Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار الثاني (1429–1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

أوجد مفكوك فورير للدالة $f(x) = xsinx$ على الفترة $(-\pi, \pi)$

ثم استنتج أن: $\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \cdots = \frac{\pi-2}{4}$

السؤال الثاني:

أ) أوجد متسلسلة فورير للدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$$ حيث: $f(x+4) = f(x)$ واستنتج أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ب) لتكن الدالة f المعرفة على الفترة $(0, \pi)$: بما يلي: $f(x) = cosx$

أوجد مفكوك فورير للإمتداد الزوجي الدوري للدالة $f(x)$. ثم أرسم هذا الإمتداد على الفترة $(-4\pi, 4\pi)$.

السؤال الثالث:

أ) أثبت أن تحويل المتغير $x = cost$ يحول معادلة لوجوندر: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ إلى معادلة

بما دالة ثقل: وهي: $sint\frac{d^2y}{dt^2} + cost\frac{dy}{dt} + n(n+1)sint.y = 0$

ب) لتكن $P_n(x)$ كثيرات حدود لوجوