\right)$ متقاربة فأثبت أن $\left(x_n\right)$ متقاربة. ما هي النهاية؟

4. افرض أن $\left(x_n\right)$ متتالية محدودة وعناصرها مختلفة ($x_n \neq x_m$ لكل $n \neq m$). إذا كانــت للمجمــوعة $\{x_n : x \in \mathbb{N}\}$ نقطــة تراكم واحدة x فأثبت أن

. $x_n \to x$

5. إذا كانت (x_n) متتالية محدودة فأثبت وجود متتالية جزئية نهايتها $\limsup x_n$ وأخرى نهايتها $\liminf x_n$. أثبت كذلك أن $\limsup x_n$ و $\liminf x_n$ هما أكبر وأصغر نهاية يمكن تحقيقها بمتتالية جزئية من (x_n) (راجع تمرين 3.3.6 لتعريف $\limsup$ و $\liminf$).

6. إن ترتيب النظريات كما قدمناه في البندين الأخيرين ليس المفضل بالضرورة لدى جميع الكتاب. في هذا التمرين سنساعد القارئ على إثبات نظرية 3.13 ثم نقوده إلى إثبات معيار كوشي ونظرية بولزانو-فايرشتراس (نظرية 3.11).

(i) لتكن (x_n) متتالية محدودة. نسمي العدد $n \in \mathbb{N}$ **نقطة قمة** لو كان

$$x_n \geq x_k \quad \forall\, k \geq n.$$

إذا كانت مجموعة نقاط القمة منتهية، فوضّح كيف تختار من (x_n) متتالية جزئية متزايدة. وإذا كانت مجموعة نقاط القمة غير منتهية فوضّح كيف تختار متتالية جزئية متناقصة.

استنتج الآن وجود متتالية جزئية متقاربة. بهذا تكون قد أثبت نظرية 3.13.

(ii) إذا كانت (x_n) متتالية من نوع كوشي ولها متتالية جزئية متقاربة، فأثبت أن (x_n) نفسها متقاربة (ولذات النهاية).

(iii) استنتج معيار كوشي (ستحتاج للجزئين (i)، (ii) والتمهيد 3.2).

(iv) استخدم النظريتين 3.10 و 3.13 لإثبات نظرية بولزانو-فايرشتراس.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots \\ &= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdots\right] \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3} \\ &= 1, \end{aligned}$$

أي أن "طـــول" المجموعة F يساوي الصفر! ومع ذلك فإن الفقرة 2 تقرر أن $F\sim[0,1]$، مما يناقض توقعاتنا الحدسية. وفي الواقع فإن مجموعة كانتور تظهر كـــثيراً في الأمثلة المناقضة لما هو متوقع، وتذكرنا مراراً بمغبة قبول الحدس على أنه الصواب دائماً.

3.6 تمارين

1. أثبت بالتفصيل التقارير الواردة في الأمثلة المذكورة بعد التعريف 3.9.
2. إذا كانت $A\subset\mathbb{R}$ مفتوحة ومحدودة فأثبت أن $\sup A\notin A$ و $\inf A\notin A$.
3. إذا كانت A مغلقة ومحدودة فأثبت أن $\inf A,\sup A\in A$.
4. هات مثالاً لمجموعات مغلقة اتحادها لا يكون مجموعة مغلقة.
5. أثـــبت أن $A\subset\mathbb{R}$ مغلقة $\Leftrightarrow$ كل متتالية في A من نوع كوشي لها نهاية في A.
6. لـــتكن $A\subset D$. سنقول إن A **مفتوحة في** D إذا كان لكل $x\in A$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap D\subset A$$

أثبت أن A مفتوحة في D $\Leftrightarrow$ يوجد مجموعة مفتوحة G بحيث

$$A = G \cap D.$$

كيف تعرف المفاهيم التالية؟

(i) A جوار لـــ x في D

(ii) A مغلقة في D

7. نعرف **داخل** (interior) المجموعة A بأنه أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A، ونرمز إليه بـــ A°. أثبت أن

(i) A مفتوحة $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$

(ii) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ,\ (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$

8. نعـــرف **انغلاق** (closure) المجموعة A بأنه أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A، ونرمز إليه بـــ $\overline{A}$. أثبت أن

(i) A مغلقة $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

(ii) $x \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ نجد أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

(iii) $x \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ توجد متتالية (x_n) في A بحيث $x_n \to x$

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$

(v) $\overline{A} = A \cup \hat{A}$.

9. نعرف **حافة** A (أو **حدود** A) (boundary) بأنها المجموعة

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

أثبت أن $A^\circ \cap \partial A = \varnothing$ وأن $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.

10. أثبت أن $\overline{A}=\left[\left(A^c\right)^\circ\right]^c$ ، $A^\circ=\left(\overline{A^c}\right)^c$.

11. هات مثالاً لمجموعة A بحيث $\overline{A^\circ}\neq\overline{A}$ ، ومجموعة B بحيث $\left(\overline{B}\right)^\circ\neq B^\circ$.

12. احسب داخل وانغلاق وحافة كل من المجموعات التالية:

(i) $\mathbb{N}$ (ii) $\mathbb{Z}$ (iii) $\mathbb{R}$ (iv) $\mathbb{Q}$ (v) $\mathbb{Q}^c$

(vi) $[a,b)$ (vii) $(2,3]\cup(4,5)$.

نظرية 4.3

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c}f(x)$ موجودة، فهي وحيدة.

تمارين 4.1

1. بين أيّ التعاريف التالية لـــ $\lim_{x\to c}f(x)=\ell$ صحيح وأيها خاطئ:

(i) لكل $\delta>0$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-\ell|<\delta$$

(ii) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$

(iii) لكل $\delta>0$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

(iv) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<7\varepsilon$$

(v) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ |f(x)-\ell|<\varepsilon\Rightarrow 0<|x-c|<\delta$$

(vi) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta/5\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

2. باستخدام التعريف 4.1، أثبت فيما يلي أن $\lim_{x\to c}f(x)=\ell$

(i) $f(x)=x^3$، $\ell=c^3$.

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ ، $c=1$ و $\ell=1$

(iii) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ ، $c=2$ و $\ell=\sqrt{2}$

3. باستخدام التعريف 4.1 مباشرة أو النظرية 4.1 أثبت أن

(i) $$\lim_{x\to 1}\frac{3x}{1+x^2}=\frac{3}{2}$$

(ii) $$\lim_{x\to 1}x^5+\frac{1}{x}=2$$

(iii) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$$

4. أثبت أن النهايات التالية غير موجودة

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

(ii) $$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

(iii) $$\lim_{x\to 0}\left(x^2+\operatorname{sgn} x\right)$$

5. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بما يلي

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

فأثبت أن $\lim_{x\to c}f(x)$ موجودة $\Leftrightarrow$ $c=0$.

6. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to 0}f(x)=\ell$. إذا كانت $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بـ $g(x)=f(ax)$ حيث $a>0$، فأثبت أن

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\ell.$$

7. لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c}[f(x)]^2=0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c}f(x)=0$.

أعط مثالاً لدالة f بحيث تكون $\lim_{x\to c}[f(x)]^2$ موجودة بينما $\lim_{x\to c}f(x)$ غير موجودة.

8. افرض أن $A_n \subset [0,1]$ مجموعة منتهية لكل $n \in \mathbb{N}$ وأن
$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \varnothing$$
لتكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ معرفة كما يلي
$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x \in A_n \\ 0 & x \notin \cup_1^\infty A_n. \end{cases}$$
أثبت أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ لكل $c \in [0,1]$.

9. افرض أن $f,g : D \to \mathbb{R}$ وأن $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $f(x) = g(x)$ لكل $x \neq c$ في جوار ما للنقطة c و $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$.

4.2 النظريات الأساسية

نقدم في هذا البند مفهوم النهاية في ضوء العمليات الجبرية وعلاقة الترتيب على $\mathbb{R}$، الأمر الذي سيمكننا من تقرير وحساب نهاية الدالة بعد تفكيكها إلى مكوّناتها الأولية.

نظرية 4.4

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كانت للدالة f نهاية عند c فإن f محدودة في جوار c، أي أنه يوجد جوار U للنقطة c وعدد حقيقي ثابت M بحيث
$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in U \cap D.$$

البرهان

افرض أن $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. من التعريف 4.1 توجد $\delta > 0$ بحيث
$$x \in D,\ 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1.$$

مثال 4.12

لإيجاد النهاية

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$$

لا نستطيع استخدام الجزء (iii) من النظرية 4.6، إذ أن نهاية المقام هي الصفر، لكننا نلاحظ أنه إذا كان $x\neq 2$ فإن

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{x-1}{x+2}$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

تمارين 4.2

1. أعط أمثلة لدالتين g,f بحيث

(i) كل من $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ غير موجودة لكن للدالة $f+g$ نهاية عند c.

(ii) كل من $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ غير موجودة لكن $f\cdot g$ لها نهاية عند c.

(iii) $\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ موجودة.

2. إذا كانت $a\le f(x)\le b$ لكل $x\in D_f$ و $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ موجودة، فأثبت أن $a\le\lim\limits_{x\to c}f(x)\le b$. ماذا يمكن قوله إذا كانت $a<f(x)<b$ لكل $x\in D_f$؟

3. لتكن $f(x)\geq 0$ لكل $x\in D_f$. إذا كانت $c\in\widehat{D_f}$ و $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$.

هل تستطيع أن تعمم هذه النتيجة للجذر من الدرجة n؟

4. احسب النهاية في كل مما يلي متى وجدت

(i) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x+2}}$

(ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+x}}{3x-x^2}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ و g دالة محدودة في جوار ما للنقطة c فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=0$.

6. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=|\ell|$. متى يكون العكس صحيحاً؟

7. إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)}{x}=a\ell$ لكل $a\neq 0$. ماذا يحدث لو كانت $a=0$؟ احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

8. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

أثبت أن للدالة f نهاية عند كل $c\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ للدالة f نهاية عند 0 $\Leftrightarrow$ الدالة

f محدودة في جوار ما للنقطة 0.

9. افرض أن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

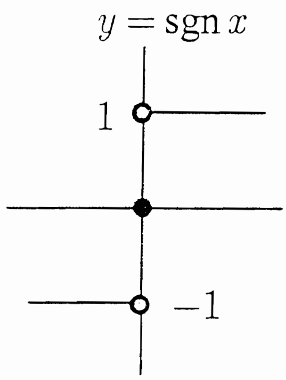
$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة فأثبت أن للدالة f نهاية عند c. أثبت أيضاً أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ وإلا فإن $f(x)=0$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

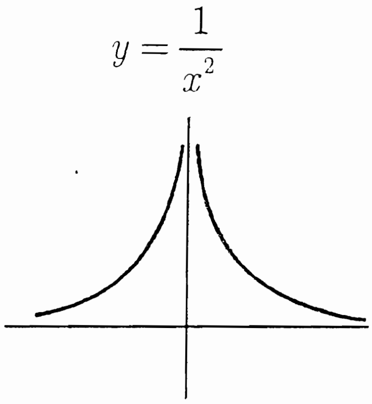
4.3 بعض الامتدادات لتعريف نهاية الدالة

في أمثلة البند 4.1 أثبتنا أن النهايات التالية غير موجودة:

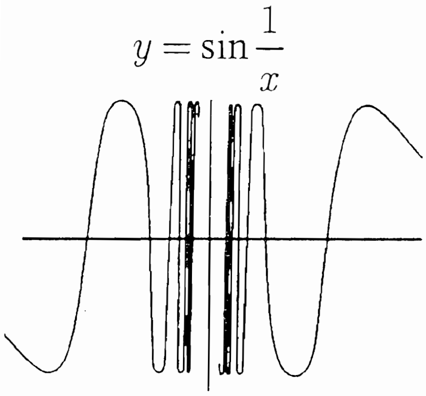
(i) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$



شكل 4.4



شكل 4.5



شكل 4.6

ولكـــن الأشكال 4.4، 4.5، 4.6 تبين أن سلوك هذه الدوال في جوار 0 مختلف، فالدالـــة في (ii) غير محدودة بينما كل من الدالتين في (i)، (iii) محدودة على مجالها. أما الفرق بين الدالتين في (i) و (iii) فيتمثل في أننا لو قصرنا المجال على $(0,\infty)$ أو

لنـــرى هـــذا افرض أننا أعطينا $0<\varepsilon$. لكي نحقق $\left|\frac{1}{x^2}-0\right|<\varepsilon$ يكفينا أن نجعل $x^2<\frac{1}{\varepsilon}$. لنأخذ $M=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$، عندئذ

$$x>M\Rightarrow\left|\frac{1}{x^2}-0\right|<\varepsilon$$

كما نبتغي.

لاحظ كذلك أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

تمارين 4.3

1. اكتب نصوص وبراهين رصيفات النظريات 4.1 إلى 4.8 بالنسبة للنهاية اليمنى والنهاية اليسرى.

2. لتكن $f,g:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كان هنالك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x)\le g(x)\quad\forall x\in D\cap U\setminus\{c\}$$

فأثبت ما يلي

(i) إذا كانت $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ فإن $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$

(ii) إذا كانت $\lim_{x\to c}g(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x\to c}f(x)=-\infty$

3. ما المقصود بما يلي إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$؟

(i) $\lim_{x\to c^+}f(x)=\infty$

(ii) $\lim_{x\to c^+}f(x)=-\infty$

(iii) $\lim_{x\to c^-}f(x)=\infty$

(iv) $\lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty$

4. ما معنى العبارات التالية؟

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

5. احسب النهايات اليمنى و اليسرى، إن وجدت:

(i) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(iii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iv) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-5x+7}{2x^3+4x^2-1}$

(v) $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ حيث p و q كثيرتا حدود.

(vi) $\lim_{x\to 0} x[x]$

(vii) $\lim_{x\to 1} x[x]$

6. أورد نص وبرهان نظرية مماثلة لنظرية 4.1 في حالة $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

7. لتكن $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$. أثبت أن

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\ell.$$

8. ليكن D جواراً للنقطة ∞ وافرض أن $f,g:D\to\mathbb{R}$. إذا كانت

$$g(x)>0 \quad \forall x\in D$$

وكانت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell>0$$

فأثبت أن

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

ماذا يمكن أن نقول إذا كانت $\ell<0$ ؟

9. لتكن $\lim_{x\to c} f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to c} g(x)=\infty$. إذا كان $\ell>0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)g(x)=\infty$.

ماذا يحدث لو كان

(i) $\ell<0$

(ii) $\ell=0$ ؟

4.4 الدوال المطردة

تعريف 4.5

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$. سنقول إن f **متزايدة** (increasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)\geq f(x)$$

ونقول إن f **متزايدة فعلاً** (strictly increasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)>f(x).$$

ومن جهة أخرى تسمى الدالة f **متناقصة** (decreasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)\leq f(x)$$

و**متناقصة فعلاً** (strictly decreasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)<f(x).$$

ولكن، من تعريف A_n ، فإن

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i^{+}\right)-f\left(x_i^{-}\right)\right]>n\frac{f(b)-f(a)}{n}=f(b)-f(a)$$

وهذا التناقض نشأ من الافتراض بأن عدد عناصر A_n أكبر من أو يساوي n. إذن عدد عناصر A_n أقل من n. □

تمارين 4.4

1. أثبت أن الدالة المطردة فعلاً متباينة ومعكوسها دالة مطردة فعلاً.
2. إذا كانت f متزايدة على (a,b) وغير محدودة من أعلى على (a,b)، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$. ماذا يمكنك القول لو كانت f متناقصة على (a,b).
3. إذا كانت f ، g متزايدتين على D فأثبت أن $f+g$ متزايدة على D. إذا كانت بالإضافة إلى ذلك $f(x)\ge 0$ ، $g(x)\ge 0$ لكل $x\in D$ فأثبت أن $f\cdot g$ متزايدة على D.

   لتكن $D=[0,1]$ ، $f(x)=x$ ، $g(x)=1-x$. أثبت أن كلاً من f و g دالة مطردة ولكن $f\cdot g$ ليست مطردة.
4. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+g(y)\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

   إذا كانت f مطردة فأثبت وجود $m\in\mathbb{R}$ بحيث

$$f(x)=mx\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

   (أثبت أولاً أن $f(q)=mq$ لكل $q\in\mathbb{Q}$).

$f:D\to\mathbb{R}$ في بعـــض الأحيان **نقاطاً شاذة** (singular points) للدالة f. وبناء علـــى مـــا تقـــدم، إذا كانت c نقطة شاذة للدالة f فإنها قابلة للإزالة إن كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجـــودة، وذلـــك بإعـــادة تعريف الدالة عند c، وإلا فإنها غير قابلة للإزالة.

تمارين 5.1

1. اكتب تفاصيل برهان النتيجة 5.1.
2. أوجد مجال الاتصال لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$.

(i) $$f(x)=|x|$$

(ii) $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

(iii) $$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\sin x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

3. عين نقاط عدم الاتصال لكل من الدوال في تمرين 2 وبين نوعه.
4. إذا كانت الدالة f المعرفة على $(-1,1)$ تحقق

$$|f(x)|\leq|x| \quad \forall x\in(-1,1)$$

فأثبت أن f متصلة عند $x=0$.

5. أعـــط مثالاً لدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند $c\in D$، ولكن قيمتها المطلقة $|f|$ المعرفة على D بالمساواة

$$|f|(x)=|f(x)| \quad \forall x\in D$$

متصلة عند c.

6. أعط مثالاً لدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند كل نقطة في D، ولكن $|f|$ متصلة على D.

7. إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$ فأثبت أن $|f|$ متصلة عند c.

8. عرف كلاً من الدوال التالية عند $x=0$ بحيث تصبح متصلة عند هذه النقطة إن أمكن:

(i) $$f(x)=\frac{1}{x}\sin 3x,\ x\neq 0$$

(ii) $$g(x)=\frac{1}{x}\sin x^2,\ x\neq 0$$

(iii) $$h(x)=\frac{1}{x}\sin\sqrt{x},\ x\neq 0$$

(iv) $$b(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}\sin x\ \ x\neq 0$$

9. تسمى الدالة $f:D\to\mathbb{Z}$ المعطاة بالقاعدة $f(x)=[x]$ **الدالة الدرجية**. أوجد مجال الاتصال لكل من الدوال التالية

(i) $f(x)=[x]$

(ii) $g(x)=x[x]$

(iii) $h(x)=[\sin x]$

10. إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة فأثبت أن المجموعة $\{x\in D: f(x)=0\}$ مغلقة في D.

11. افرض أن $f:D\to\mathbb{R}$ وأن g هي مقصور f على E حيث $E\subset D$.

(i) إذا كانت f متصلة عند $c\in E$ فأثبت أن g أيضاً متصلة عند c.

(ii) أعط مثالاً يبين أن اتصال g عند c لا يقتضي اتصال f عند c.

12. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة وكان

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{Q}$$

فأثبت أن

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

13. افرض أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

إذا كانت f متصلة عند $x=0$ فأثبت أنها متصلة على $\mathbb{R}$.

14. افرض أن $f:D\to[0,\infty)$.

إذا كانت f متصلة على D فأثبت أن الدالة $\sqrt{f}$ المعرفة على D بالمساواة $\sqrt{f}(x)=\sqrt{f(x)}$ هي الأخرى متصلة على D.

15. يقال إن لكثيرة الحدود q **صفراً من الدرجة** m عند $x=c$، حيث $m\in\mathbb{N}$، إذا كانت النهاية $\lim_{x\to c} q(x)\big/(x-c)^m$ موجودة وتختلف عن 0.

إذا كان c صفراً من الدرجة m لكثيرة الحدود q فأثبت أن بالإمكان تعريف الدالة النسبية p/q بحيث تكون متصلة عند هذه النقطة إذا وفقط إذا كان c صفراً لكثيرة الحدود p من الدرجة k حيث $k\geq m$.

16. لتكن f مطردة على (a,b). استخدم معلوماتك من البند 4.4 لإثبات أن عدم اتصال f عند أي نقطة $c\in(a,b)$ هو من نوع القفزة.

إذا عُرِّفت الدالة f عند a و b بحيث تصبح مطردة على $[a,b]$ فماذا يمكن أن نقول عن عدم اتصالها عند هاتين النقطتين؟

17. إذا كانت f مطردة على الفترة I فأثبت أن نقاط I التي لا تكون عندها f متصلة تشكل مجموعة قابلة للعد.

مثال 5.12

لأي كثيرة حدود

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

على $\mathbb{R}$، يتضح من النتيجة 5.3 أن كلاً من الدالتين

$$(p\circ\sin)(x)=p(\sin x)=a_0+a_1\sin x+\cdots+a_n(\sin x)^n$$
$$(\sin\circ p)(x)=\sin\left(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\right)$$

متصلة على $\mathbb{R}$. وإذا كانت

$$f(x)=\frac{x}{x-1},\quad x\neq 1$$

فإن المحصلة

$$(f\circ\sin)(x)=\frac{\sin x}{\sin x-1}$$

أيضاً متصلة على مجالها الطبيعي وهو $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2+2n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$. أما المحصلة

$$(\sin\circ f)(x)=\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

فهي معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

تمارين 5.2

1. تحقق من اتصال أو عدم اتصال كل من الدوال التالية عند النقطة $x=0$:

(i) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(ii) $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}},\quad x\geq 0$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases} \quad \text{(iii)}$$

2. إذا كانت الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة، فأثبت أن الدالة f^n المعطاة بالقاعدة
$$f^n(x)=(f(x))^n,\quad x\in D,\ n\in\mathbb{N}$$
أيضاً متصلة على D.

3. افــرض أن $f:D\to\mathbb{R}$ ، $g:D\to\mathbb{R}$ دالــتان متصــلتان. أثبت أن الدالتين $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ المعرفتين على D كما يلي
$$\max(f,g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}\quad \forall x\in D$$
$$\min(f,g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}\quad \forall x\in D$$
متصلتان على D.

إرشاد: أثبت أولاً أن
$$\max(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$
$$\min(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

4. أعط مثالاً لدالتين غير متصلتين عند c، ولكن مجموعهما دالة متصلة عند c.

5. أعــط مــثالاً لدالتين إحداهما غير متصلة عند c، ولكن حاصل ضربهما دالة متصلة عند c.

6. أعــط مــثالاً لدالتين إحداهما غير متصلة عند c، ولكن تحصيلهما دالة متصلة عند c.

7. أوجد مجال اتصال الدالة
$$f(x)=x-[x]\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

8. افرض أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$$

إذا كانت f متصلة عند 0 فأثبت أنها متصلة على $\mathbb{R}$.

5.3 خواص الاتصال على فترة

تتحلـــى الدالة المتصلة على فترة بعدد من الخواص المهمة التي لا تتوفر لغيرها من الدوال المتصلة، وفي هذا البند سنتعرف على أهم هذه الخصائص. لقد سبق أن قدمـــنا مفهوم محدودية الدالة في النظرية 4.4، واستكمالاً للموضوع نقدم التعريف التالي:

تعريف 5.2

يقـــال إن الدالـــة $f:D\to\mathbb{R}$ **محدودة** (bounded) على $E\subset D$ إذا وجد عدد ثابت $M\geq 0$ بحيث يكون

$$|f(x)|\leq M \quad \forall\, x\in E$$

ويقال إن f محدودة إذا كانت محدودة على D .

من الواضح أن الدالة f تكون محدودة إذا وفقط إذا كانت المجموعة $f(D)$ محدودة. فالدالة $\sin$ على سبيل المثال محدودة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1 (أو أي عدد أكبر مـــن 1) بينما الدالة $f(x)=x^2$ ليست محدودة على $\mathbb{R}$ لأن مداها وهو $[0,\infty)$ مجموعة غير محدودة.

(انظر الشكلين 5.10، 5.11)

لاحــــظ أن مجــــال f في هذا المثال ليس فترة كما تتطلب النظرية 5.8. في النظرية 5.16 سنقدم شرطاً من نوع آخر لنضمن اتصال f^{-1} .

تمارين 5.3

1. إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وتحقق التالي:

لكل $x\in[a,b]$ يوجد $y\in[a,b]$ بحيث

$$|f(y)|\leq\frac{1}{2}|f(x)|$$

فأثبت وجود $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

2. إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وتحقق

$$f(x)>0 \quad \forall x\in[a,b]$$

فأثبت وجود $\alpha>0$ بحيث

$$f(x)>\alpha \quad \forall x\in[a,b]$$

3. أعط مثالاً لكثيرة حدود ليس لها جذر حقيقي.

4. أعط مثالاً لدالة $f:[0,1]\to[0,1]$ ليس لها نقطة ثابتة.

5. افــــرض أن f ، g دالــــتان متصــــلتان علــــى $[a,b]$ وأن $f(a)\geq g(a)$ ، $f(b)\leq g(b)$. أثبت أن هنالك $x_0\in[a,b]$ بحيث $f(x_0)=g(x_0)$.

6. أثبت أن للمعادلة $\cos x=x$ حلاً في $(0,\pi/2)$.

7. أثبت أن للمعادلة $x2^x=1$ حلاً في $(0,1)$.

8. تــــدل النظرية 5.6 على أن الدالة المتصلة على فترة تتمتع بالخاصة البينية. أثبت

أن العكس غير صحيح بصفة عامة، وذلك بإثبات أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تحقق الخاصة البينية على $\mathbb{R}$.

9. عيِّن فترة في $\mathbb{R}$ طولها 1 تحتوي حلاً للمعادلة

$$xe^{x}=1$$

10. عين فترة في $\mathbb{R}$ طولها $\dfrac{1}{2}$ تحتوي جذراً للمعادلة

$$x^3-6x+2.5=0$$

احسب الحل مقرباً لمنزلتين عشريتين باستخدام طريقة التنصيف التي استعملناها في المثال 5.13.

11. لتكن f متصلة على $[0,1]$ وافرض أن $f(0)=f(1)$. أثبت وجود $c\in[0,1/2]$ بحيث $f(c)=f(c+1/2)$.

إرشاد: استخدم الدالة $g(x)=f(x)-f(x+1/2)$.

استنتج من ذلك أن على خط الاستواء في الكرة الأرضية نقطتين متناظرتين (على استقامة مع مركز الكرة الأرضية) حيث تتساوى درجة الحرارة، وذلك بافتراض أن درجة الحرارة متصلة على خط الاستواء.

12. لتكن الدالة f معرفة على $[0,\pi/2]$ بالقاعدة

$$f(x)=\max\left\{x^2,\cos x\right\}.$$

أثبت أن للدالة f قيمة صغرى عند نقطة ما $c\in[0,\pi/2]$ وأن c تحقق المعادلة $\cos x=x^2$.

13. افرض أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة وأن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

أثبت أن f محدودة على $\mathbb{R}$ وأن لها على الأقل قيمة قصوى واحدة. أعط مثالاً يبين أنه قد لا يكون للدالة f قيمة عظمى وقيمة صغرى معاً.

5.4 الاتصال المنتظم

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة متصلة. إذا كان $c \in D$ فإن التعريف 5.1 ينص على أن لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D,\ |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon. \tag{5.11}$$

من الواضح أن العدد δ يعتمد على ε ويتحدد بمعرفته، طالما أننا نتحدث عن نقطة واحدة c. ولكن عندما ننتقل إلى نقطة أخرى $c' \in D$ فقد لا يفي هذا العدد δ بالغرض المنشود، ونضطر حينذاك لاختيار عدد آخر $\delta' > 0$ يختلف عن δ لنحقق الاقتضاء اللازم لاتصال f عند c'، أي

$$x \in D,\ |x-c'| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(c')| < \varepsilon.$$

على هذا ينبغي أن نأخذ في الاعتبار إمكانية اعتماد δ على النقطة c، ولإبراز هذا الاعتماد يفضل أن نكتب $\delta(\varepsilon, c)$ بدلاً عن δ. سنوضح الأمر بالمثال التالي:

لنعرف الدالة $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ بالقاعدة

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

من المؤكد أن f متصلة على $(0,1)$ إذ أن هذه الفترة لا تحوي أياً من أصفار مقامها. لكن لنفرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت لنا ونريد أن نختار δ بما يحقق الاقتضاء (5.11) عند c. لاحظ أن

$0 \to f(u_n) - f(x_n)$، وعليه فإن $f(u_n) \to g(x)$.

واضح أن g تمديد للدالة f إلى $\overline{D}$، ولم يبق إلا إثبات أنها منتظمة الاتصال. افرض أن $\varepsilon > 0$. من اتصال f المنتظم على D نعلم أنه يوجد $\delta > 0$ تحقق الاقتضاء (5.15). لنفرض الآن أن $x, t \in \overline{D}$ وأن $|x - t| < \delta/3$. هناك متتاليتان (x_n)، (t_n) في D بحيث $x_n \to x$، $t_n \to t$، ومن التعريف (5.17) للدالة g فإن $f(x_n) \to g(x)$، $f(t_n) \to g(t)$. إذن يوجد $N' \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\begin{aligned} n \geq N' \Rightarrow & |x_n - x| < \delta/3,\ |t_n - t| < \delta/3, \\ & |f(x_n) - g(x)| < \varepsilon,\ |f(t_n) - g(t)| < \varepsilon. \\ \Rightarrow & |x_n - t_n| \leq |x_n - x| + |x - t| + |t - t_n| < \delta \end{aligned} \tag{5.18}$$

وبالنظر إلى (5.15) فإن

$$|f(x_n) - f(t_n)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N'. \tag{5.19}$$

من (5.18) و (5.19) نرى الآن أن لأي $n \geq N'$

$$|g(x) - g(t)| \leq |g(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(t_n)| + |f(t_n) - g(t)| < 3\varepsilon$$

لكل $t, x \in \overline{D}$ بحيث $|x - t| < \delta/3$. وهذا يعني أن g متصلة بانتظام على $\overline{D}$. □

5.4 تمارين

1. عين الدوال المتصلة بانتظام من بين الدوال التالية

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$، $D_f = (0, \infty)$

(ii) $g(x) = \sqrt[3]{x}$، $D_g = \mathbb{R}$

(iii) $h(x) = x^{3/2}$، $D_h = [0, \infty)$

2. أثبت أن الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

3. إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام على D فأثبت أن $f+g$ أيضاً متصلة بانتظام على D. هات مثالاً يوضح أن الدالة $f\cdot g$ ليست بالضرورة متصلة بانتظام.

4. إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام ومحدودة على D فأثبت أن $f\cdot g$ هي الأخرى متصلة بانتظام.

5. إذا كانت $f:D\to E$ ، $g:E\to\mathbb{R}$ دالتين متصلتين بانتظام، فهل الدالة $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ متصلة بانتظام؟

6. لتكن

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(i) أثبت أن f متصلة بانتظام على أي مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$.

(ii) هل f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$؟

7. لقد رأيت في برهان النظرية 5.11 أنه لو كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة بانتظام وكانت (x_n) متتالية من نوع كوشي، فإن $(f(x_n))$ هي أيضاً من نوع كوشي. هات مثالاً يوضح أهمية شرط انتظام الاتصال لصحة هذا التقرير.

8. أثبت أن الدالة المتصلة بانتظام على فترة محدودة هي دالة محدودة.

9. يقال إن الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ تحقق **شرط ليبشتز** (Lipschitz condition) إذا كان هنالك عدد ثابت $k>0$ بحيث

$$|f(x)-f(t)|\leq k|x-t| \quad \forall\, x,t\in D.$$

أثبت أن كل دالة تحقق شرط ليبشتز هي دالة متصلة بانتظام.

باستخدام الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على $[0,\infty)$ أثبت أن العكس غير صحيح.

10. أثبت أن الدالة $f(x)=x\sin x$ ليست متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

11. تسمى الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **دورية** (periodic) إذا وجد عدد ثابت $T>0$ بحيث

$$f(x+T)=f(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

إذا كانت الدالة f متصلة ودورية على $\mathbb{R}$ فأثبت أن اتصالها منتظم.

5.5 المجموعات المتراصة والاتصال

سنتحدث في هذا البند عن أحد المفاهيم التحليلية ذات الأثر العميق، والتي تلعب دوراً أساسياً في فهم وصياغة نظريات الاتصال، لا سيما في الفضاءات التبولوجية الأعم من $\mathbb{R}$، وهو مفهوم **التَّراص** (compactness). سنسعى من خلال هذا العرض السريع إلى تعريف المجموعة المتراصة وتشخيصها في $\mathbb{R}$، ثم نعيد النظر في خواص الاتصال في ضوء هذا التعريف بهدف الوصول إلى تشخيص تحليلي أكثر عمومية وعمقاً.

افرض أن G_λ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ لكل $\lambda\in\Lambda$، حيث Λ مجموعة ترقيم (index set)، قد تكون منتهية وقد لا تكون، وإذا كانت غير منتهية فقد تكون قابلة للعد (مثل $\mathbb{N}$) وقد لا تكون (مثل $\mathbb{R}$). إذا كانت E مجموعة من الأعداد الحقيقية بحيث يكون $E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ فإن المجموعة $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ تسمى **غطاءً مفتوحاً** (open cover) للمجموعة E. كما يقال إن $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ **تغطي**

(أي إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة، مغلقة في المجال D).

البرهان

1. لتكن f متصلة وافرض أن F مغلقة. إذن $G = F^c$ مفتوحة، وعليه توجد H مفتوحة بحيث $f^{-1}(G) = H \cap D$. الآن

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) = f^{-1}\left(G^c\right) &= \left[f^{-1}(G)\right]^c \cap D \\ &= \left(H^c \cup D^c\right) \cap D \\ &= H^c \cap D. \end{aligned}$$

إذا وضعنا $K = H^c$ فإن K مغلقة ويكون لدينا

$$f^{-1}(F) = K \cap D.$$

سنترك إثبات الاقتضاء في الاتجاه الآخر كتمرين. □

تمارين 5.5

1. عرف غطاءً مفتوحاً للفترة $[-1,1)$ لا يشمل غطاء جزئياً منتهياً.
2. لتكن K مجموعة متراصة و $F \subset K$
   (i) إذا كانت F مغلقة فأثبت أن F متراصة.
   (ii) إذا كانت F مغلقة في K فأثبت أن F متراصة.
3. إذا كانت كل من K_1، K_2 مجموعة متراصة فأثبت أن كلاً من $K_1 \cup K_2$، $K_1 \cap K_2$ متراصة.
4. إذا كانت K_n مجموعة متراصبة لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ مجموعة

متراصة ولكن $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ليست بالضرورة متراصة.

5. إذا كانت K متراصة فأثبت أن كلاً من $\sup K$ و $\inf K$ موجود وينتمي إلى K.

6. لأي $D \subset \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}$ تعرَّف المسافة بين المجموعة D و c بأنها
$$d(c,D) = \inf\{|x-c| : x \in D\}.$$
إذا كانت D متراصة فأثبت وجود نقطة $a \in D$ أقرب ما تكون للنقطة c.

7. افرض أن D متراصة و $f : D \to \mathbb{R}$ متصلة. أثبت أن المجموعة $\{x : 0 \le f(x) \le 1\}$ متراصة.

8. عرف الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ على المجموعة $D = [0,1] \cup [2,3)$ بحيث
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 4-x & x \in [2,3). \end{cases}$$
(i) أثبت أن f متباينة ومتصلة.

(ii) استنتج أن $f^{-1} : [0,2] \to D$ غير متصلة عند العدد 1 وذلك بإثبات أن المتتالية $\left(f^{-1}\left(1+(-1)^n/n\right)\right)$ غيرمتقاربة.

(iii) ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للنظريتين 5.8 و 5.16؟

9. عرف دالة غير متصلة تكون دالتها العكسية متصلة.

10. استخدم تعريف التراص ونظرية 5.17 لإثبات نظرية 5.15.

$n\in\mathbb{N}$ ، $m\in\mathbb{Z}$ ، فإن هذا يعني أن مشتقة الدالة

$$\phi(x)=x^q,\quad q\in\mathbb{Q},\ x\in D\backslash\{0\}$$

هي .

$$\phi'(x)=qx^{q-1},\quad x\in D\backslash\{0\}.$$

هذه النتيجة تبقى صحيحة حتى لو كانت $q\in\mathbb{Q}^c$ ، ويمكن إثبات ذلك باستخدام خواص الدوال الأسية واللوغاريتمية.

تمارين 6.1

1. أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة

(i) $f(x)=\tan x,\quad x\in(-\pi/2,\pi/2)$

(ii) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad x>0$

(iii) $h(x)=[x],\quad x\in\mathbb{R}$

2. افرض أن

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$ ثم احسب $f'(0)$.

3. إذا كانت الدالة f تحقق المتباينة $|f(x)|\leq|x|^\alpha$ في جوار النقطة 0 وكان $\alpha>1$ ، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$. راجع المثالين 6.2 و 6.7 على ضوء هذه النتيجة.

4. لتكن f قابلة للاشتقاق عند c . أثبت أن

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{(i)}$$

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h} \quad \text{(ii)}$$

كـــذلك أثـــبت أن وجود النهاية في (i) يقتضي وجود $f'(c)$، ولكن وجود النهاية في (ii) لا يقتضي وجود $f'(c)$.

5. افرض أن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. تسمى الدالة f **زوجية** (even) إذا كان

$$f(-x)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

وفردية (odd) إذا كان

$$f(-x)=-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

إذا كانـــت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فأثبت أن f' فردية عندما تكون f زوجية، وأن f' زوجية عندما تكون f فردية.

6. لـــتكن $n\in\mathbb{N}$. نعرف $f^{(n)}$، مشتقة f من الرتبة n، استقرائياً على النحو التالي

$$f^{(1)}=f'$$

$$f^{(2)}=f''=(f')'$$

$$f^{(n)}=\left[f^{(n-1)}\right]'.$$

أوجد $f^{(n)}(x)$ لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

(i) $f(x)=\sin x$

(ii) $f(x)=\cos x$

(iii) $f(x)=x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ و $0\le m<n$

(iv) $f(x)=x^n$

(v) $f(x)=x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ و $m>n$

7. افرض أن

$$f(x)=\begin{cases} x^n & x\geq 0,\ n\in\mathbb{N} \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

(i) أثبت أن f قابلة للاشتقاق $(n-1)$ مرة عند $x=0$ واحسب $f^{(n-1)}(0)$، حيث نعرف $f^{(0)}$ بأنها f.

(ii) أثبت أن $f^{(n)}(0)$ غير موجودة.

8. أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة

(i) $f(x)=\sqrt{|x|}, \quad x\in\mathbb{R}$

(ii) $g(x)=x|x|, \quad x\in\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=\left|x^2-1\right|, \quad x\in\mathbb{R}$

9. باعتبار Arccos هي الدالة العكسية للدالة

$$f(x)=\cos x, \quad x\in[0,\pi]$$

احسب مشتقة Arccos حيثما وجدت في الفترة $[-1,1]$.

10. أثبت أن الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة c تحقق شرط ليبشتز في جوار ما للنقطة c.

11. استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات **قاعدة لايبنتز** (Leibnitz' rule) للمشتقة من الرتبة n لحاصل ضرب دالتين:

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}(x).$$

أوجد المشتقة السادسة للدالة

$$\phi(x)=x^8\sin x$$

12. افرض أن n عدد طبيعي فردي وأن

$$f(x)=\left|x^n\right|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

احسب $f^{(m)}(x)$ لأي $m<n$ وبين أن $f^{(n)}(0)$ غير موجودة.

ماذا يمكن أن نقول عن الحالة التي تكون فيها n زوجية؟

6.2 نظرية القيمة المتوسطة

تعرَّف القارئ في الفصل السابق على مفهوم القيم القصوى للدالة على مجال معروف سلفاً. تسمى مثل تلك القيم قيماً قصوى مطلقة، وذلك لتمييزها عن نوع آخر من القيم القصوى نبدأ هذا البند بتعريفه.

تعريف 6.2

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ نقول إن للدالة f **قيمة عظمى محلية** (local maximum) عند $c\in D$ إذا وجد جوار $U=(c-\delta,c+\delta)$ للنقطة c بحيث

$$f(x)\le f(c)\quad \forall\, x\in U\cap D.$$

كما نقول إن لها **قيمة صغرى محلية** (local minimum) عند $c\in D$ إذا وجد جوار $U=(c-\delta,c+\delta)$ للنقطة c بحيث

$$f(x)\ge f(c)\quad \forall\, x\in U\cap D.$$

بالرجوع إلى التعريف 5.3 نستنتج أن القيمة العظمى(الصغرى) المطلقة للدالة هي قيمة عظمى (صغرى) محلية، ولكن العكس غير صحيح كما هو واضح من الشكل 6.4.

كذلك إذا افترضنا أن g متناقصة فعلاً فإن

$$\frac{g(x)-g(b)}{x-b}<0 \quad \forall x\in(a,b)$$

مما يعني أن $g'(b)\le 0$، الأمر الذي يناقض كون

$$g'(b)=f'(b)-\lambda>0.$$

إذن لا بد من وجود $c\in(a,b)$ بحيث $g'(c)=0$. □

نستنتج من نظرية داربو أن ليس كل دالة صالحة لأن تكون مشتقة لدالة أخرى. فالدالة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

على سبيل المثال ليست مشتقة لأي دالة على أي جوار للصفر، وذلك لعجزها عن تحقيق الخاصة البينية على ذلك الجوار.

تمارين 6.2

1. عرف دالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث تكون متصلة على $[0,1]$، وقابلة للاشتقاق على $(0,1)$، وتحقق $f(0)=f(1)=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 وعند 1. أوجد النقطة $c\in(0,1)$ التي تحقق $f'(c)=0$.
2. أعط مثالاً يوضح أن عدم وجود $f'(x)$ عند نقطة ما x في (a,b) يخل بنظرية القيمة المتوسطة.
3. قرر فيما يلي ما إذا كانت الدالة f تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة، وعين c في تلك الحالة. إذا كانت f لا تحقق النظرية فاذكر

سبباً لذلك

(i) $f(x)=x^3$ على $[-1,1]$

(ii) $f(x)=|x|$ على $[-1,1]$

(iii) $f(x)=|x|\cdot x$ على $[-1,1]$

(iv) $f(x)=|x|^3$ على $[-1,2]$

(v) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ على $[-1,2]$

(vi) $f(x)=\begin{cases}1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ على $[0,1]$

(vii) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ على $[-1,2]$

4. أثبت أن $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

5. إذا كانت $f''(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$ فأثبت أن f دالة خطية على (a,b)، أي أن هناك ثابتين c_1,c_2 بحيث

$$f(x)=c_1x+c_2 \quad \forall\, x\in(a,b)$$

ماذا يمكن أن تقول عن f لو كانت $f'''(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$؟

6. بين أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تحقق $f'(0)>0$، ولكنها غير متزايدة على أي جوار للنقطة $x=0$. (قارن هذه النتيجة بنظرية 6.9).

7. أثبت ما يلي:

(i) $x<\tan x \quad \forall\, x\in(0,\pi/2)$

(ii) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ فإن f متزايدة على $(0,\pi/2)$

(iii) $x\leq(\pi/2)\sin x \quad \forall x\in[0,\pi/2]$

(iv) $\sqrt{1+x}\leq 1+\dfrac{1}{2}x \quad \forall x>0$

8. إذا كانت كل من f، g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وكانت

$$f'(x)<g'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

فأثبت أن لكل $a\in\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x)-f(a)\leq g(x)-g(a) \quad \forall x\in[a,\infty).$$

9. افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $1\leq f'(x)\leq 2$ لكل $x\in\mathbb{R}$. إذا كانت $f(0)=0$ فأثبت أن $|x|\leq|f(x)|\leq 2|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

10. افرض أن $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وأن f' محدودة على (a,b).

(i) أثبت أن f تحقق شرط ليبشتز على (a,b)، أي أنه يوجد $K\in\mathbb{R}$ بحيث

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y| \quad \forall x,y\in(a,b).$$

استنتج أن f متصلة بانتظام.

(ii) أعط مثالاً لدالة $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ومتصلة بانتظام ولكنها لا تحقق شرط ليبشتز.

(iii) هل الدالة المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالشكل $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ بحيث $f(0)=0$ منتظمة الاتصال على $\mathbb{R}$؟

11. لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ موجودة وتساوي ℓ فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند a

وأن $f'(a)=\ell$.

12. أوجـــد القيم القصوى المحلية لكل من الدوال التالية وحدد الفترات التي تكون عليها الدالة متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة:

(i) $f(x)=3x-4x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(ii) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=x+\dfrac{1}{x} \quad \forall x\neq 0$

13. حـــدد الـــنقاط الـــتي تأخذ عندها الدوال التالية قيمها القصوى على الفترات المعطاة:

(i) $f(x)=\left|x^2-4\right|$ على $[-3,4]$

(ii) $g(x)=1+x^{2/3}$ على $[-2,1]$

(iii) $h(x)=x\left|x^2-1\right|$ على $[-2,2]$

14. افـــرض أن f متصلة على $[0,\infty)$ وقابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$. إذا كانت f' متـــزايدة علـــى $(0,\infty)$ و $f(0)=0$ فأثبت أن الدالة $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ متـــزايدة على $(0,\infty)$. [إرشاد: احسب $g'(x)$ وطبق نظرية القيمة المتوسطة على f في فترة مناسبة].

15. علـــــى افتـــــراض أن $0<a<b$ وأن $n\in\{2,3,4,\cdots\}$، أثـــــبت أن $b^{1/n}-a^{1/n}<(b-a)^{1/n}$. [إرشاد: بيِّن أن الدالة $f(x)=x^{1/n}-(x-1)^{1/n}$ متناقصة على $[1,\infty)$ واحسب $f(1)$، $f(b/a)$].

16. افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $f(0)=0$، $f(1)=f(2)=-1$.
أثبت وجود c_1، c_2، c_3 في $(0,2)$ بحيث

(i) $f'(c_1) = -1/2$

(ii) $f'(c_2) = -3/4$

(iii) $f'(c_3) = -1/11$.

17. افرض أن c نقطة حرجة للدالة f وأن f' قابلة للاشتقاق في جوار c. أثبت ما يلي:

(i) إذا كانت $f''(c) > 0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية.

(ii) إذا كانت $f''(c) < 0$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية.

هـــذه النتـــيجة تعـــرف باسم **اختبار المشتقة الثانية لتصنيف النقاط الحرجة.**

(iii) أعـــط أمثلة تبين أنه إذا كانت $f''(c) = 0$ فإن $f(c)$ قد تكون قيمة صغرى محلية، أو قيمة عظمى محلية، أو ليست أياً منهما.

6.3 قاعدة لوبيتال

عندما يكون لكل من الدالتين f و g نهاية عند النقطة c

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell, \quad \lim_{x\to c} g(x) = m$$

فقد وجدنا أن

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m} \tag{6.7}$$

بشرط أن $m \neq 0$. أما إذا كان $m = 0$ فهناك احتمالان:

(i) إما أن $\ell \neq 0$ فلا يكون للنهاية (6.7) وجود في $\mathbb{R}$.

(ii) أو أن $\ell = 0$ وعـــندئذ قـــد تكون النهاية $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ موجودة، مثل

تمارين 6.3

1. إذا كانـــت $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ موجـــودة في $\mathbb{R}$، وكانت $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$.

2. أوجـــد دالـــتين f، g قابلتين للاشتقاق على $(0,\infty)$ بحيث $g(x)\neq 0$ لكل $x\in(0,\infty)$، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$، ولكن النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة في $\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

3. عرف دالتين f، g في جوار الصفر بحيث $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ولكن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة.

4. احسب النهايات التالية

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin x-x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-\dfrac{1}{x}}$

5. احسب النهايات التالية:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log(x+1)}{\sin x}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{x}$

(iii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$

(iv) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$

6. احسب النهايات التالية:

(i) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

(ii) $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

(iii) $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{Arctan} x}\right)$

(iv) $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x)$

6.4 نظرية تيلور

إلى جانـــب النظرية 6.13 فإن لنظرية القيمة المتوسطة تعميماً في اتجاه آخر يستند إلى المشتقات العليا. لتكن f كثيرة حدود من الدرجة n.

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

عندئذ، باشتقاق f عدد k من المرات ووضع $x=0$، نحصل على

$$a_0=f(0),\ a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\ k=1,\cdots,n.$$

وبصفة أعم، إذا كانت

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

فإن

$$a_0=f(x_0),\ a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

وعليه توجد $\delta > 0$ بحيث

$$\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^m} > 0 \quad x \in (c-\delta, c+\delta)\backslash\{c\} \qquad (6.15)$$

فنستنتج من ذلك أن

$$f(x)-f(c) > 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta) \qquad (6.16)$$

$$f(x)-f(c) < 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c) \qquad (6.17)$$

مـــن (6.16) يتضح أن $f(c)$ ليست قيمة عظمى محلية، ومن (6.17) يتضح أنها ليست قيمة صغرى محلية.

(ii) لـــيكن m عـــدداً زوجياً ولنفرض أن $f^{(m)}(c) > 0$. عندئذ نستنتج من (6.15) أن

$$f(x)-f(c) \geq 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$$

وتكون $f(c)$ قيمة صغرى محلية. أما إذا كانت $f^{(m)}(c) < 0$ فإن $-f(c)$ تكـــون قيمة صغرى محلية للدالة $-f$، مما يعني أن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f. □

6.4 تمارين

1. استخدم نظرية تيلور بالرتبة $n=2$ للحصول على تقريب مناسب لكل من

(i) $\sqrt[3]{1.2}$.

(ii) $\sqrt{0.9}$.

2. أثـــبت أن باقي تيلور للدالة $f(x)=\sin x$ في الصيغة (6.11) يقترب من 0 عندما $n \to \infty$ لأي x_0 و x في $\mathbb{R}$.

3. أثبت أن

$$\left|\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right|<\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ثم استخدم هذه المتباينة لتقريب $\log 1.3$ بحيث لا يتعدى الخطأ 0.001

4. قـــرب الدالة $\cos x$ على الفترة $[-1,1]$ بكثيرة حدود من الدرجة السادسة. قدِّر حدود الخطأ في هذا التقريب.

5. اســـتخدم النتيجة 6.18 لتحديد ما إذا كانت $f(0)$ قيمة قصوى للدالة f في كل من الحالات التالية:

(i) $f(x)=\cos x-1$

(ii) $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$

(iii) $f(x)=x\sin x$

6. لتكن

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

أثـــبت أن f قابلة للاشتقاق أي عدد من المرات على $\mathbb{R}$ وأن $f^{(k)}(0)=0$ لكل $k\in\mathbb{N}$. استنتج أن $R_n(x)\not\to 0$ لأي $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

الثلاثاء ٦/٥

$A \subset \mathbb{R}$

$\sup A \longrightarrow$

① حد علوي للمجموعة A

$\forall x \in A \quad x \leq \sup A$

② $\sup A$ أصغر حد علوي

إذا كان u حد علوي لـ A $\Longrightarrow \sup A \leq u$

أو بطريقة أخرى

$\forall \varepsilon > 0 \quad \sup A - \varepsilon < \sup A$

ليس حد علوي لـ A

$\Longrightarrow \exists a_0 \in A \quad a_0 > \sup A - \varepsilon$

$\operatorname{Inf} A \longrightarrow$

① حد سفلي للمجموعة A

$\forall x \in A \quad x \geq \operatorname{Inf} A$

② $\operatorname{Inf} A$ أكبر حد سفلي

إذا كان u حد سفلي لـ A $\Longrightarrow u \leq \operatorname{Inf} A$

أو بطريقة أخرى:

$\forall \varepsilon > 0$

$\inf A + \varepsilon > \inf A$

ليس حد سفلي

$\Longrightarrow \exists a_0 \in A \quad a_0 < \inf A + \varepsilon$

نتيجة:

$A \subset \mathbb{R}$

(i) u حد علوي لـ A , (ii) $u \in A \Longrightarrow u = \sup A$

من (i): $\operatorname{Sup} A \leq u$

من (ii): $u \leq \operatorname{Sup} A$

$u = \operatorname{Sup} A$ من (i) و (ii)

(ونفس الشيء في حالة $\inf$).

تمرين ص ٧٨

3

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow \underbrace{x \leq \operatorname{Sup} B}_{\text{حد علوي لـ } A} \Rightarrow \operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Sup} B$$

نبرهن: A, B محدودتان من أسفل

$$\inf A \geq \inf B$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \geq \inf B$$

$\inf B$ حد سفلي للمجموعة A

$$\inf B \leq \inf A$$

أكبر حد سفلي   حد سفلي

$$A, B \subset \mathbb{R}$$

A, B محدودتان من أعلى $\overset{?}{\Rightarrow}$ $A \cup B$ محدودة من أعلى (1).

(2). $\operatorname{Sup}(A \cup B) = \max\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$

$\exists K \quad \forall x \in A \quad x \leq K$

$\exists M \quad \forall y \in B \quad y \leq M$

$\forall z \in (A \cup B) \Rightarrow z \in A \Longrightarrow z \leq K$

$z \in B \Longrightarrow z \leq M$

$\Rightarrow z \leq \max\{K, M\}$

$\Leftarrow$ $A \cup B$ محدودة من أعلى

$\Leftarrow$ $Sup(A \cup B)$ متواجدة

(I) $\forall x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B) \Rightarrow x \leq Sup(A \cup B)$

$\forall y \in B \Rightarrow y \in (A \cup B) \Rightarrow y \leq Sup(A \cup B)$

$\Rightarrow$ $Sup(A \cup B)$ حد علوي لـ A $\Rightarrow Sup A \leq Sup(A \cup B)$

$Sup(A \cup B)$ حد علوي لـ B $\Rightarrow Sup B \leq Sup(A \cup B)$

$\Rightarrow \max\{\sup A, \sup B\} \leq Sup(A \cup B) \longrightarrow (1)$

(II)

$\forall z \in (A \cup B)$ → $z \in A \Rightarrow z \leq Sup A$; → $z \in B \Rightarrow z \leq Sup B$

$\Rightarrow z \leq \max\{Sup A, Sup B\}$

$\max\{Sup A, Sup B\}$: حد علوي لـ $(A \cup B)$

$\Longrightarrow Sup(A \cup B) \leq \max\{Sup A, Sup B\} \longrightarrow (2)$

من (1) و (2)

$$\operatorname{Sup}(A\cup B) = \max\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$$

واجب : A, B محدودتان من أسفل

$\Leftarrow$ $(A\cup B)$ محدودة من أسفل

$$\inf(A\cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

نتيجة : $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq x < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}:$

$$\Longrightarrow \boxed{x = 0}$$

5. $A, B \subset \mathbb{R}$ محدودتان من أعلى (واجب: أسفل)

$$A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$$

$$\operatorname{Sup}(A+B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall a \in A & a \leq K \\ \forall b \in B & b \leq L \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \forall z \in A+B \\ z = a + b \leq K + L \end{array}$$

$(A+B)$ محدودة من أعلى

$\Leftarrow$ $\operatorname{Sup}(A+B)$ متواجدة

$\forall z \in A+B \qquad a \leq \operatorname{Sup} A \ , \ b \leq \operatorname{Sup} B$

$$z = a + b \leq \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$$

$\operatorname{Sup}(A) + \operatorname{Sup} B$ حد علوي لـ $(A+B)$

$$\operatorname{Sup}(A+B) \leq \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$$

$$\boxed{0 \leq \operatorname{Sup}(A) + \operatorname{Sup} B - \operatorname{Sup}(A+B)} \longrightarrow (1)$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad \operatorname{Sup} A - \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \exists\, a_0 \in A \quad a_0 > \operatorname{Sup} A + \frac{\varepsilon}{2}$

ليس حد علوي ل A :

$\operatorname{Sup} B - \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \exists\, b_0 \in B \quad b_0 > \operatorname{Sup} B - \frac{\varepsilon}{2}$

ليس حد علوي لـ B

$$\operatorname{Sup}(A+B) \geq \underbrace{a_0 + b_0}_{\in A+B} > \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$$

$$\operatorname{Sup}(A+B) > \operatorname{Sup}(A) + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$$

$$\boxed{\operatorname{Sup}(A) + \operatorname{Sup}(B) - \operatorname{Sup}(A+B) < \varepsilon} \longrightarrow (2)$$

$$0 \leq \operatorname{Sup}(A) + \operatorname{Sup}(B) - \operatorname{Sup}(A+B) < \varepsilon$$

$$\operatorname{Sup}(A) + \operatorname{Sup} B - \operatorname{Sup}(A+B) = 0$$

$$\boxed{\operatorname{Sup}(A+B) = \operatorname{Sup}(A) + \operatorname{Sup}(B)}$$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ $\qquad kA = \{ka \mid a \in A\}$

① $k > 0$

$\sup(kA) = k \sup(A)$ ✓ واجب

$\inf(kA) = k \inf(A)$

② $k < 0$

$\sup(kA) = k \inf A$

$\inf(kA) = k \sup A$ ✓ واجب

$k > 0 \qquad \inf(kA) = k \inf A$

$\forall x \in kA$

$x = ka \Rightarrow a = \frac{x}{k} \in A$

$\frac{x}{k} \geq \inf A \qquad \forall k > 0$

$x \geq k \inf A$

$k \inf A$ حد سفلي لـ kA

$\Longrightarrow k \inf A \leq \inf(kA)$

$\inf(kA) - k \inf A \geq 0 \longrightarrow (1)$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \inf A + \frac{\varepsilon}{k} > \inf A$

$\frac{\varepsilon}{k} > 0$

$\inf A + \frac{\varepsilon}{k}$ ليست حداً سفلياً لـ A

$\exists a_0 \in A \qquad a_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{k} \qquad k > 0$

$\underbrace{ka_0}_{\in kA} < k \inf A + \varepsilon$

$\inf(kA) \leq ka_0 \in kA$

$\inf(kA) < k \inf A + \varepsilon$

$\inf(kA) - k \inf A < \varepsilon \longrightarrow (2)$

(1), (2)

$0 \leq \inf(kA) - k \inf A < \varepsilon$

$\Longrightarrow \inf(kA) - k \inf A = 0$

$\inf(kA) = k \inf(A)$

$k < 0 \quad \sup(kA) = k \inf A$

$\forall x \in kA \qquad x = ka$

$a = \frac{x}{k} \in A \Rightarrow \frac{x}{k} \geq \inf A \qquad \times \quad k < 0$

$x \leq k \inf A$

$k \inf A$ حد علوي للمجموعة kA

$\Rightarrow \sup(kA) \leq k \inf A$

$0 \leq k \inf A - \sup(kA) \longrightarrow (1)$

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \frac{\varepsilon}{k} < 0 \qquad\qquad (k<0)$

$$-\frac{\varepsilon}{k} > 0$$

$$\inf A - \frac{\varepsilon}{k} > \inf A$$

$\inf A - \frac{\varepsilon}{k}$ ليس حداً سفلياً لـ A

$\Longrightarrow \exists\, a_0 \in A \qquad a_0 < \inf A - \frac{\varepsilon}{k} \qquad \times (k<0)$

$$\underset{\in kA}{k a_0} > k \inf A - \varepsilon$$

$$\sup(kA) \geq k a_0 > k \inf A - \varepsilon$$

$k \inf A - \sup(kA) < \varepsilon \qquad \longrightarrow (2)$

$$0 \leq k \inf A - \sup(kA) < \varepsilon$$

$$k \inf A - \sup(kA) = 0$$

$$\sup(kA) = k \inf A$$

$x \in \mathbb{Q} \quad , \quad y \notin \mathbb{Q} \longrightarrow x+y \notin \mathbb{Q}$

$z = x+y$ نفرض $z \in \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow y = z - x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow y \notin \mathbb{Q}$ وهذا يناقض أن

$x \in \mathbb{Q} \, , \, y \notin \mathbb{Q} \longrightarrow x \cdot y \notin \mathbb{Q}$

$z = x \cdot y$ نفرض $z \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow y = \frac{z}{x} \in \mathbb{Q} \quad (x \neq 0)$

$\Rightarrow y \notin \mathbb{Q}$ يناقض كون

$x = 0 \, , \, \forall y \notin \mathbb{Q} \quad x \cdot y = 0 \in \mathbb{Q}$

4). $x > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}$

$nx > y$ بحيث

$y \leq 0$

$x > y$

$nx > y$ لما $n \in \mathbb{N}$

البرهان بالتناقض

$nx \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N}$ نفرض أن

$A = \{ nx , n \in \mathbb{N} \}$

A محدودة من أعلى بـ y

$\Longrightarrow \sup A = \alpha$ متواجدة

$$nx = \underbrace{(n+1)x}_{\in A} - x \leq \sup A - x$$

$$nx \leq \alpha - x$$

∴ $\alpha - x$ حد علوي لـ A

$$\alpha \leq \alpha - x$$

حد علوي لـ A اصغر حد علوي لـ A

$\Rightarrow \quad x \leq 0$

وهذا يناقض أن $x > 0$

9). $X, Y \neq \Phi$

i). $X \cup Y = \mathbb{R}$

ii). $x \in X,\ y \in Y \Rightarrow x < y \quad (\Rightarrow X \cap Y = \Phi)$

?? $\exists\, c \in \mathbb{R}$

$z < c \Rightarrow z \in X$

$z > c \Rightarrow z \in Y$

$\because\ \forall x \in X,\ y \in Y \quad x < y$

$\therefore\ \forall y \in Y$ ، y حد علوي لـ X

$\Leftarrow$ X محدودة من أعلى

$\Leftarrow$ $\operatorname{Sup} X$ موجود ولتكن $\operatorname{Sup} X = c$

$\forall z < c \Rightarrow z \in X$

لأنه c حد علوي لـ X

$\forall z > c \Rightarrow z \in Y$

لأنه إذا كان $z \in X$ ، $z < c$

تناقض لأن $\operatorname{Sup} X = c$

طريقة أخرى

$\forall x \in X,\ y \in Y$

$x < y$

$\forall x \in X$ حد سفلي لـ Y

Y محدودة من أسفل $\Leftarrow$ $\operatorname{Inf} Y = c$

$z < c \Rightarrow z \in X$

$z > c \Rightarrow z \in Y$

المتتاليات (٣-١) ص ١٠١

① $(5, 8, 11, \ldots)$

$a_1 = 5$ d

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$ (الأساس) $d = 3$

متتابعة حسابية

② $(1, \frac{-1}{4}, 9, \frac{-1}{16}, \ldots)$

$$x_n = (-1)^{n+1} (n^2)^{-1^{(n+1)}} = \begin{cases} x_{2n-1} = (2n-1)^2 \\ x_{2n} = \frac{-1}{(2n)^2} \end{cases}$$

③ $\varepsilon = 0.005$

$x_n = \frac{1}{n}$ $\quad l = 0$ $\quad N = ?$

$$|x_n - l| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < 0.005$$

$$\frac{1}{n} < 0.005 = \frac{1}{200}$$

$$200 < n$$

$N = 201$

$|\frac{1}{n} - 0| < 0.005 \qquad n \geq 201$

4/1 $\lim \dfrac{n^3+1}{3n^3+n} = \dfrac{1}{3}$

$|x_n - \ell| = \left| \dfrac{n^3+1}{3n^3+n} - \dfrac{1}{3} \right| = \left| \dfrac{3n^3+3-(3n^3+n)}{3(3n^3+n)} \right|$

$= \left| \dfrac{3-n}{3(3n^3+n)} \right| = \dfrac{|3-n|}{3(3n^3+n)} = \dfrac{(n-3)}{3(3n^3+3)}$ $\quad n \geq 3$

$< \dfrac{n}{3(3n^3+3)} < \dfrac{n}{9n^3}$

$< \dfrac{1}{9n^2} < \dfrac{1}{n}$ $\quad n > 3$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{N_0} < \varepsilon$

$N = \max\{N_0, \varepsilon\}$

$N \geqslant N_0$

$n \geqslant N \geqslant N_0$

$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \dfrac{1}{N_0} < \varepsilon$

$\left| x_n - \dfrac{1}{3} \right| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N = \max\{N_0, \varepsilon\}$

$x_n \longrightarrow \dfrac{1}{3}$

---

6) $x_n \longrightarrow z \qquad y_n \longrightarrow z$

$Z_n = \begin{cases} x_n & n \text{ فردية} \\ y_n & n \text{ زوجية} \end{cases}$

$$Z_n \longrightarrow z \;?$$

$x_n \longrightarrow z$ $\qquad$ $y_n \longrightarrow z$

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N_1, N_2$

$|x_n - z| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_1$

$|y_n - z| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_2$

$$|Z_n - z| = \begin{cases} |x_n - z| < \varepsilon & \forall\, n \geq N_1 \quad (\text{n فردية}) \\ |y_n - z| < \varepsilon & \forall\, n \geq N_2 \quad (\text{n زوجية}) \end{cases}$$

$\therefore\ |Z_n - z| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$\therefore\ Z_n \longrightarrow z$

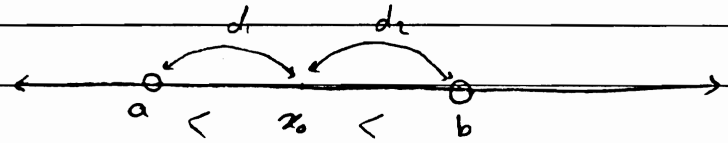
---

(1) الجوار neighbourhood

جوار x_0 $\longrightarrow$ (a, b) إذا وجد $\varepsilon > 0$

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$

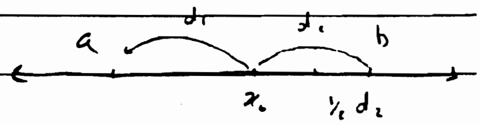
(7) اثبت ان (a, b) جوار لكل نقطة x_0 تقع داخلها



$\therefore$

$d_1 = |x_0 - a| = x_0 - a$

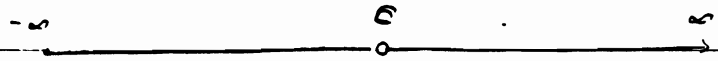
$d_2 = |x_0 - b| = b - x_0$



$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{d_1, d_2\}$

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$

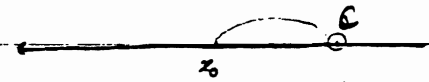
(8). $c \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{c\}$



$\mathbb{R} \setminus \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty)$.

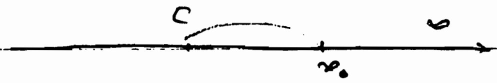
$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$
$(x_0 \neq c)$

$x_0 \in (-\infty, c)$



$\varepsilon = \frac{1}{2} |x_0 - c|$

$x_0 \in (c, \infty)$



$\varepsilon = \frac{1}{2} |x_0 - c|$

∴ من (7) : $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ جوار لكل $x_0 \neq c$

تمارين (٣-٢) ص ١١٢

متتابعة الذيل

$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots$

$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$

$(x_n) \Longrightarrow (x_{k+n})$

$x_n \to l \Longrightarrow x_{k+n} \to l$

متباعدة $x_n \Longrightarrow x_{k+n}$ متباعدة

$x_n \to l \neq 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad x_k \neq 0 \quad \forall n \geq k$

$\forall \varepsilon>0$ يوجد $k\in\mathbb{N}$ بحيث $n\geq k$ $\quad |x_n-l|<\varepsilon$

نثبت أن $\quad |x_n|>0 \Rightarrow |x_n|\neq 0 \Leftrightarrow x_n\neq 0$

$$|l|-|x_n| < |x_n-l| < \varepsilon \qquad \forall n\geq k$$

$$|l|-|x_n|<\varepsilon \qquad \forall n\geq k$$

$$|l|-\varepsilon < |x_n| \qquad \forall n\geq k$$

$$\because l\neq 0 \Rightarrow |l|>0 \Rightarrow \varepsilon=\tfrac{1}{2}|l|>0$$

$$|l|-\tfrac{1}{2}|l| = |l|-\varepsilon < |x_n|$$

$$0<\tfrac{1}{2}l<|x_n| \qquad \forall n\geq k$$

$$|x_n|\neq 0 \qquad \forall n\geq k$$

① (1) $\displaystyle x_n=\frac{(-1)^n\, n}{2n+1} = y_n \cdot z_n$

$$y_n=(-1)^n \qquad z_n=\frac{n}{2n+1}\longrightarrow \frac{1}{2}$$

البرهان بالتناقض

نفرض أن x_n متقاربة $\quad x_n \longrightarrow l$

$$y_n=\frac{x_n}{z_n} \qquad x_n\longrightarrow l,\quad z_n\longrightarrow \tfrac{1}{2}\neq 0$$

$\longrightarrow$ y_n متقاربة

(وهذا يناقض أن y_n متذبذبة)

$x_n \to \frac{1}{2}$ زوجي

$x_n \to -\frac{1}{2}$ فردي

ملاحظة :

$$x_n = (-1)^n \left(\frac{n}{n^2+1} \right)$$

$x_n = (-1)^n y_n$

$y_n \to l \neq 0$: x_n متباعدة

$y_n \to 0$: x_n متقاربة $\to 0$

نظرية :

$x_n \to 0$, (y_n) محدودة $\Longrightarrow x_n \cdot y_n \to 0$

---

x_n متباعدة , y_n متباعدة $\xRightarrow{\text{مثال}}$ $(x_n + y_n)$ متقاربة

$x_n = n$ متباعدة $(\to \infty)$

$y_n = \frac{1}{n} - n$ متباعدة $(\to -\infty)$

$x_n + y_n = \frac{1}{n} \to 0$: متقاربة

x_n متباعدة , y_n متباعدة $\xRightarrow{\text{مثال}}$ $x_n \cdot y_n$ متقاربة

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1} \quad , \quad y_n = (-1)^n$$

$$x_n \cdot y_n = \frac{n}{2n+1} \longrightarrow \tfrac{1}{2}$$

متقاربة $x_n \longrightarrow l$

متقاربة $x_n + y_n \longrightarrow m$

$$y_n = (y_n + x_n) - x_n \longrightarrow m - l$$

متقاربة

متقاربة x_n $\quad x_n y_n$ متقاربة $\Longrightarrow$ متقاربة y_n (الحالة العامة، الاجابة لا)

الشرط $\boxed{l \neq 0}$

(i) $x_n \neq 0$

$$y_n = \frac{y_n x_n}{x_n} \longrightarrow \frac{m}{l}$$

(ii) $x_n = 0$

$l \neq 0 \rightarrow x_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

$\{y_n\}$ تكون متقاربة. متتابعة الذيل $x_{k+n} \neq 0 \quad \forall n$

$x_{k+n} \longrightarrow l$

$$y_{k+n} = \frac{x_{k+n} \, y_{k+n}}{x_{k+n}} \longrightarrow \frac{m}{l \neq 0}$$

$\frac{m}{l}$ متقاربة $(y_n) \Longleftarrow \frac{m}{l}$ متقاربة الى (y_{k+n})

$0 < a < b$

$x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \longrightarrow b$

$a^n + b^n = b^n \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)$ (1)

$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{b^n \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)} = b\sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)}$

$c = \frac{a}{b} < 1$

$c^n \longrightarrow 1$

$= b \sqrt[n]{1} = b$

$b^n < a^n + b^n < b^n + b^n = 2b^n$

$b = \sqrt[n]{b^n} < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2b^n} = \underbrace{2^{1/n}\, b}_{\to\, b}$

$\sqrt[n]{a^n + b^n} \longrightarrow b$

$x_n \to l \quad , \quad |x_n| \to l$

$|x_n| \to \alpha \qquad x_n \not\to$ متقاربة

$x_n = (-1)^n$ متباعدة

$|x_n| = |(-1)^n| = 1 \longrightarrow 1$ متقاربة

متقاربة $|x_n| \not\Longrightarrow$ متقاربة x_n

$|x_n| \xrightarrow{\text{متقاربة}} 0 \Longrightarrow x_n \longrightarrow 0$

الثلاثاء ٢/٥

8). $\{x_n\}$, $x_n > 0$

إذا كانت $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$

[illegible]

① إذا $L < 1$: $x_n \longrightarrow 0$

$\because \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \qquad \forall \varepsilon > 0 : \exists N$

$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$

$-\varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} - L < \varepsilon$

$L - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon \qquad 0 < r = L + \varepsilon < 1$

$x_{n+1} < r\, x_n \qquad \forall n \geq N$

$x_{N+1} < r\, x_N$

$x_{N+2} < r\, x_{N+1} < r^2 x_N$

$x_{N+3} < r\, x_{N+2} < r^3 x_N$

$\vdots$

$0 < r < 1 \quad r^n \to 0$

$0 < x_{N+n} < r^n x_N$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

$\therefore \lim x_{N+n} = 0$

$(x_{N+n}) \Rightarrow x_n$ متقاربة إلى الصفر

(II) $L > 1$ $\{x_n\}$ متباعدة

$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$

$L - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon$

$r < \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad \forall\, n \geq N \qquad 1 < L - \varepsilon = r$

$x_{n+1} > r\, x_n \qquad \forall\, n \geq N$

$x_{N+1} > r\, x_N$

$x_{N+2} > r\, x_{N+1} > r^2\, x_N$

$\vdots$

$x_{N+n} > r^n\, x_N \qquad r > 1 \quad r^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

$\{x_{N+n}\}$ غير محدودة

x_{N+n} متباعدة

x_n متباعدة

---

(9) (i) $x_n = \frac{a^n}{3^n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n \qquad a > 0$

* الجزئين (ii)، (iii) واجب

$x_{n+1} = \left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}$

$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$

$$L = \frac{a}{3} \begin{cases} \frac{a}{3} < 1 \longrightarrow \text{تقارب} & a < 3 \quad \checkmark \\ \frac{a}{3} > 1 \longrightarrow \text{تباعد} & a > 3 \quad \times \end{cases}$$

$L = 1\ ? \Rightarrow L = \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$

$x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n = (1)^n = 1 \longrightarrow 1$ متقاربة

(iv) $x_n = \dfrac{a^n}{n^n}$ $\qquad x_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)}$$

$$= a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)}$$

$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to 0} (1+n)^{1/n}$

$$= a \lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= a \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= a \, \frac{1}{e} \cdot 0 = 0 \;\underset{=}{<} 1$$

$$\therefore x_n \longrightarrow 0$$

(الأوساط الحسابية)

$\{x_n\}$

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad ; \quad y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\{x_n\}$ تسمى متقاربة على غرار سيزار ، إذا كانت $\{y_n\}$ متقاربة

نريد إثبات ما يلي :

(I) $x_n \longrightarrow \ell \quad \therefore \quad y_n \longrightarrow \ell$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \ni \quad |x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$|x_N - \ell| < \varepsilon$

$|x_{N+1} - \ell| < \varepsilon$

$\vdots$

$$|y_n - \ell| = \left| \frac{x_1 + x_2 + \text{—} + x_n}{n} - \ell \right|$$

$$= \left| \frac{x_1 + x_2 + \text{—} + x_n - n\ell}{n} \right|$$

$$= \frac{1}{n} \left| \overbrace{(x_1 - \ell) + (x_2 - \ell) + \text{—} + (x_{N-1} - \ell) + (x_N - \ell) + \text{—} + (x_n - \ell)} \right| \qquad n \geq N$$

$$\leq \frac{1}{n} \left[\left(\underbrace{|x_1 - \ell| + |x_2 - \ell| + \text{—} + |x_{N-1} - \ell|}_{(N-1)} \right) + \left(\underbrace{|x_N - \ell| + \text{—} + |x_n - \ell|}_{n-(N-1)} \right) \right]$$

$$< \left[\frac{(|x_1 - \ell| + \text{—} + |x_{N-1} - \ell|}{n} + \frac{(n(N-1))\ \varepsilon}{n} \right] \longrightarrow (1)$$

$\because$ $\{x_n\}$ متقاربة $\Longrightarrow$ محدودة $\{x_n\} \longrightarrow |x_n| \leq K \quad \forall n \quad K > 0$

$|x_1| \leq K$

$|x_2| \leq K$

$\vdots$

$|x_1 - \ell| \leq |x_1| - |\ell| \leq K + \ell = M$

$|x_2 - \ell| \leq |x_2| - |\ell| \leq K + \ell = M$

$$\left[\frac{|x_1 - \ell| + \text{—} + |x_{N-1} - \ell|}{n} \right] \leq \frac{M\,(N-1)}{n} \longrightarrow (2)$$

. واجب. مسألة (!!)

$$\left[\frac{n-(N-1)}{n}\right]\varepsilon = \left[1 - \frac{(N-1)}{n}\right]\varepsilon < 1\cdot\varepsilon = \varepsilon \longrightarrow (3) \quad n \geq N$$

$$(1) \Rightarrow |y_n - \ell| < \left[\left(\frac{|x_1-\ell| + \dots + |x_{N-1} - \ell|}{n}\right) + \left(\frac{n-(N+1)}{n}\right)\varepsilon\right]$$

$$< \left[\frac{M(N-1)}{n} + \varepsilon\right] \qquad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |y_n - \ell| < 2\varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

$$\therefore y_n \longrightarrow \ell$$

$$\frac{M(N-1)}{n} \longrightarrow 0$$

$$\left|\frac{M(N-1)}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{M(N-1)}{n} < \varepsilon$$

Ex. $x_n = (-1)^n$ متباعدة

$$y_n = \begin{cases} y_{2n} = \dfrac{(-1+1)+(-1+1)+\dots}{2n} = 0 \\ y_n \longrightarrow 0 \\ y_{2n+1} = \dfrac{-1}{2n+1} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$x_n = -1, 1, -1, 1, -1, 1$

$$\therefore y_n \longrightarrow 0$$

واجب مسوالد رقم (١) (ع)

Monotone Sequences المتتابعات المطردة

طرق المقارنة لمعرفة الاطراد

1) $x_{n+1} - x_n \lessgtr 0$

2) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \lessgtr 1$

3)
$$x_{n+1} - x_n > 0$$
$$x_n - x_{n-1} > 0$$
$$x_{n+1} - x_n < 0$$
$$x_n - x_{n-1} < 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} > 0}$$

تزايد فعلى أو تناقص فعلى

تمارين ص 123 (٣-٣)

(11)

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \qquad x_1 = 1$$

$$x_2 = \sqrt{3} \simeq 1.7$$

نثبت أن $x_n < 2$ بالاستنتاج الرياضي

(i) $n = 1$ $\quad x_1 = 1 < 2$

(ii) $n = r$ $\quad x_r < 2$ نفرض

(iii) $n = r + 1$

$$x_{r+1} = \sqrt{x_r + 2} < \sqrt{2+2} = 2$$

$$\therefore x_n < 2 \quad \forall n$$

$$0 < x_n < 2$$ محدودة

$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ $\qquad x_1 = 1$

$x_{n+1}^2 = x_n + 2$

$x_n^2 = x_{n-1} + 2$

$x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n - x_{n-1}$

$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = (x_n - x_{n-1})$

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n+1} + x_n} > 0$$

مطردة فعلياً

$x_n \longrightarrow l$

$x_{n+1} \longrightarrow l$

$x_{n+1}^2 = x_n + 2$

$\lim (x_{n+1})^2 = \lim (x_n + 2)$

$l^2 = l + 2$

$l^2 - l - 2 = 0$

$(l - 2)(l + 1) = 0 \implies l = -1 \times \quad , \quad l = 2$

ملاحظة: $\quad A = \{x_n \ , n \in N\}$

x_n محدودة

$\lim x_n = \operatorname{Sup} A$

(iii) $x_{n+1} = \dfrac{4x_n + 2}{x_n + 3}$ $\qquad x_1 = 1 \longrightarrow x_n > 0$

$x_{n+1} = \dfrac{4(x_n + 3) - 10}{x_n + 3}$

$x_{n+1} = 4 - \dfrac{10}{x_n + 3} < 4$

$0 < x_n < 4$

: x_n محدودة

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{4x_n + 2}{x_n + 3} - \dfrac{4x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 3} \gtrless 0$

$x_{n+1} = \dfrac{4x_n + 2}{x_n + 3} = 4 - \dfrac{10}{x_n - 3}$

$x_n = \dfrac{4x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 3} = 4 - \dfrac{10}{x_{n-1} + 3}$

$x_{n+1} - x_n = 10\left[\dfrac{1}{(x_{n-1} + 3)} - \dfrac{1}{(x_n + 3)}\right] = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{(\quad)(\quad)}$

$\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \dfrac{10}{(x_{n-1} + 3)(x_n + 3)} > 0$

: x_n مطردة فعلياً

$x_n \to \ell \quad , \quad x_{n+1} \longrightarrow \ell$

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(\frac{4x_n + 2}{x_n + 3} \right)$$

$$\ell = \frac{4\ell + 2}{\ell + 3}$$

$$\ell^2 + 3\ell = 4\ell + 2$$

$$\Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ell = 2$$

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{(2n^2+2n) + (2n^2+n) - (4n^2+6n+2)}{n\,(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{n\,(2n+1)(2n+2)} < 0$$

∴ تناقصية فعلاً

$x_1 > x_n > 0 \quad \forall n$ محدودة

∴ متقاربة

واجب مسألة (٤) (أ)

③ (x_n) , (y_n)

$$0 < x_1 < y_1$$

وسط هندسي — وسط حسابي

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}} \qquad x_n < y_n$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n \qquad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) < \frac{1}{2}(y_n + y_n)$$

$$\therefore x_{n+1} \geq x_n \qquad y_{n+1} < y_n$$

x_n تزايدية — y_n تناقصية

$$x_1 < x_n \leq y_n \leq y_1$$

$$x_1 \leq x_n \leq y_1 \qquad x_1 \leq y_n \leq y_1$$

x_n محدودة — y_n محدودة

$$x_n \to l \ , \ y_n \to m \Rightarrow y_{n+1} \to m$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \Rightarrow \lim y_{n+1} = \frac{1}{2} \lim (x_n + y_n)$$

$$m = \frac{1}{2}(m + l) \Rightarrow m - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}l \Rightarrow \boxed{m = l}$$

4

(i) $$x_n = \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{2.4.6 \cdots (2n)}$$

$$x_{n+1} = \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2.4.6 \cdots (2n)(2n+2)}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \downarrow$$

x_n محدودة من أسفل ، $x_n > 0 \quad \forall n$

$\therefore$ x_n متقاربة

(ii) $$y_n = (2n+1)\, x_n^2$$

$$y_{n+1} = (2n+3)\, x_{n+1}^2$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = \frac{(2n+3)(2n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)^2}$$

$$= \frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4} < 1$$

$y_{n+1} < y_n \Rightarrow y_n \downarrow$ ، $y_n > 0$ محدودة من أسفل $\Big\} \Rightarrow$ y_n متقاربة $\quad y_n \longrightarrow l$

(iii) y_n متقاربة . $\quad y_n \longrightarrow l$

$$x_n^2 = \frac{y_n}{(2n+1)} = \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{y_n}_{\to l} \longrightarrow 0$$

$$x_n^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow x_n \longrightarrow 0$$

⑤ $A\subset \mathbb{R}$. $A\neq \phi$

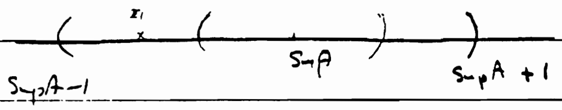
A محدودة من أعلى $\Rightarrow$ ($\sup A$ موجودة)

$\overset{?}{\Longrightarrow} \ \exists (x_n)\uparrow \ , \ x_n\in A \ . \ x_n\in A \ . \ x_n \longrightarrow \sup A$

$\forall \varepsilon>0$

($\sup A-\varepsilon < \sup A$ ليس حد علوي لـ A

$\exists\ a_0 \in A \qquad a_0 > \sup A-\varepsilon$)



$\underline{\varepsilon=1}$ $\quad \sup A-1$ ليس حد علوي لـ $A \Rightarrow \exists\, x_1\in A$

$$\sup A-1 < x_1 < \sup A$$

$\varepsilon=\frac{1}{2} \quad \exists\, x_2\in A \qquad \sup A-\frac{1}{2} < x_2 \le \sup A$

كيف نضمن $x_1 \le x_2$ لأنه $\nexists$ هذا x بحيث $\forall x\in A \ \ x<x_1$

(∴ x_1 حد علوي لـ $A \Leftarrow \sup A \le x_1$

$\underline{\varepsilon=\frac{1}{3}} \qquad \sup A-\frac{1}{3} < x_3 \le \sup A$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x_n \ge x_k \qquad \forall\, k \le n-1$

$\varepsilon=\frac{1}{n} \qquad \sup A-\frac{1}{n} < x_n < \sup A < \sup A+\frac{1}{n}$

$$-\frac{1}{n} < x_n-\sup A < \frac{1}{n}$$

$$|x_n-\sup A| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

: $x_n \longrightarrow \sup A$

$y_n = \sup\{x_k, k \geq n\}$ $\Longleftarrow$ متتالية محدودة (x_n)

$z_n = \inf\{x_k, k \geq n\}$

(I) $(y_n), (z_n)$ متقاربة

(II) $\lim y_n = \lim z_n \Longrightarrow$ متقاربة x_n

واجب (III) $\lim y_n = \lim z_n \Longleftarrow$ متقاربة (x_n)

(I)

$y_1 = \sup\{x_k, k \geq 1\} = \sup\{x_1, x_2, \ldots\}$

$y_2 = \sup\{\ \ k \geq 2\} = \sup\{x_2, \ldots\}$

$y_1 \geq y_2 \geq \ldots$

$y_n \downarrow$

$z_1 = \inf\{x_k, k \geq 1\} = \inf\{x_1, x_2, \ldots\}$

$z_2 = \inf\{x_k, k \geq 2\} = \inf\{x_2, \ldots\}$

$z_1 \leq z_2 \leq \ldots$

$z_n \uparrow$

$z_1 \leq z_n \leq y_n \leq y_1$

$z_1 \leq z_n \leq y_1$, $z_1 \leq y_n \leq y_1$

محدودة z_n محدودة y_n

محدودة y_n , $y_n \downarrow \longrightarrow y_n$ متقاربة

محدودة z_n $z_n \uparrow \longrightarrow z_n$ متقاربة

(II) $x_n \geq Z_n$ $\qquad$ $Z_n = Inf$

$x_n \leq y_n$ $\qquad$ $y_n = Sup$

$$Z_n \leq x_n \leq y_n$$

إذا كان $\quad \lim y_n = \lim Z_n = l$

من الساندوتش $\quad \therefore \lim x_n = l$

$\therefore$ x_n متقاربة

نقط التراكم ونظرية كوشي

مجموعة A ، x_0 نقطة تراكم لـ A

كجوار لـ x_0 لابد أن يحوي على عدد غير منتهي من عناصر A $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A , \; a \neq 0$

بحيث $a \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A$

$\Downarrow$

أي أي مجموعة منتهية ليس لها نقاط تراكم

(2)

$A \subset B \Longrightarrow \hat{A} \subset \hat{B}$

$\forall y_0 \in \hat{A} \Longrightarrow$ y_0 نقطة تراكم لـ A $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in A \subset B$

$b \neq y_0$

$b \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\hat{\mathbb{N}} \subset \hat{\mathbb{Z}} = \phi$ $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in B$

$\hat{\mathbb{N}} = \phi$

$b \neq y_0$

$b \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \Longrightarrow y_0 \in \hat{B}$

(4)

(I) $\widehat{(A \cup B)} = \hat{A} \cup \hat{B}$

(i) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ $\Longrightarrow$ $\hat{A} \subset \widehat{A \cup B}$, $\hat{B} \subset \widehat{A \cup B}$

$\Longrightarrow \hat{A} \cup \hat{B} \subset \widehat{(A \cup B)} \longrightarrow (1)$

(ii) $\forall x_0 \in \widehat{(A \cup B)}$

x_0 نقطة تراكم لـ $(A \cup B)$

$\therefore \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_0 \in A \cup B$

$y_0 \neq x_0$

$$y_0 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

or

$y_0 \in A$ $\qquad\qquad$ $y_0 \in B$

$y_0 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $\qquad\qquad$ $y_0 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$y_0 \in \hat{A}$ $\qquad\qquad$ $y_0 \in \hat{B}$

$$y_0 \in \hat{A} \cup \hat{B} \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) $\qquad$ $\widehat{(A \cup B)} = \hat{A} \cup \hat{B}$

II $\quad \widehat{(A \cap B)} \subset \hat{A} \cap \hat{B}$

$\forall\, \alpha \in \widehat{(A \cap B)}$

$\Rightarrow$ α نقطة تراكم لـ $(A \cap B)$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x \in A \cap B$

$x \neq \alpha$

$x \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$

and

$\alpha \neq x \in A$ $\qquad\qquad$ $\alpha \neq x \in B$

$x \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$

$\alpha \in \hat{A}$ $\qquad\qquad$ $\alpha \in \hat{B}$

$$\alpha \in (\hat{A} \cap \hat{B})$$

① (i) $A = [0,1) \cup (3,4) \cup (5,6]$

$\hat{A} = [\hat{0},1) \cup (\hat{3},4) \cup (\hat{5},6]$

$\hat{A} = [0,1] \cup [3,4] \cup [5,6]$

(iii) $A = \{3^n + \frac{1}{k},\ n, k \in \mathbb{N}\}$ $\qquad 3 + \frac{1}{k} \longrightarrow 3$

$3^2 + \frac{1}{k} \longrightarrow 3^2$

$\hat{A} = \{3^n,\ n \in \mathbb{N}\}$

$$A = \begin{cases} 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \quad \cdots \quad \frac{2n}{2n+1} \longrightarrow 1 \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \quad \cdots \quad \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$\hat{A} = \{0, 1\}$ مكونة من نقطتي تراكم

⑤ $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ محدودة من أعلى} \\ \operatorname{Sup} A \notin A \end{array}\right\} \operatorname{Sup} A \in \hat{A}$$

Ⓘ $\exists (x_n)\ x_n \in A \Leftarrow$ A محدودة من أعلى

$x_n \longrightarrow \operatorname{Sup} A$

Ⓘⓘ ?? $\operatorname{Sup} A \in \hat{A}$

$\Leftrightarrow$ (x_n) متتابعة ذات عناصر مختلفة

اذا كانت A منتهية $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$

$u=\sup A \Rightarrow u\in A$, u هو عنصر ل A $\Rightarrow u=\max\{\}$

A تكون غير منتهية $\Longleftrightarrow$

A حتماً لابد أن تكون غير منتهية (لأنه اذا كانت A منتهية $\Rightarrow \sup A\in A$)

6

$J_n=(0,\frac{1}{n})$

$\bigcap J_n=(0,\frac{1}{n})=\phi$

السؤال الثاني ٥/٦

(x_n) , (y_n) كوشي

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 , N_2$

$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N_1$

$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N_2$

$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)|$

$< |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall n \geq N_1 , N_2$

$\therefore |(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N = \max\{N_1 , N_2\}$

$|x_n$

$x_{n+1} = x_n(2-x_n) \qquad 0 < x_1 < 1$

اثبت أن

① $0 < x_n < 1$

② x_n متقاربة

③ $\lim x_n$

① $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n = -[x_n^2 - 2x_n]$

$= -[(x_n-1)^2 - 1]$

$x_{n+1} = [1-(1-x_n)^2] \longrightarrow (*)$

(i) $n=1 \qquad 0 < x_1 < 1$

(ii) $n=r$ نفرض $\Rightarrow 0 < x_r < 1$

(iii) $n=r+1$

$x_{r+1} = 1-(1-x_r)^2$

من الفرض $0<x_r<1 \Rightarrow 0<(1-x_r)<1 \Rightarrow 0<(1-x_r)^2<1$

$\Rightarrow 0 < \underbrace{1-(1-x_r)^2}_{x_{r+1}} < 1$

$0 < x_n < 1.$

②

من (1) x_n محدودة $0 < x_n < 1$

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$$

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_n^2 = \underset{>0}{x_n}\,(1 - \underset{<0}{\underbrace{x_n}}) > 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_{n+1} > x_n$$

$x_n \uparrow$ ∴

محدودة x_n ⟹ متقاربة x_n

(iii) $x_n \longrightarrow l$, ∴ $x_{n+1} \longrightarrow l$

$$\lim x_{n+1} = \lim (2x_n - x_n^2)$$

$$l = 2l - l^2 \Longrightarrow l^2 - l = 0$$

$$l(l-1) = 0$$

$$\Longrightarrow \underset{\times}{l = 0} \quad , \quad l = 1$$

لأن $\{x_n\}$ متزايدة

$$1 = \sup\{x_n , n \in \mathbb{N}\}$$

المتواليات الجزئية.

متتابعة (متتالية) ليس لها متتاليات جزئية متقاربة

(نختار x_n غير محدودة مثلاً $x_n = n$)

متتالية غير محدودة بحيث تحتوي على متتالية جزئية متقاربة

مثال

$$x_n = \begin{cases} x_{2n-1} = 1 & \text{متقاربة} \\ x_{2n} = 2n & \text{غير محدودة} \end{cases}$$

$1, 2, 1, 4, 1, 6,$

نلاحظ المتتالية الجزئية x_{2n-1} متقاربة

(x_n) متتابعة بحيث:

لكل متتالية جزئية (x_{n_k}) تحتوي على متتالية جزئية $(x_{n_{k_j}})$

$x_{n_{k_j}} \longrightarrow 0$

اثبت ان $x_n \longrightarrow 0$

x_n:

x_{n_k} متتا.

$x_{n_k} \to l$ جزئية

$x_{n_{k_j}} \to 0$

$x_{n_k} \to 0$

: كل متتالية جزئية من (x_n) هي متتابعة $\to 0$

$x_n \longrightarrow 0$:

x_n

ليست متقاربة

x_{n_k}

لها متتالية جزئية $x_{n_{k_j}} \longrightarrow 0$

$\Downarrow$

$x_{n_{k_j}}$ متتالية جزئية من x_n

$\longrightarrow 0$

$\therefore x_n \longrightarrow 0$

برهان آخر: نفرض $x_n \longrightarrow l \neq 0$

$x_{n_{k_j}} \longrightarrow l \neq 0 \Longrightarrow x_{n_{k_j}}$ متتالية جزئية من $x_n \Longrightarrow x_{n_k}$ متتالية جزئية $(x_{n_{k_j}})$

وهذا يناقض أن $x_{n_{k_j}} \longrightarrow 0$

③ $x_n \geqslant 0$

$\{(-1)^n x_n\}$ متقاربة $\Longrightarrow$ لابد أن تكون متقاربة $x_n \Longrightarrow \lim x_n = ?$

$x_n \longrightarrow l$
$|x_n| \longrightarrow |l|$

$y_n = (-1)^n x_n \longrightarrow l$

$|y_n| = |(-1)^n x_n| = \underbrace{|x_n|}_{= x_n} \xrightarrow[x_n \geqslant 0]{} |l|$

$\therefore x_n$ متقاربة

حيث أن $l = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y_{2n} \longrightarrow l \\ y_{2n-1} \longrightarrow -l \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} l = -l \\ 2l = 0 \Rightarrow \underline{l = 0} \end{array}$$

برهان آخر بالتناقض نفرض أن $l \neq 0$

$y_n \longrightarrow$ متقاربة

$x_n \longrightarrow l \neq 0$

$$(-1)^n = \frac{y_n \longrightarrow \text{متقاربة}}{x_n \longrightarrow l \neq 0} \Longrightarrow$$ متقاربة وهذا يناقض

أن $(-1)^n$ متباعدة

④ $\{x_n\}$ متتالية محدودة ، عناصرها مختلفة $n \neq m \Rightarrow (x_n \neq x_m)$

$A = \{x_n , n \in IN\}$

إذا كانت للمجموعة A نقطة تراكم واحدة ولتكن $x \Leftarrow x$ $x_n \longrightarrow x$

$A = \{x_n , n \geq 1\}$ محدودة ، وغير منتهية (عناصرها مختلفة)

A محدودة وغير منتهية $\Longleftarrow$ $\exists\, (x_{n_k})$ متتالية جزئية من x_n

$x_{n_k} \in A$

$x_{n_k} \longrightarrow x$

مثال

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

(I) نثبت أن x متقاربة

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-}{\quad} < 0$$

$$x_{n+1} < x_n \quad \forall n$$

$\therefore x_n \downarrow .$

$\because x_n > 0$

$\therefore$ x_n محدودة من أسفل

$\rightarrow$ x_n متقاربة

$\lim x_n = l$

(II)

$$\frac{n+1}{2n} = a_n < x_n < \frac{n+1}{n} = b_n$$

$$\lim a_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim b_n = \lim \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\frac{1}{2} < \lim x_n \le 1$$

الثلاثاء ١٢/٦

المجموعات المفتوحة

① (a,b) فترة مفتوحة $\longrightarrow$ مجموعة مفتوحة

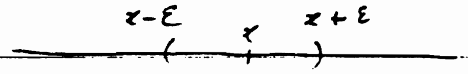
(تمرين سابق)

② $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \setminus \{y\} = (-\infty, y) \cup (y, \infty)$$

مفتوحة

③ $\forall x \in \mathbb{Q}$



$x-\varepsilon,\ x+\varepsilon \in \mathbb{R} \longrightarrow$ بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد غير نسبي

$$(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$$

$\longleftarrow$ $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة

$\forall y \in \mathbb{Q}^c,\ \varepsilon > 0$

$y-\varepsilon,\ y+\varepsilon \in \mathbb{R} \longrightarrow$ بينهما عدد نسبي

$$(y-\varepsilon,\ y+\varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}^c$$

④ $\mathbb{Z}$

$\forall n \in \mathbb{Z},\ \frac{\varepsilon}{3} > 0 \Rightarrow (n-\varepsilon,\ n+\varepsilon) \not\subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ ليست مفتوحة

⑤ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty) \longrightarrow$ مجموعة مفتوحة

$\emptyset$ — مفتوحة

مجموعة مفتوحة $A = \bigcup (a_i , b_i)$

مجموعة مفتوحة $A_i \Rightarrow$ $\bigcup A_i \longrightarrow$ مجموعة مفتوحة

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow$ مفتوحة

$A_n = [\frac{1}{n} , 1]$

$\bigcap A_n = (0,1]$ ليست مفتوحة

المجموعات المغلقة :

مجموعة مغلقة $B \Longleftrightarrow B^c$ مفتوحة

مفتوحة $\mathbb{R} \Longrightarrow$ مغلقة $\phi = \mathbb{R}^c$

مفتوحة $\phi \Longrightarrow$ مغلقة $\mathbb{R} = \phi^c$

الفترات المغلقة $[a,b] \longrightarrow$ مجموعات مغلقة

نظرية :

مغلقة $A \Longleftrightarrow \hat{A} \subset A \Longleftrightarrow \forall (x_n) , x_n \in A$, $x_n \longrightarrow x$ $\longrightarrow x \in A$

مغلقة B_i : $\bigcup\limits_{i=1}^{\mathbb{R}} B_i$ مغلقة

$\bigcap B_i$ مغلقة

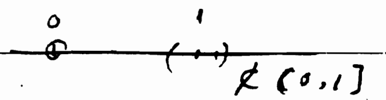
$\mathbb{Z}^c = \dots (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots$ اتحاد عدد غير منتهي

$\mathbb{Z}^c = \bigcup (m, m+1) \quad m \in \mathbb{Z}$. من المجموعات المفتوحة

مجموعة مفتوحة

$\mathbb{Z} = \underbrace{(\mathbb{Z}^c)}_{\text{مفتوحة}}{}^c \longrightarrow$ مغلقة

$(0,1]$ غير مفتوحة



وغير مغلقة لأن $0 \in \hat{A}$ ، $0 \notin A$ (النظرية)

تمارين

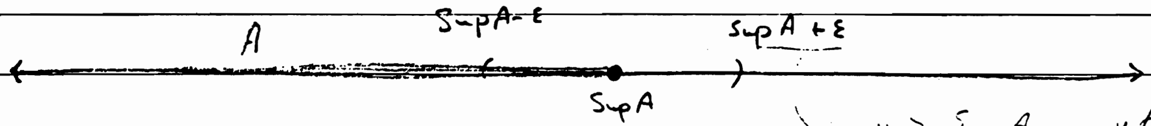
②

(i) A مفتوحة

(ii) A محدودة

$A \subset \mathbb{R} \Rightarrow^{?} \operatorname{Sup} A, \operatorname{Inf} A \notin A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad (\operatorname{Sup} A - \varepsilon, \operatorname{Sup} A + \varepsilon)$



$y > \operatorname{Sup} A \Rightarrow y \notin A$

$\forall x \in A \quad x \leq \operatorname{Sup} A$

$(\operatorname{Sup} A - \varepsilon, \operatorname{Sup} A + \varepsilon) \not\subset A$

$\operatorname{Sup} A \notin A \Longleftarrow$ مفتوحة A ∵

بنفس الطريقة.

$\forall \varepsilon > 0 \quad (\operatorname{Inf} A - \varepsilon, \operatorname{Inf} A + \varepsilon) \not\subset A$

$\operatorname{Inf} A \notin A \Longleftarrow$ مفتوحة A ∵

$A \subset \mathbb{R}$: (i) محدودة ← $\operatorname{Inf} A, \operatorname{Sup} A$ متواجدتان.

(ii) A مغلقة

$\operatorname{Inf} A, \operatorname{Sup} A \in A \overset{?}{\Longleftarrow}$

$\exists (x_n),\ x_n \in A$

$x_n \longrightarrow \operatorname{Sup} A \xRightarrow{A \text{ مغلقة}} \operatorname{Sup} A \in A$

$\exists (y_n),\ y_n \in A$

$y_n \longrightarrow \inf A \xRightarrow{\text{مغلقة}} \operatorname{Inf} A \in A$

(يوجد طريقة أخرى باستخدام نقط التراكم).

$$\underset{\text{مغلقة}}{A \subset B} \nRightarrow$$ A مغلقة

$B = [a, b]$

$A = \begin{cases} (a, b] \\ (a, b) \\ [a, b) \end{cases}$

$$A \subset \underset{\text{مفتوحة}}{B} \nRightarrow$$ A مفتوحة

$B = (2, 5)$

$A = \begin{cases} [3, 4] \\ (3, 4] \\ [3, 4) \end{cases}$

(4) $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$

$\bigcup [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$

$A = \{a\}$ $\qquad a \in \mathbb{R}$

$A^c = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{مفتوحة}} \cup \underbrace{(a, \infty)}_{\text{مفتوحة}} \longrightarrow$ مفتوحة

$\Longrightarrow$ A مغلقة

$(a,b] \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ ليست مفتوحة

ليست مغلقة

$(-\infty, b]$

$(-\infty, b]^c = (b, \infty)$ مفتوحة $\Longrightarrow (-\infty, b]$ مغلقة

$[a, \infty)^c = (-\infty, a)$ مفتوحة $\Longrightarrow [a, \infty)$ مغلقة

(5) A مغلقة $\Longleftrightarrow$ كل متتالية $\{x_n\}$ من A

متقاربة $x_n \to$

فإن $x \in A$

$\Updownarrow$

كل متتالية $\{x_n\}$ من A

من نوع كوشي

(لها نهاية في A)

Interior of $A = A^\circ$ داخل المجموعة A

(جزئية)

A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

(i) A° أكبر مجموعة مفتوحة

(ii) $A^\circ \subset A$

① إذا كانت A مفتوحة $\Leftarrow A \subset A$ مجموعة مفتوحة جزئية من A (ii) ②

A° أكبر مفتوحة جزئية من A

$\Leftarrow A \subset A^\circ$

ولكن $A^\circ \subset A$ (تعريف A°)

$\Leftarrow A = A^\circ$

② إذا كانت $A = A^\circ$

$\because$ A° مفتوحة $\therefore$ A مفتوحة

من (1) و (2) $A = A^\circ \iff A$ مفتوحة

$$A \subset B \Longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$$

$A^\circ \subset B^\circ \Longrightarrow$ A° مجموعة مفتوحة جزئية من $B \Longrightarrow A^\circ \subset A \subset B$.

ولكن B° أكبر مجموعة مفتوحة جزئية من B

مثال :- $A \subsetneq B \Longrightarrow A^\circ = B^\circ$

$B = [a, b]$

$A = [a, b)$ $\qquad B^\circ = A^\circ = (a, b)$

$(a, b]$

(a, b)

(ii) $(A\cap B)^{\circ} = A^{\circ}\cap B^{\circ}$

$\because \; A\cap B \subset A \implies (A\cap B)^{\circ} \subset A^{\circ}$

$A\cap B \subset B \implies (A\cap B)^{\circ} \subset B^{\circ}$

$\implies (A\cap B)^{\circ} \subset A^{\circ}\cap B^{\circ}$

$A^{\circ} \subset A$

$B^{\circ} \subset B$

$(A^{\circ}\cap B^{\circ}) \subset A^{\circ} \subset A$

$(A^{\circ}\cap B^{\circ}) \subset B^{\circ} \subset B$

$(A^{\circ}\cap B^{\circ}) \subset A\cap B \implies (A^{\circ}\cap B^{\circ}) \subset (A\cap B)^{\circ}$

$\implies (A^{\circ}\cap B^{\circ}) \subset (A\cap B)^{\circ}$

مفتوحة $(A^{\circ}\cap B^{\circ})^{\circ}$

مفتوحة

(iii) $(A\cup B)^{\circ} \supset A^{\circ}\cup B^{\circ}$

$A \subset (A\cup B) \implies A^{\circ} \subset (A\cup B)^{\circ}$

$B \subset (A\cup B) \implies B^{\circ} \subset (A\cup B)^{\circ}$

$\implies A^{\circ}\cup B^{\circ} \subset (A\cup B)^{\circ}$

مثال

$A = \mathbb{Q}$ ليست مفتوحة $\mathbb{Q}$ —— $\mathbb{Q}^\circ \subsetneq \mathbb{Q}$

$B = \mathbb{Q}^c$ ليست مفتوحة $\mathbb{Q}^c$ —— $(\mathbb{Q}^c)^\circ \subsetneq \mathbb{Q}^c$

$(A \cup B) = \underbrace{\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}}_{\text{مفتوحة}}$ —— $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$

$$\therefore \mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{Q}^c)^\circ \subsetneq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{Q}^c)^\circ \neq (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c)^\circ$$

مثال : مثال

$A = (0,1]$ $\quad B = (1,6]$

$A^\circ = (0,1)$

$B^\circ = (1,6)$

$A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,6)$

$(A \cup B) = (0,6]$ $\qquad (A \cup B)^\circ = (0,6)$

$$A^\circ \cup B^\circ \subsetneq (A \cup B)^\circ$$

Closure of $A = \bar{A}$ انغلاق المجموعة A

(٤) $\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A

(i) → (i) $\bar{A}$ مغلقة

A مغلقة $\Longleftrightarrow$ $A = \bar{A}$ $\stackrel{?}{\Longrightarrow}$

→ (ii) $A \subset \bar{A}$

إذا كانت $A = \bar{A}$ $\Longleftarrow$ $\bar{A}$ مغلقة ∴ A مغلقة

إذا كانت A مغلقة $\Longrightarrow$
(١) $\bar{A}$ أصغر مغلقة $(\bar{A} \subset A)$
(٢) A مغلقة $(A \subset \bar{A})$
$\Longrightarrow \bar{A} \subset A$

ولكن من التعريف $A \subset \bar{A}$

$\Longrightarrow A = \bar{A}$

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \phi \iff x \in \bar{A}$

$\Longleftarrow$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \phi \Longrightarrow x \in \bar{A}$

البرهان بالتناقض

نفرض أنه $x \notin \bar{A}$

$\Longrightarrow x \in (\bar{A})^c \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ لأن $(A \subset \bar{A}$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (\bar{A})^c \subset A^c$ مفتوحة (لأنه $\bar{A}$ مغلقة)

$\Longrightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \phi$

وهذا يناقض المعطى

(٢) واجب

(iii). $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n),\ x_n \in A,\ x_n \longrightarrow x$

من (ii)

$x \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \phi$

(i) $x \in A$ ناخذ $x_n = x \longrightarrow x$

(ii) $x \notin A \Rightarrow x \in \hat{A}$

$\Rightarrow \exists (x_n),\ x_n \in A,\ x_n \longrightarrow x$

(iv) $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$

$A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$

$B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$$\boxed{\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}}$$

$X \subset Y \Rightarrow \bar{X}$

$\bar{Y} \supset Y \supset X$

مغلقة وتحوي X

$\bar{X}$ أصغر مغلقة تحوي

$\Rightarrow \bar{X} \subset \bar{Y}$

$y \in \overline{A \cup B}$

$\iff (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap A \cup B \neq \phi$

$(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap A \neq \phi \Rightarrow y \in \bar{A}$

$(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap B \neq \phi \Rightarrow y \in \bar{B}$

$y \in \bar{A} \cup \bar{B}$

$(\overline{A \cap B}) \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

$A \cap B \subset A$

$A \cap B \subset B$

$$\left.\begin{array}{l} (\overline{A \cap B}) \subset \bar{A} \\ (\overline{A \cap B}) \subset \bar{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\overline{A \cap B}) \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

أمثلة

$A = \mathbb{Q} \qquad \bar{A} = \mathbb{R}$

$B = \mathbb{Q}^c \qquad \bar{B} = \mathbb{R}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(A \cap B) = \phi \Longrightarrow (\overline{A \cap B}) = \bar{\phi} = \phi$

(لأنه ϕ مغلقة)

الثلاثاء ١٩/ ٦ .... واجب السؤال الأول ...

النهايات

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \to c} f(x)$ غير متواجدة

$\exists x_n$ — $x_n \in D$, $x_n \neq c$, $x_n \to c$

تكون غير متقاربة $f(x_n)$

OR

$\exists (x_n), (y_n)$ تحقق الشروط الثلاثة

$f(x_n) \longrightarrow l$

$f(x_n) \longrightarrow m$

$l \neq m$

(3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x}{1+x^2} = \dfrac{3}{2}$

$f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$ $l = \dfrac{3}{2}$ $c = 1$

$\forall (x_n)$ $x_n \in D$, $x_n \neq 1$, $x_n \longrightarrow 1$

$a_n \to a$, $b_n \to b$, $b \neq 0$, $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \dfrac{a}{b}$

$f(x_n) = \dfrac{3x_n}{1+x_n^2} = \dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \dfrac{3}{2}$

(4) $f(x) = \cos \dfrac{1}{2x^2}$ $x \longrightarrow 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

$x_n \in D$ $\qquad x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$

$x_n \neq 0$

$x_n \longrightarrow 0$

$f(x) = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

ليس لها نهاية

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = (0, \infty)$

$x_n \in D$

$x_n \neq 0$ $\qquad x_n = \dfrac{1}{n^2}$ $\qquad f(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = n$ متباعدة

$x_n \longrightarrow 0$

$f(x) = (x^2 + \operatorname{sgn} x)$

$$g(x) = \operatorname{sgn} x \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$D_g = \mathbb{R}$

$x_n = \dfrac{1}{n}$ $\qquad y_n = -\dfrac{1}{n}$

$\in D$

$\neq 0$

$\to 0$

$g(x_n) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{n}\right) = +1 \longrightarrow 1$

$g(y_n) = \operatorname{sgn}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = -1 \longrightarrow -1$

$$f(x_n) = \frac{1}{n^2} + sgn\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + 1 \longrightarrow 1$$

$$f(y_n) = \frac{1}{n^2} + sgn\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - 1 \longrightarrow -1$$

(5)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R}$$

متواجدة $\lim\limits_{x \to c} f(x) \iff c = 0$

متواجدة $\lim\limits_{x \to c} f(x)$

$x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$x_n \neq c$

$x_n \to c$

$f(x_n) = x_n \longrightarrow c$

$x \in \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$

$y_n \neq c$

$y_n \to c$

$f(y_n) = y_n \longrightarrow -c$

$\Longrightarrow c = -c$

$2c = 0$

$\boxed{c = 0}$

$\boxed{c = 0}$

$\forall z_n \in \mathbb{R},\ z_n \neq 0,\ z_n \to 0$

$$f(z_n) = \begin{cases} z_n \longrightarrow 0 & z_n \in \mathbb{Q} \\ -z_n \longrightarrow 0 & z_n \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

6. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to 0} f(x) = l$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} g(x) = l$

$g(x) = f(ax)$

$\forall x_n \in D$, $x_n \neq 0$, $x_n \longrightarrow c$ $\Rightarrow$ $g(x_n) \longrightarrow l$

$\lim_{x \to 0} f(x) = l$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \forall x_n \in \mathbb{R} \\ x_n \neq 0 \\ x_n \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow l$$

$\because a \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} a x_n \in \mathbb{R} \\ a x_n \neq 0 \\ a x_n \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(ax_n) = g(x_n) \longrightarrow l$$

7. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^2 = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$

$x \in D$

$x \neq c$

$|x - c| < \delta \Rightarrow |[f(x)]^2 - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)|^2 < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)| < \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon'$

$$f(x) \xrightarrow[x \to c]{} 0$$

لاحظ $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^2 = l \not\Longrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) = \sqrt{l}$

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$[f(x)]^2 = \begin{cases} +1 & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0=c} [f(x)]^2 = 1$$

$x \to c$
$x \neq c$

بينما $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

تمارين (٤ - ٢)

مثال:

① $\lim\limits_{x\to c} f(x) \nexists$

$\lim\limits_{x\to c} g(x) \nexists \implies \lim\limits_{x\to c} [f(x)+g(x)] \exists$

$f(x) = \frac{1}{x} + x$

$\boxed{c=0}$

$g(x) = -\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \nexists$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \nexists$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

مثال لحاصل الضرب

$f(x) = x - \operatorname{sgn} x$

$g(x) = x + \operatorname{sgn} x$

$f(x)\, g(x) = x^2 - (\operatorname{sgn} x)^2$

$$f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)\,g(x) = -1$$

(2) $$a \leq f(x) \leq b \ , \ \lim_{x \to c} f(x) = c \ \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$g(x) = a \quad \forall x \in D$

$h(x) = b \quad \forall x \in D$

$\forall x \in D \qquad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\Rightarrow \ a = \lim_{x \to c} g(x) \leq \lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} h(x) = b$$

$$a \leq \lim_{x \to c} f(x) \leq b$$

الجزء الثاني من السؤال ،

$f(x) < g(x) \qquad \forall x \in D$

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

$x_n = \frac{1}{n} > 0$

$\lim x_n = 0$

$x_n < y_n$

$\lim x_n \leq \lim y_n$

(5) $$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

(i) $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

(ii). و دالة محدودة في جوار ما للنقطة c

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x)\,.\,g(x) = 0$$

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1$

$x \in D$

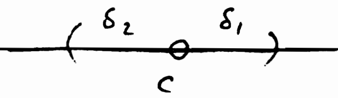
$x \neq c$

$|x-c| < \delta_1 \implies f(x) < \frac{\varepsilon}{K}$

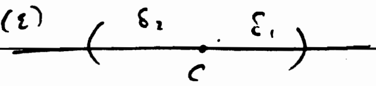
(ii) $\exists \delta_2, \ K > 0$

$|g(x)| \leq K \quad \forall x \in (c-\delta_2, c-\delta_2)$

$V_1(\varepsilon)$



$V_2(\varepsilon)$



$V = V_1 \cap V_2 = (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\forall x \in V \implies |f(x).g(x)| = |f(x)|\,|g(x)|$

$0 < |x-c| < \delta \qquad \leq |f(x)|\,K < K.\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

6. $\lim_{x \to c} f(x) = l \implies \lim_{x \to c} |f(x)| = |l|$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$

$\forall x \in D$

$x \neq c$

$0 < |x-c| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$

$\big| |f(x)| - |\ell| \big| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} |f(x)| = |\ell|$

$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \quad] \Longleftarrow \lim_{x \to c} |f(x)| = 0$

الثلاثاء ٢٦/٦

8). $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ → (*) (دوال مغيشي)

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ متواجدة $\lim_{x\to c} f(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to 0} f(x)$ متواجدة $\Longleftrightarrow$ f محدودة في جوار ما لـ 0

$\forall c\in\mathbb{R}$

(*) $f(x)=f((x-c)+c)=f(x-c)+f(c)$

$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f(x-c) + f(c)$

$\underbrace{\lim_{x\to c} f(x)}_{\to\, l} = \underbrace{\lim_{t\to 0} f(t)}_{\to\, m} + f(c) \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(t) = l - f(c)$

الثاني العكسي $\Longrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = m + f(c)$

متواجدة $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\Longleftrightarrow$ f محدودة في جوار ما للنقطة 0

① $\lim_{x\to 0} f(x)$ متواجدة $\xrightarrow{\text{نظرية}}$ f نحو محدودة في جوار ما للنقطة 0

② $\Leftarrow$ نفرض أن f محدودة في جوار لـ 0

$\exists\, M>0 \quad a\in\mathbb{R}$

$|f(x)|\le M \quad \forall x\in(-a,a)$

$\frac{M}{N}<\varepsilon$ نختار عدد طبيعي $N\in\mathbb{N}$ بحيث

(i). $|f(x)|\le M \quad \forall x\in(-a,a)$

$\varepsilon>0 \quad \frac{M}{N}<\varepsilon \quad N\in\mathbb{N}$

$\lim_{x\to c} f(x) = l$

$\lim_{x\to c} f(2x) = l$

(*) $y \Rightarrow x$

$\lim f(2x) = 2f(x)$

$l=2l \Rightarrow \boxed{l=0}$

$Nx \in (-a, a)$

$|Nx| < a \Rightarrow |f(Nx)| = |N f(x)| \le M$

$N|f(x)| \le M$

$|f(x)| \le \frac{M}{N} < \varepsilon$

$|x| < \frac{a}{N} = \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

اثبت انه $f(nx) = n f(x)$

$f(2x) = 2 f(x)$

نفرض $n = r$ $\quad f(rx) = r f(x)$

$n = r+1$

$f((r+1)x) = f(rx + x) = f(rx) + f(x)$

$= r f(x) + f(x) = (r+1) f(x)$

---

7). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow (*)$

? ??

إذا كانت $\lim_{x \to 0} f(x)$ متواجدة $\Rightarrow$ متواجدة $\lim_{x \to c} f(x)$ | $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ or $f(x) = 0 \quad \forall x$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $f(x) = f((x-c)+c) = f(x-c) \cdot f(c)$

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(x-c) \cdot f(c)$ $\quad x \longrightarrow c$

$y = x - c \longrightarrow 0$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \underbrace{\lim_{t \to 0} f(t)}_{\to m} \cdot f(c)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l \qquad \lim_{x \to 0} f(2x) = l$$

$\forall (x_n)$, $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$, $f(x_n) \to l$

$2x_n \neq 0$, $2x_n \to 0$, $f(2x_n) \to l$

$$\Rightarrow \lim f(2x) = \lim [f(x)]^2$$

$$l = l^2$$

$$l^2 - l = 0$$

$$l(l-1) = 0$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ or $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta$

$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 \leq |f(x)| < \varepsilon$

$\therefore f(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{x}{n} \to 0$

$|f(\frac{x}{n})| < \varepsilon = \frac{1}{2}$

$|f(\frac{x}{n})| < \frac{1}{2}$

$|f(x)| = |f(\frac{xn}{n})| = |f(\frac{x}{n})|^n < \frac{1}{2^n} \to 0$

$0 \leq |f(x)| < \varepsilon \qquad |\frac{1}{2^n} - 0| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$$

$(x>c)$ $\quad c \in \widehat{D\cap(c,\infty)}$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta$

$0< x-c<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$$

$c \in \widehat{D\cap(-\infty,c)}$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta$

$0< c-x<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

تمارين ص ١٨٤

② $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$c\in\hat{D}$

U جوار نقطة c بحيث : $f(x)\le g(x) \quad \forall x\in D\cap U\setminus\{c\}$

(i). $\lim_{x\to c} f(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to c} g(x) = \infty$

(ii). $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

(i). $\lim_{x\to c} f(x) = \infty \Rightarrow \exists M>0,\ \delta(\varepsilon)$

$\forall x\in D\cap U\setminus\{c\}$

$0<|x-c|<\delta \Rightarrow f(x)>M \Rightarrow g(x)\geq f(x)>M$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to c} g(x) = \infty$$

(ii). $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty \Rightarrow \exists N < 0 \quad 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow g(x) < N$

$$\Rightarrow f(x) \le g(x) < N \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

5 (i)

$$f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{(x-2)+2}{(x-2)} = 1 + \frac{2}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$$

$0 < x-2 < \delta \qquad f(x) = \frac{1}{x-2} > \frac{1}{\delta} = M$ كبير جدا

$$\therefore \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2}$$

$x < 2 \qquad 0 < 2-x < \delta$

$$(x-2) > -\delta$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{\delta} = N$$

$$N < 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} \longrightarrow -\infty$$

$$\therefore \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \left[1 + \frac{2}{x-2}\right] \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left[1+\frac{2}{x-2}\right] \longrightarrow -\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2}{x-2}\right)$$ غير موجودة

(ب)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=+1 \qquad \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}}\frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=-1$$

$f(x)=[x]$ $\qquad f(x)=n \qquad n\le x<n+1$

$\forall n\in\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to n^+\\(x>n)}}[x]=n\\ &\lim_{x\to n^-}[x]=n-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to n}[x]\ \nexists \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ (x>0)}} x[x] = 0 . 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ (x<0)}} x[x] = 0 . (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x[x] = 0$$

$$\lim_{x \to n^+} x[x] = n . n = n^2$$

$$\lim_{x \to n^-} x[x] = n(n-1)$$

$$\therefore \lim_{x \to n} x[x] \nexists$$

(7) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

? $\lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \ell \iff \lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$

$(\Longrightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni$

$0 < x < \delta \Longrightarrow |f(\frac{1}{x}) - \ell| < \varepsilon$

$t = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M \Longrightarrow |f(\frac{1}{x}) - \ell| < \varepsilon$

$\therefore \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \ni$

$t > M = \frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(t) - \ell| < \varepsilon$

$(\Longleftarrow)\quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists K > 0$

$x > K > 0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{K} = \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$t = \frac{1}{x}$

$0 < t < \delta \Longrightarrow |f(\frac{1}{t}) - \ell| < \varepsilon$

$t \longrightarrow 0^+ \qquad f(\frac{1}{t}) \longrightarrow \ell$

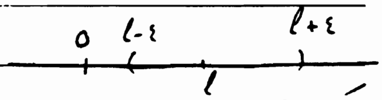
8). $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$

(i). D جوار لـ ∞

(ii). $g(x) > 0 \quad \forall x \in D \overset{?}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists M > 0$



$x > M \Longrightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \varepsilon$

يمكن اختيار ε كي

$\ell - \varepsilon > 0$

$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \ell < \varepsilon$

$\underbrace{\ell - \varepsilon}_{A} < \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{\ell + \varepsilon}_{B}$ بالضرب في $g(x) > 0$

$A\, g(x) < f(x) < B\, g(x)$

$A\, g(x) < f(x)$

if $\lim g(x) = \infty \Longrightarrow \lim f(x) = \infty$

$f(x) < B\, g(x)$

if $\lim f(x) = \infty \Longrightarrow \lim g(x) = \infty$

في حالة $l < 0$

$l-\varepsilon \quad l \quad l+\varepsilon \quad 0$

يمكن اختيار ε بحيث ان $l+\varepsilon < 0$

$\overset{\text{سالبة}}{A}\, g(x) \leq f(x) \leq \overset{\text{سالبة}}{B}\, g(x)$

$A\, g(x) \leq f(x)$

If $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} A\, g(x) = -\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$

$f(x) \leq \overset{\text{سالبة}}{B}\, g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{If } \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} B\, g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

نهايات الدوال المطردة تمارين ص ١٩٠

- أي دالة مطردة فعلياً ← تباين

$x_1, x_2 \in D$

$x_1 \neq x_2$ — تزايدية فعلاً → $f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

تناقصية فعلاً → $f(x_1) > f(x_2)$

① $f : D \longrightarrow R_f$

$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$

$x_1 < x_2 \overset{?}{\Rightarrow} f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

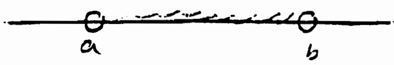
$x_1 < x_2$ — f تزايدية فعلاً

$f(y_1) < f(y_2)$

f تزايدية فعلاً ∵ $\Longrightarrow y_1 < y_2 \Longrightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

② f تزايدية على (a, b)

f غير محدودة على (a, b) $\Big\} \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$



$\forall N > 0 \in R \Rightarrow \exists\ c \in (a, b) \ni f(c) > N$ (f غير محدودة على (a,b))

$a < c < b$

$b - c > 0 \Longrightarrow \delta = b - c > 0$

$x \to b^-$

$0 < b - x < \delta$

$b - x < b - c \Longrightarrow x > c \xrightarrow{f \text{ تزايدية}} f(x) \geq f(c) > N$

$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$

① D تزايدية على f, g $\Rightarrow (f+g)(x_1) = f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in D$ $\qquad = (f+g)(x_2)$

$x_1 < x_2$ $\qquad$ $(f+g)$ تزايدية على D

$f(x_1) < f(x_2)$

$g(x_1) < g(x_2)$

② $x_1 < x_2$

$f(x_1) \leq f(x_2) \longrightarrow \times\ g(x_1) \geq 0$

$g(x_1) \leq g(x_2) \longrightarrow \times\ f(x_2) \geq 0$

$f(x), g(x) \geq 0$

$\forall\ x \in D$

$f(x_1)\ g(x_1) \leq f(x_2)\ g(x_1)$

$g(x_1)\ f(x_2) \leq f(x_2)\ g(x_2)$

$\Longrightarrow f(x_1)\ g(x_1) \leq f(x_2)\ g(x_2)$

$(f.g)$ تزايدية .

$D = [0, 1]$

$f(x) = x \uparrow$

$g(x) = 1 - x$

$(f.g)\,x$ ليست مطردة

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(ii) f مطردة

$$\overset{?}{\Downarrow}$$

$\exists\, m \in \mathbb{R} \qquad m = f(1)$

$f(x) = mx \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x\, f(1)$

البرهان على أربع خطوات

(I) $x = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (II) $x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$ (III) $x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ (IV) $x \in \mathbb{R}$

(I) $f(n) = f(n \cdot 1) = n\, f(1)$

(تم برهانها في مسألة سابقة).

(II) $x = y = 0$

$f(0) = f(0) + f(0) \Longrightarrow f(0) = 0$

$0 = f(0) = f(n-n) = f(n + (-n))$

$0 = f(n) + f(-n)$

$f(-n) = -f(n)$

$= -n\, f(1)$

$f(-n) = (-n)\, f(1)$

(III) $\forall x \in \mathbb{Q} \qquad x = \frac{a}{b} \qquad a, b \in \mathbb{Z} \quad b \neq 0$

$$b\, f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(b \cdot \frac{a}{b}\right) = f(a) = a \cdot f(1)$$

$$b\, f\left(\frac{a}{b}\right) = a \cdot f(1)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}\, f(1)$$

(IV) $$\lim_{x\to c^-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^+} f(x)$$

$\forall\, c\in\mathbb{R}$ $\qquad c \in \hat{\mathbb{Q}}$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)$$

$z_n \in \mathbb{Q}$ $\qquad f(z_n) = z_n\, f(1) \longrightarrow c \cdot f(1)$

$z_n \longrightarrow c$

$z_n < c$

$$\lim_{x\to c^+} f(x)$$

$t_n \in \mathbb{Q}$ $\qquad f(t_n) = t_n\, f(1) \longrightarrow c \cdot f(1)$

$t_n \longrightarrow c$

$t_n > c$

$$c \cdot f(1) \le f(c) \le c \cdot f(1)$$

$$\forall\, c\in\mathbb{R} \quad f(c) = c \cdot f(1)$$

الثلاثاء ٧/٤

الاتصال

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

f متصلة عند c

(i) $c \in D$

(ii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$

$x \in D$

$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)|$

عدم الاتصال عند c

① $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة $\longrightarrow \lim_{x \to c} f(x) \nexists$

$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$

② $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

②
$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} g(x) = +1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} g(x) = -1$$

: $\forall x \neq 0$

$x > 0$ — $g(x) = +1$ متصلة

$x < 0$ — $g(x) = -1$ متصلة

$x = 0$ — g غير متصلة

$x > 0$, $x < 0$ — g متصلة عند

. g متصلة على $\mathbb{R}^*$

④ $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$|f(x)| \leq |x| \qquad \forall x \in (-1,1)$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ f متصلة عند $x=0$

① $x = 0 \Longrightarrow |f(0)| \leq |0| = 0$

$\Longrightarrow |f(0)| \leq 0$

$\Longrightarrow |f(0)| = 0$

$\Longrightarrow f(0) = 0$

نبغي اثبات ان $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$:

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \delta = \varepsilon$

$|x-0|$ نضع شرط

$|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| \leq |x| < \delta = \varepsilon$

$\therefore f(x) \longrightarrow 0 = f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

f متصلة عند 0

(7) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

f متصلة عند c

$\Leftarrow$ فإن $|f|$ متصلة عند c

$\because f$ متصلة عند c

$\Rightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta > 0 \quad \ni \ \forall$

$x \in D$

$|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$\big|\, |f(x)| - |f(c)| \,\big| \leq |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

(5)

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

الدالة غير متصلة عند $x = 0$

$|g|(x) = |g(x)| = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$|g|$ متصلة عند $x = 0$

6) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

مثال: الدالة f غير متصلة عند c $\quad \forall\, c \in D$

ولكن $|f|$ تكون متصلة $\quad \forall\, c \in D$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

$|f|$ متصلة عند كل نقطة $c \in \mathbb{R} \longrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| = 1$

لاثبات أن f غير متصلة

(i) $\forall\, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \in \hat{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow \exists\, (x_n),\ x_n \in \mathbb{Q} : x_n \longrightarrow c$

$f(x_n) = 1 \longrightarrow 1$

(ii) $\forall\, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \in \hat{\mathbb{Q}}^c$

$\Rightarrow \exists\, (y_n),\ y_n \in \mathbb{Q}^c \quad y_n \longrightarrow c$

$f(y_n) = -1 \longrightarrow -1$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

$\forall\, c \in \mathbb{R}$ $\quad$ c غير متصلة عند f :

8) عدم الاتصال $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

$\lim_{x \to c} f(x)$

$f(c) = k \neq l$

$$\longrightarrow g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ l & x = c \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x^2 & x \neq 0 \\ & \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x^2}{x^2} \right) \cdot x$$

$$= 0 = l$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- بينما لا يمكن ازالة الانفصال في الدالة . لعدم وجود النهاية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^2} & x \neq 0 \\ & \end{cases}$$

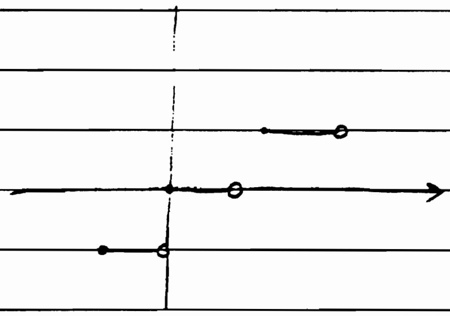
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} \longrightarrow \begin{cases} \infty & x \to 0^+ \\ -\infty & x \to 0^- \end{cases}$$

$f(x) = [x]$

$f(n) = n \qquad n \leq x < n+1$

$\lim_{x \to n^-} f(x) = n-1$

$n-1 \leq x < n$



$\lim_{x \to n^+} f(x) = n$

$x > n$

$f(x) = [x]$ ليس لها نهاية

عند الأعداد الصحيحة $x \in \mathbb{Z}$

f غير متصلة عند x لكل $x \in \mathbb{Z}$

$n < c < n+1$

f متصلة $\longrightarrow f(x) = c$

f متصلة على $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$g(x) = x\,[x]$

x متصلة على $\mathbb{R}$ ، $[x]$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

g متصلة على $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

وأيضاً: $\lim_{x \to 0^+} x[x] = 0$

صفر   صفر

: $\lim_{x \to 0^-} x[x] = 0(-1) = 0$

: و متصلة عند $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$

(10) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

A مجموعة مغلقة $\Longleftarrow$ f متصلة

$A = \{x \in D , f(x) = 0\}$

F مغلقة $\Leftrightarrow$ $\forall x_n \in F$
$x_n \longrightarrow c$
$\Rightarrow c \in F$

المطلوب: $\forall (x_n), x_n \in A$
$x_n \longrightarrow c \Rightarrow c \in A \equiv f(c) = 0$

$c \in D$

f متصلة عند c

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

$x_n \in A , x_n \longrightarrow c$ f
إذن متصلة $f(x_n) \longrightarrow f(c)$

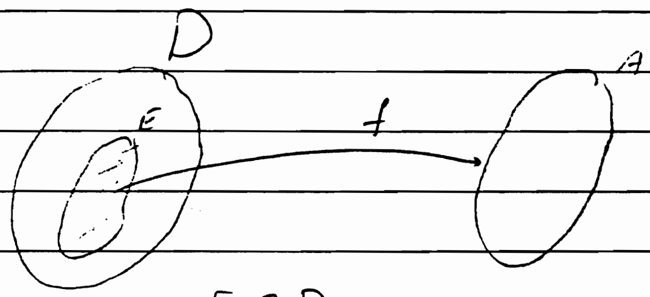
$x_n \in A$ $f(x_n) = 0 \longrightarrow f(c)$

$f(x_n) = 0$

$\therefore f(c) = 0$

$\Longrightarrow c \in A$

تعريف المقصور



$E \subset D$

$g: E \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall x \in E \qquad g(x) = f(x)$

g تسمى مقصور f على E

$g = f|_E$

(11) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

g مقصور f على E

$g(x) = f(x) \quad \forall x \in E \subset D$

(a) إذا كانت f متصلة عند $c \in E$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ g متصلة عند c

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$

$x \in E \qquad\qquad c \in E$

$|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$|x-c| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(c)| < \varepsilon$

. g متصلة عند $x = c$

(b) g متصلة عند $x=c$ $\not\Leftarrow$ f متصلة عند c

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & 0\le x\le 3 \\ -5 & 3<x\le 7 \end{cases}$$

$$g(x)=x^2+1$$

$D_f=[0,7]$

$D_g=E=[0,3]\subset D$

g متصلة عند $x=3$ $\left(\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=f(3)\right)$

f غير متصلة عند $x=3$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-5$

$\neq$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=10$

(12) مثلاً $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{Q} \overset{?}{\Longrightarrow} f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\forall c\in\mathbb{R} \Rightarrow c\in\hat{\mathbb{Q}} \Rightarrow \exists(\alpha_n),\ \alpha_n\in\mathbb{Q}$

$\alpha_n\longrightarrow c$

من اتصال f عند α

$$\lim_{\alpha_n \in \mathbb{Q}} f(\alpha_n) = f(c)$$

$$0 = f(c) \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

(13) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

إذا كانت f متصلة عند $x=0$ $\overset{?}{\Longleftarrow}$ f متصلة عند c $\forall\, c \in \mathbb{R}$

(I). $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \overset{\text{متصلة عند } 0\ f}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\forall\, c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f((x-c)+c) = f(x-c) + f(c)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} [f(x-c) + f(c)]$$

$$= f(0) + f(c) = 0 + f(c) = f(c)$$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$\therefore$ f متصلة عند c

$\forall\, c \in \mathbb{R}$

5-2 (8) 212 (II) إذا كانت f متصلة عند $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ f متصلة عند c

$\forall\, c \in \mathbb{R}$

II I

f متصلة عند x_0 ⟸ f متصلة عند $x=0$ ⟸ f متصلة عند c $\forall c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f((x-x_0)+x_0)$$

$$f(x) = f(x-x_0) + f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x-x_0) + f(x_0)]$$

x_0 ∴ f متصلة عند

$$f(x_0) = \lim_{t \to 0} f(t) + f(x_0)$$

$$\therefore \lim_{t \to 0} f(t) = 0$$

∴ f متصلة عند $x=0$

∴ من جزء (I) هي متصلة عند c $\forall c \in \mathbb{R}$

ص 212

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(9)

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \longrightarrow (*)$$

إذا كانت f متصلة عند $x=0$ ⟸ f متصلة عند c $\forall c \in \mathbb{R}$

$x=y=0$

$$f(0) = [f(0)]^2 \Rightarrow f(0)=0 \quad \text{or} \quad f(0)=1$$

إذا كانت f متصلة عند $x=0$

$\forall\, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = f((x-c)+c) = f(x-c) \cdot f(c)$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(x-c) \cdot f(c)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(0) \cdot f(c)$$

(i) $f(0)=0$

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

$x = c$

$y = 0$

$f(c) = f(c+0) = f(c) \cdot f(0)$

$= 0$

(ii) $f(0) = 1$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \cdot 1$$

$= f(c)$

(ح-ى)

جبر الاتصال :

(4) f,g غير متصلة عند c ⟸ f+g تكون متصلة ~~تكون متصلة~~

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= [x] \\ g(x) &= x - [x] \end{aligned}\right\} \Rightarrow (f+g)(x) = x$$ متصلة

(لاحظ انه باعتبار $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ عند c=0

$(f+g)(x) = 1 + x$ متصلة (x) لأن $(f+g)(0) = f(0) + g(0)$

(5) f,g احداهما غير متصلة ⟸ f.g متصلة عند c

$x=0$ $$\left.\begin{aligned} f(x) &= x \\ g(x) &= [x] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (f.g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= x[x] \end{aligned}$$

(6) هل ؟

$$\left.\begin{aligned} &f \text{ غير متصلة عند } c \\ &g \text{ متصلة عند } c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ ~~تكون~~ fog تكون متصلة عند c (ليس دائماً صحيح)

متصلة $x=0$ $g(x) = \frac{1}{x+3}$

غير متصلة عند $x=0$ $f(x) = \frac{1}{x}$

$(fog)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x+3}\right) = x+3$

متصلة عند $x=0$ لذلك

و متصلة عند 0

f متصلة عند $g(0) = \frac{1}{3}$

⇐ $f\circ g$ متصلة عند 0

② $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f^n)(x) = [f(x)]^n$

f متصلة على D ⇐ f^n أيضاً متصلة على D

الطريقة الأولى : الاستنتاج الرياضي

(i) $n = 2$

$f^2 = f \cdot f \longrightarrow$ متصلة على D

(ii) نفرض $n = r$

f^r متصلة على D

(iii) $n = r+1$

$f^{r+1} = f^r \cdot f \longrightarrow$ متصلة على D

متصلة فرضاً ↙ متصلة (معطى) ↙

الطريقة الثانية : باستخدام التحصيل

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$h(x) = x^n$

$(h\circ f)(x) = h(f(x)) = (f(x))^n = f^n(x)$

① f متصلة $\forall c \in D$

② $f(c) \in \mathbb{R}$

h متصلة على $\mathbb{R}$

$\because$ h متصلة على $f(c)$

$\therefore$ $h \circ f$ تكون متصلة عند c

$$(h \circ f)(x) = h[f(x)] = (f(x))^n = f^n(x)$$

ثانياً: باستخدام التحصيل

$|f|$ متصلة $\overset{?}{\Leftarrow}$ f متصلة على D

$h(x) = |x|$ متصلة على $\mathbb{R}$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = |f(x)|$$

$\therefore$ $h \circ f$ متصلة $\Leftarrow$ $|f(x)|$ متصلة

$f(x)$ متصلة على D , $f(x) \geq 0$ $\quad f: D \longrightarrow (0,\infty)$

$h = \sqrt{x}$ متصلة على D $\quad h: (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \sqrt{f(x)}$$

متصلة على D

③ $$\max\{a,b\} = \frac{1}{2}[a+b+|b-a|]$$

$$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}[a+b-|a-b|]$$

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

f, g متصلتان

$\max(f,g)$, $\min(f,g)$

$\max(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)| \right]$$

$\min(f,g)_{(x)} = \min\{f(x), g(x)\}$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)| \right]$$

± لدوال متصلة

f, g متصلة

$f+g$ متصلة

$f-g$ متصلة

$|f-g|$ متصلة

$\Rightarrow \min\{f,g\}, \max\{f,g\}$

دوال متصلة على D

الاثنين: ١٠/٧

(٣ - ٥)

① $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

(i). f متصلة

(ii) $\forall x \in [a,b] \quad \exists y \in [a,b]$

$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$

$\overset{?}{\Rightarrow} \exists \ c \in [a,b] \quad f(c)=0$

$y_1 \in [a,b] \xrightarrow{(ii)} \exists \ y_2 \in [a,b] \ \ni |f(y_1)| \leq \frac{1}{2}|f(y_2)|$

$y_2 \in [a,b] \Rightarrow \exists y_3 \in [a,b] \ \ni |f(y_2)| \leq \frac{1}{2^2}|f(y_3)|$

$|f(y_n)| < \varepsilon$

$\vdots$

$y_{n-1} \in [a,b] \Rightarrow \exists \ y_n \in [a,b] \quad |f(y_{n-1})| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(y_n)|$

$(y_n) \in [a,b] \quad (y_n)$. محدودة $\Rightarrow \exists \ y_{n_k}$ متقاربة $\quad y_n \to c$

$\Rightarrow |f(y_{n_k})| < \varepsilon$

f من اتصال

$f(c) = \lim f(y_{n_k}) = 0$ من اتصال f

$\lim y_{n_k} = c \quad \xrightarrow[(a,b)]{}$

$y_{n_k} \to c \qquad f(y_{n_k}) \to f(c)$

$\Rightarrow f(c)=0 \qquad c \in [a,b]$

② $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

(ii) $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ — متصلة (1) f

$\overset{?}{\Longrightarrow} \exists \alpha > 0 \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in [a, b]$

نظرية: f متصلة على $[a, b]$ $\Longleftarrow$

(i) $f([a, b])$ محدودة

(ii) $\operatorname{Inf} f([a, b]) = \min \{ f(x), x \in [a, b] \}$

(iii) $\operatorname{Sup} f([a, b]) = \max \{ f(x), x \in [a, b] \}$.

$\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \operatorname{Inf} \{ f(x) : x \in [a, b] \}$

$f(\alpha) = \operatorname{Sup} \{ f(x) : x \in [a, b] \}$

: f متصلة على $[a, b]$

$\Longrightarrow \exists c \in [a, b] \quad \alpha = f(c) = \underset{\operatorname{Inf}}{\min} \{ f(x) \quad x \in [a, b] \}$

$f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in [a, b]$

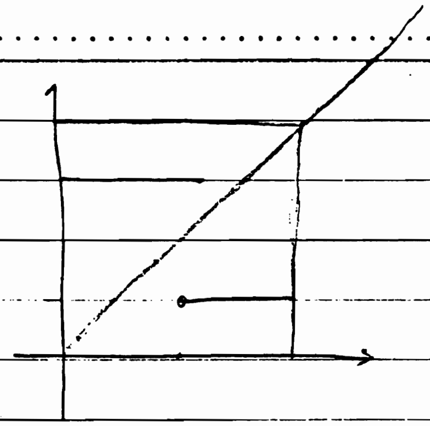
$c \in [a, b] \qquad \alpha = f(c) > 0$

$\operatorname{Inf} \{ a \} \geq 0$

③ مثال: ليس شرط ضرور حقيقية

$f(x) = x^2 + 1$

(4)



$$f(x) = \begin{cases} 3/4 & 0 < x \le 1/2 \\ 1/4 & 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

مثال آخر $f(x) = [x]$

نقطة الثابت هي 0 ولكن $0 \notin (0,1)$

المسائل 5 - 8

f, g متصلتين على $[a,b]$

? $\exists x_0 \in (a,b) \ni f(x_0) = g(x_0)$

نعرف الدالة

(i) $F(x) = f(x) - g(x)$

متصلة على $[a,b]$

(ii) $F(a), F(b)$

تختلفين الإشارة

$\exists x_0 \in [a,b) \ni F(x_0) = 0 = f(x_0) - g(x)$

$\Longrightarrow f(x_0) = g(x_0)$

(5) f, g متصلتان على $[a,b]$

$f(a) \geq g(a)$
$f(b) \leq g(b)$ $\Longrightarrow \exists x_0 \; [a,b] \equiv f(x_0) = g(x_0)$

(I) $f(a) = g(a)$
$x_0 = a$

(II) $f(b) = g(b)$
$x_0 = b$

III $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$

$F(x) = f(x) - g(x)$

متصلة على $[a,b]$

$F(a) = f(a) - g(a) > 0$
$F(b) = f(b) - g(b) < 0$

$\Longrightarrow \lambda = 0 \quad \exists \; x_0 \in (a,b)$

$F(x_0) = 0$

$f(x_0) - g(x_0) = 0$

$\Longrightarrow f(x_0) = g(x_0)$

(6) $\cos x = x$ لها حل على $(0, \pi/2)$

$f(x) = \cos x - x$ (or $x - \cos x$)

$\cos x$, x متصلة على $\mathbb{R}$

$x, \cos x$ متصلة على $[0, \pi/2]$

$f(x) = \cos x - x$ متصلة على $[0, \pi/2]$

$f(0) = 1 > 0$

$f(\pi/2) = \cos \pi/2 - \pi/2 = -\pi/2 < 0$

$\Longrightarrow \exists\ c \in [0, \pi/2)$

$f(c) = 0$

$\cos c - c = 0$

$\cos c = c$

أي أن c تحقق $\cos x = x$

② $x \cdot 2^x = 1$ لها حل في $(0,1)$

$g(x) = x\, 2^x - 1$ متصلة على $\mathbb{R}$

: متصلة $[0,1]$

$g(0) = -1 < 0$

$g(1) = 2 - 1 = 1 > 0$

$\Longrightarrow \exists\ c \in (0,1)$

$g(c) = 0$

$c \cdot 2^c - 1 = 0$

$c \cdot 2^c = 1$

: ٢ تحقق المعادلة $x \cdot 2^x = 1$

8). مثال في النظري

9). عين فترة طولها ١ تحوي حلاً للمعادلة

$$xe^x = 1$$

$f(x) = xe^x - 1$

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = e - 1 > 0$

$[0, 1]$

10). فترة طولها $\frac{1}{2}$ بحيث تحتوي على جذر للمعادلة

$$x^3 - 6x + 2.5 = 0$$

$f(x) = x^3 - 6x + 2.5$

$f(0) = 2.5 > 0$

$f(1) = \quad < 0$

$(0, 1)$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$f(\frac{1}{2}) \quad < 0$

$\frac{1}{8} - 3 + 2.5$ $\qquad (0, \frac{1}{2})$

$0.125 - 3 + 2.5 < 0$

(11) (i) متصلة $F:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

(ii) $f(0)=f(1)$

$\Longrightarrow \exists\ c\in[0,\tfrac12]$ بحيث $f(c)=f(c+\tfrac12)$

[لانضع ١ لأن $f:[0,1]$ $f(1+\tfrac12)$]

$g(x)=f(x)-f(x+\tfrac12)$ $\qquad x\in[0,\tfrac12]$

(i) g متصلة على $[0,\tfrac12]$

$g(0)=f(0)-f(\tfrac12)$

$g(\tfrac12)=f(\tfrac12)-f(1)$
$\qquad =f(\tfrac12)-f(0)$

لدينا احتمالات:

(i) $f(0)=f(\tfrac12)$ $\longrightarrow$ تحقق العلاقة المطلوبة $c=0$

$f(\tfrac12)=f(\tfrac12)=f(0)$ $\longrightarrow$ $c=\tfrac12$

$f(\tfrac12)=f(\tfrac12+\tfrac12)=f(1)$

(ii) $f(0)\neq f(\tfrac12)$

$g(0)$, $g(\tfrac12)$ لهما إشارتان مختلفتان

$\Longrightarrow \exists\ c\in(0,\tfrac12)$

$g(c)=0=f(c)-f(c+\tfrac12)$

$\Longrightarrow f(c)=f(c+\tfrac12)$

c تحقق العلاقة المطلوبة $\qquad c\in[0,\tfrac12]$

K_1 , K_2 ⟵ مغلقة

⟵ محدودة

$K_1 \cap K_2$ ⟶ مغلقة

$K_1 \cup K_2$ ⟶ مغلقة

$K_1 \cap K_2 \subset K_1 , K_2$ محدودة

$K_1 \cup K_2$ محدودة ⟶ max

④ $i \in I$ K_i متراصة ⟵ K_i مغلقة $\forall i$

K_i محدودة $\forall i$

$\forall i$ $\cap K_i \subset K_i$ ⟹ مغلقة (محدودة) ⟸ متراصة

$\cup K_i$ لا يشترط ان اتحاد عدد غير منته من الفترات المغلقة يكون مغلقاً

⑤ K متراصة ⟵ $\sup K , \inf K \in K$

K متراصة

مغلقة / محدودة

محدودة

$\sup K , \inf K$

⟹ $\sup K , \inf K \in K$ (بواسطة المتتاليات)

موجودة

6) D مجموعة نقطة c

$d(c,D) = \operatorname{Inf}\{|x-c|,\ x\in D\}$

إذا كانت D متراصة $\longrightarrow$ $\exists a\in D$

أقرب ما يمكن لـ c

الحل.

$f(x) = |x-c|$ دالة متصلة على D

$\because$ D مغلقة

$\longleftarrow$ f تأخذ قيمتها الصغرى عند نقطة $a\in D$

$f(a) = |a-c| = \underset{\operatorname{Inf}}{\min}\{|x-c|,\ x\in D\}$

(7). $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

D متراصة

f متصلة

$A = \{x\in D;\ \ 0\leq f(x)\leq 1\}$ ⟸ (1) $A\subset D$

$\because$ A محدودة

$\therefore$ A متراصة ?

$\forall\ a_n\in A$

$a_n \longrightarrow c$ $\quad f(a_n)\longrightarrow f(c)$ $\quad$ f متصلة

$0\leq f(a_n)\leq 1$

$0\leq \lim f(a_n)\leq 1$

f متصلة $\quad 0\leq f(c)\leq 1$

A مغلقة $\Longleftarrow$ $c\in A$

الثلاثاء ٧/١٨

الاتصال المنتظم (الايوجد اتصال منتظم عند نقطة)

الاتصال المنتظم على مجموعة

$f(x) = \sqrt{x}$

(I) $[1, \infty)$

$|f(x) - f(t)| = |\sqrt{x} - \sqrt{t}| = \left| \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{t}}{\sqrt{x} + \sqrt{t}} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{t}) \right|$

$= \dfrac{|x - t|}{\sqrt{x} + \sqrt{t}} < \dfrac{1}{2} |x - t| < |x - t| < \varepsilon$

لأن $[1, \infty)$

$x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1$

$t \geq 1 \Rightarrow \sqrt{t} \geq 1$

$\sqrt{x} + \sqrt{t} \geq 2$

$\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{t}} \leq \dfrac{1}{2}$

$\therefore |f(x) - f(t)| < \varepsilon$ لكل $|x - t| < \delta = \varepsilon$

(II) $f(x) = \sqrt{x}$ على $[0, 2]$

f متصلة على $[0, 2]$

$[0, 2]$ متراصة

$\Leftarrow$ f متصلة بانتظام على $[0, 2]$

اتصال منتظم على $[1, \infty)$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$

$\forall_{x} t \in [1, \infty) \quad |x - t| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$

اتصال منتظم على $[0,2]$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2(\varepsilon) > 0$

$\forall x,t \in [0,2] \quad |x-t| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$

$$\delta = \min \{ \delta_1 , \delta_2 \}$$

$\forall x,t \in [0,\infty) \quad |x-t| < \delta \quad |f(x) - f(t)| < \varepsilon$

تمارين (٤-٥) ص ٣٨

(1)

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad D = (0, \infty)$

$x_n = \dfrac{1}{2n} \qquad t_n = \dfrac{1}{n}$

$x_n - t_n = \dfrac{-1}{2n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$

$f(x_n) = (2n)^2$

$f(t_n) = n^2$

$f(x_n) - f(t_n) = 3n^2 \not\longrightarrow 0$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall \; x,t \in \mathbb{R}$

$f(x) - f(t) = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{t^2+1}$

$$= \frac{t^2 - x^2}{(t^2+1)(x^2+1)}$$

$$|f(x) - f(t)| = \left| \frac{(t-x)(t+x)}{(t^2+1)(x^2+1)} \right|$$

ثابت $\leq k$

$$= \frac{|t-x|\,|t+x|}{(t^2+1)(x^2+1)} \leq |t-x| \frac{(|t|+|x|)}{(t^2+1)(x^2+1)} \leq k\,|t-x| < \varepsilon$$

$$|t-x| < \frac{\varepsilon}{k} = \delta$$

$$\frac{|t|+|x|}{(t^2+1)(x^2+1)} = \frac{|t|}{(t^2+1)(x^2+1)} + \frac{|x|}{(t^2+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{|t|}{(x^2+1)(t^2+1)} \leq \frac{|t|}{(t^2+1)} = \frac{|t|}{|t|^2+1} < 1$$

(i) في حالة $|t| > 1$

$$\left.\begin{array}{l} |t| > 1 \\ |t|^2 > |t| \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|t|}{|t|^2+1} < 1$$

(ii) في حالة $|t| < 1$ كسر

$$|t|^2 < |t|$$

$$\frac{|t|}{|t|^2+1} < 1$$

وبنفس الطريقة نثبت،

$$\frac{|x|}{(x^2+1)(t^2+1)} < 1$$

$\because \forall x, t \in \mathbb{R}$

$|f(x) - f(t)| \leq 2\,|x - t| < \varepsilon$

$\therefore$

$|f(x) - f(t)| < \varepsilon$

بشرط $\quad |x - t| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

مثال ٢ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \sin x$

$\sin A - \sin B = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$|\sin x| \leq |x|$

$|g(x) - g(t)| = |\sin x - \sin t|$

$= \left| 2 \sin \frac{(x-t)}{2} \sin \frac{(x+t)}{2} \right|$

$= 2 \left| \sin \left(\frac{x-t}{2}\right) \right| \left| \sin \left(\frac{x+t}{2}\right) \right|$

$\leq 2 \left| \frac{x-t}{2} \right| \cdot 1 < \varepsilon$

$|g(x) - g(t)| < \varepsilon$

$|x - t| < \delta = \varepsilon$

(10) $f(x) = x \sin x$ غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$

$x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$

$t_n = 2n\pi$

$x_n - t_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$$f(x_n) - f(t_n) = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) - 2n\pi \underbrace{\sin 2n\pi}_{0}$$

$$= \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2n\pi \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{bounded}} \longrightarrow 0$$

$$= 2\pi \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}}_{1} \longrightarrow 2\pi \not\longrightarrow 0$$

(3) $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$

f, g متصلتان بانتظام على D

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f+g$ متصلة بانتظام

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 , \delta_2(\varepsilon) > 0$

$\forall t, x \in D$

$|x-t| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon/2$

$|x-t| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(t)| < \varepsilon/2$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$|x-t| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (f(t) + g(t))|$

$$= |(f(x) - f(t)) + (g(x) - g(t))|$$

$$< |f(x) - f(t)| + |g(x) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

نقرة (ب) برهن 16

---

4 $f \cdot g$ متصلة بانتظام على D $\Leftarrow$ (i) f, g محدودتان على D ، (ii) f, g متصلتان بانتظام على D

(i). $\exists K, M > 0$ $\quad |f(x)| \le K \quad \forall x \in D$

$|g(x)| \le M \quad \forall x \in D$

(ii). $\forall \varepsilon > 0, \; \exists \; \delta_1(\varepsilon) > 0$

$\delta_2(\varepsilon) > 0$

$|x-t| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$|x-t| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2K}$

$f(x) = f(x) \Rightarrow (f(-x))' = f'(x)$

$f'(x) = -f'(-x)$

$f'(-x) = -f'(x)$

$f'(-x) = -f'(x)$

f' دالة فردية

g دالة فردية

$g(-x) = -g(x)$

$g'(-x)(-1) = -g'(x)$

$g'(-x) = g'(x)$

g' دالة زوجية

مثال لذلك $f(x) = \cos x$ ، $g(x) = \sin x$

أو $f(x) = x^2$ $g(x) = x^3$

الاثنين ٢٠٢٤/٧

⑥ $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = \cos\left(x + \pi/2\right) = \sin\left[\left(x + \pi/2\right) + \pi/2\right]$

$= \sin\left(x + 2\,\pi/2\right)$

$f^{(n)}x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$f^{(18)}(x) = \sin\left(x + 9\pi\right) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

بنفس الطريقة

$g(x) = \cos x \quad , \quad g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\,\pi/2\right)$

$f(x) = x^{m}$

$f^{(n)}(x) = m\,(m-1) \cdots \left(m-(n-1)\right)\, x^{m-n} \qquad 0 < n < m$

إذا كانت $n = m$

$f(x) = x^{m}$

$f^{(m)}(x) = m!$

إذا كانت $n > m$

$f(x) = x^m$

$f^{(n)}(x) = 0$

(7)

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \begin{cases} \to \lim_{x \to 0^+} \frac{x^n}{x} = 0 \\ \to \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \begin{cases} \to \lim_{x \to 0^+} \frac{n x^{n-1}}{x} = 0 \\ \to \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = 0 \end{cases}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f^{(n-2)}(0) = 0$$

$$f^{(n-1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0)}{x} \begin{cases} \to \lim_{x \to 0^+} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)x^2}{x} = 0 \\ \to \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{n(n-1) \cdots (1)\, x}{x} \neq 0 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$ غير متواجدة

$\therefore$ $f^{(n)}(0)$ غير متواجدة

---

(10). f قابلة للاشتقاق عند c

$\Leftarrow$ f تحقق شرط ليبشتز في جوار لـ c ؟

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \ell = f'(c)$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$

لكل $|x-c| < \delta$ ينتج $\Leftarrow$ $\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \ell\right| < \varepsilon$ $\left|\,\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| - |\ell|\,\right| \leq$

$$\Rightarrow \frac{|f(x) - f(c)|}{|x - c|} < |\ell| + \varepsilon = K$$

$\forall x \in V(c)$ $\quad |f(x) - f(c)| < K\, |x - c|$

$|x - c| < \delta$

(12) $f(x) = |x^n|$

(I) n فردية

$$f(x) = |x^n| = |x|^n = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ -x^n & x < 0 \end{cases}$$

$x > 0 \quad |x| = x \Rightarrow |x^n| = x^n$

$x < 0 \quad |x| = -x \Rightarrow |x|^n = (-x)^n$

$= (-1)^n x^n = -x^n$

$$f^{(n-1)} = \begin{cases} \boxed{n(n-1) \cdots 2}\, x & x \geq 0 \\ -n(n-1) \cdots x & x < 0 \end{cases}$$

x

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = K$$

$$\lim_{x \to 0^-} \qquad = -K$$

$f^{(n)}(0)$ غير موجودة

(II) n زوجية :

$$|x^n| = (\pm x)^n = x^n$$

291 (٦-٢) نظرية القيمة المتوسطة

① $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

المقياس قابل للاشتقاق عند c لكل $c \in \mathbb{R}$

$f(x) = |x(x-1)|$ ماعدا عند الصفر

مثال آخر:

$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ $\quad D_f = [0,1]$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$f'(c) = \frac{1-2c}{2\sqrt{c(1-c)}} = 0$$

if $1-2c = 0 \Longrightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,1)$

② $f(x) = |x|$ $\quad [-1,1] = [a,b]$

f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0 \in (-1,1)$

$f(b) = 1 \quad , \quad f(a) = 1$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Longrightarrow \nexists\ c \in (-1,1) \quad f'(c) = 0$$

لأن

$$f'(c) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

(3)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \qquad [-1,2]$$

f متصلة على $[-1,2]$

وغير قابلة للاشتقاق على $(-1,2)$ لـ :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(4) $|\cos x - \cos y| \le |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

ولنفرض :. $x<y$ $\qquad \forall x,y \in \mathbb{R}\ ,\ x \ne y$

$[x,y]$ $\qquad f(x) = \cos x$

f متصلة على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ متصلة على $[x,y]$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ قابلة للاشتقاق على (x,y)

∴ من نظرية القيمة المتوسطة $\Leftarrow$ $\exists\ x<c<y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = -\sin c$$

$$\left| \frac{\cos x - \cos y}{x-y} \right| = |-\sin x| \le 1$$

$|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$

بنفس الطريقة :- $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

: دالتي $\sin x$, $\cos x$ متصلتين باستخدام

(لازمنا كيتفاء شرط ليبشتز)

---

⑤ $f''(x)=0$

$\overset{?}{\Rightarrow} f(x) = c_1 x + c_2 \qquad \forall x \in (a,b)$

$\because f''(x)=0 \Rightarrow f'(x) = c_1 \qquad \forall x \in (a,b)$

نعرف $g(x) = f(x) - c_1 x \qquad \forall x \in (a,b)$

$g'(x) = f'(x) - c_1 = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

$\therefore g = c_2$

$c_2 = f(x) - c_1 x$

$\Rightarrow f(x) = c_1 x + c_2$

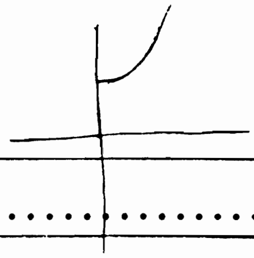
في حالة $f'''(x)=0$ نحصل على معادلة من الدرجة الثانية

ملاحظة: $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) < g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$

$F(x) = g(x) - f(x) \longrightarrow F'(x) > 0$

$F(x)$ متزايدة فعلياً



7) ? $x < \tan x \quad \forall x \in (0, \pi/2)$

$f(x) = \tan x - x \qquad (0, \pi/2)$

$f'(x) = \sec^2 x - 1 > 0 \qquad (\because \sec(x) > 1 \quad \forall x > 0)$

f تزايدية فعلياً

$0 < x \Rightarrow 0 = f(0) < f(x)$

$\tan x - x = f(x) > 0 \qquad \forall \quad 0 < x < \pi/2$

$\tan x - x > 0 \qquad \forall x \in (0, \pi/2)$

$\tan x > x$

8) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) < g'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$? \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \qquad f(x) - f(a) \le g(x) - g(a)$

$\forall x \in [a, \infty)$

$F(x) = g(x) - f(x) \qquad x \in [a, \infty)$

$F'(x) = g'(x) - f'(x) > 0 \qquad \forall x \in [a, \infty)$

$F(x) > F(a)$

$g(x) - f(x) > g(a) - f(a)$

$g(x) - g(a) > f(x) - f(a)$

(10) $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ م

f تحقق شرط ليبشتز على (a,b) $\Longleftarrow$ (i) f قابلة للاشتقاق

(ii) f' محدودة على (a,b)

من (ii) $\forall x \in (a,b) \quad |f'(x)| \leq K = \operatorname{Sup}\{|f'(x)| : x \in (a,b)\}$

$\forall x, t \in (a,b)$

$[x,t] \subset (a,b)$

f متصلة على $[x,t]$

وقابلة للاشتقاق على (x,t)

تطبيق نظرية القيمة المتوسطة

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(c) \qquad c \in (x,t) \subset (a,b)$$

$|f(t) - f(x)| = |t - x|\,|f'(c)| = K\,|t - x|$

∴ تحقق شرط ليبشتز

مثال معاكس ؟!

(11) - $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f متصلة على $[a,b]$

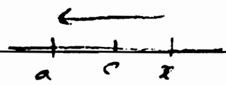
قابلة للاشتقاق على (a,b) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f'(a) = l$

If $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$

$\forall x \in [a,b]$

الدالة f تحقق شرطي نظرية القيمة المتوسطة على $[a,x]$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \qquad a < c < x$$



$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(c)$$

$a < c < x$

$x \to a \Longrightarrow c \to a$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(c) = l$$

مسائل: ايجاد القيم العظمى والصغرى المطلقة على فترة معطاة. (12), (13)

(تتغير هذه القيم حسب كل فترة معطاة).

14)

① f متصلة على $[0,\infty)$

② f قابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$

③ f' متزايدة على $(0,\infty)$

④ $f(0)=0$

$\Longrightarrow$ $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ متزايدة على $(0,\infty)$?

$$g'(x)=\frac{x f'(x)-f(x)}{x^2} \quad \text{—— (1)} \qquad \forall x\in(0,\infty)$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة f في الفترة $(0,x)$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c) \qquad 0<c<x$$

$$f(x)=x f'(c)\le x f'(x)$$ (لأن f' متزايدة)

$$f(x)\le x f'(x)$$

$$x f'(x)-f(x)\ge 0 \quad \text{—— (2)}$$

$\therefore\ g'(x)\ge 0 \quad \forall x\in(0,\infty)$

$\therefore$ g متزايدة على $(0,\infty)$

15) $a>b>0$ $\qquad n\in\{2,3,\ \ \}$

$$a^{\frac{1}{n}}-b^{1/n}<(a-b)^{1/n}$$

$$f(x) = x^{1/n} - (x-1)^{1/n} \qquad [1, \infty)$$

f متصلة (لاحظ الفترة)

$$f'(x) = \frac{1}{n}\left[x^{\frac{1}{n}-1} - (x-1)^{\frac{1}{n}-1} \right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\underbrace{x^{1-\frac{1}{n}}}_{>0}} - \frac{1}{\underbrace{(x-1)^{1-\frac{1}{n}}}_{>0}} \right] < 0$$

$$x > x-1$$

$$x^{1-\frac{1}{n}} > (x-1)^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} < \frac{1}{(x-1)^{1-\frac{1}{n}}}$$

$\therefore$ f متناقصة على $[1, \infty)$

$$f(1) > f\left(\frac{a}{b}\right) \quad \Leftarrow \quad a > b$$

لأن $\left(\frac{a}{b}\right) > 1$ ، f متناقصة

$$f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} - \left(\frac{a}{b} - 1\right)^{1/n}$$

$$f(a/b) = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} - \frac{(a-b)^{1/n}}{b^{1/n}} < 1 = f(1)$$

$$\frac{a^{1/n} - (a-b)^{1/n}}{b^{1/n}} < 1$$

$$a^{1/n} - (a-b)^{1/n} < b^{1/n}$$

$$a^{1/n} - b^{1/n} < (a-b)^{1/n}$$

(16) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f(0)=0$$

$$f(1)=f(2)=0$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists\ c_1, c_2, c_3 \in (0,2)$$

بحيث أن.

$$f'(c_1) = -\frac{1}{2} = \frac{-22}{44}$$

$$f'(c_2) = -\frac{3}{4} = \frac{-33}{44}$$

$$f'(c_3) = \frac{-1}{11} = \frac{-4}{44}$$

$f(0)=0$ $\quad$ $f(1)=-1$ $\quad$ $f(2)=-1$

$0 \quad 1 \quad 2$

(I) تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على $[0,2]$

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c_1) \qquad c_1 \in (0,2)$$

$$\frac{-1-0}{2} = f'(c_1) \Rightarrow f'(c_1) = -\frac{1}{2} \qquad c \in (1,2)$$

(II) - تطبيق نظرية رول على $[1,2]$

$$f(1) = f(2) = -1$$

f متصلة على $[1,2]$ $\Longrightarrow$ $\exists\ d \in (1,2)$

قابلة للاشتقاق على $(1,2)$ $\qquad f'(d)=0 \qquad d \in (1,2) \subset (0,2)$

$f(1)$ $\quad$ $f'(c_1)$ $\quad$ $f'(c_3)$ $\quad$ $f'(d)=0$

$-1 \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{-1}{11} \quad 0$

$f(d_2)$

على الفترة (c_1, d) أو (d, c_1)

نطبق نظرية داربو $f'(c_1) = -\frac{1}{2}$, $f'(d) = 0$

$$f'(c_1) = -\frac{1}{2} < \lambda = -\frac{1}{11} < 0 = f'(d)$$

$$\Leftarrow \quad \exists\, c_3 \in (c, d) \subset (0,2) \Rightarrow f'(c_3) = \frac{-1}{11}$$

نطبق نظرية القيمة المتوسطة على $[0,1]$

$d_2 \in (0,1) \subset (0,2)$

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(d_2)$$

$$f'(d_2) = -1$$

في الفترة (d_2, c_1) أو (c_1, d_2)

$f'(c_1) = -\frac{1}{2}$, $f'(d_2) = -1$

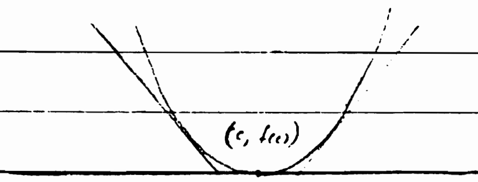
$$f'(d_2) = -1 < \lambda = -\frac{3}{4} < f'(c_1) = -\frac{1}{2}$$

$$\exists\, c_2 \in (0,2) \quad (c_2 \in (c_1, d_2) \subset (0,2))$$

$$f'(c_2) = \frac{-3}{4}$$

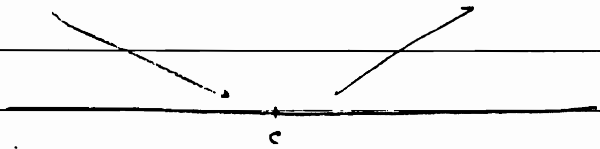
(17)

- اختبار المشتقة الأولى



$x_1 < c$ $\quad f(x_1) > f(c)$

$x_2 > c$ $\quad f(x_2) > f(c)$



زاوية حادة $+$ $\quad$ $-$ زاوية منفرجة

- اختبار المشتقة الثانية .. شرط للنوع $\boxed{f'(c) = 0}$

صغرى محلية $\Longrightarrow$ $f''(c) > 0$

عظمى محلية $\Longrightarrow$ $f''(c) < 0$

برهان اختبار المشتقة الثانية

$f'(c) = 0$ $\quad$ $x = c$ نقطة حرجة للدالة

الدالة f لها نهاية صغرى محلية $\Longrightarrow$ $f''(c) > 0$

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

$$: \forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0$$

$$0 < |h| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f'(c+h)}{h} - f''(c) \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f'(c+h)}{h} - f''(c) < \varepsilon$$

$$f''(c) - \varepsilon < \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \varepsilon$$

ε>0 اختيار

$\varepsilon = \frac{f''(c)}{2}$

$$0 < \frac{f''(c)}{2} < \frac{f'(c+h)}{h} < \frac{3}{2} f''(c)$$

$c-h \quad c \quad c+h$

$$h \to 0^- \quad \frac{f'(c+h)}{h} > 0$$

$$h < 0 \Longrightarrow f'(c+h) < 0$$

$h \to 0^+$

$$h > 0 \longrightarrow f'(c+h) > 0$$

c

$f' < 0 \qquad f' > 0$

مثال معاكس:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 0}$$ النقطة الحرجة

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(c) = f''(0) = 0$$

f'

$+ \quad 0 \quad +$

$-$

لوبيتال

① $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ موجودة في $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to c} g(x) = 0$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x \to c} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}}_{\text{فرضاً } l \text{ = موجودة}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to c} g(x)}_{=0} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = 0$$

② $f, g = ?$

فالبديل للاستفهام على $(0,\infty)$

$g(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (0,\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \nexists$ on $\overline{\mathbb{R}}$

$= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} \quad \nexists$$

المثال : $f(x) = x \qquad g(x) = x^2$

صحيح في حالة $\mathbb{R}$ فقط وليس في حالة $\overline{\mathbb{R}}$ التي تشمل $+\infty$ و $-\infty$)

(3)

عرف دالتين f و g في جوار 0 بحيث

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g(x) = x^2 - 1 \qquad g'(x) = 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x} \quad \nexists$$

(4)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\sin x - 1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} (\tan^{-1} x) \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \pi/2 \cdot 0 = 0$$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\frac{1}{x})}{1} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^{0} = 1$

$x_0 \leftarrow g(x)$

$e^{g(x)} = (f\circ g)(x) = f[g(x)]$

$f(x) = e^{x}$

g متصلة على x_0

f متصلة على $g(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{g(x)\to g(x_0)\\ x\to x_0}} f[g(x)] = f(g(x_0))$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

ملاحظة :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x} \nexists$

غير موجودة لأن

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{x} \longrightarrow \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{x} \longrightarrow -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \underset{0}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underset{\infty}{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1/x} \quad \begin{matrix}\longrightarrow \infty \\ \longrightarrow \infty\end{matrix}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{1+2/x}\right)\left(\frac{-2}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 0$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$$

$$\infty - \infty$$

$$= \lim_{x\to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{1-\sin x}{\cos x} \quad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

كثيرة حدود تايلور

$\sqrt[3]{1.2}$ $\qquad f(x) = x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) x^{-5/3}$$

$x_0 = 1 \qquad x = 1.2$

$(x - x_0) = 0.2$

$\sqrt[3]{0.9}$

$x = 0.9$

$x_0 = 1$

$f(x) = \sin x \qquad \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \qquad f^{(n+1)}(c) = \sin\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$|R_n(x)| = |f^{(n+1)}(c)| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

باستخدام Ratio Test

نشر $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$

[illegible] $\longrightarrow 0$

[illegible] : $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

١٢١م

١٤٢

٢٦/س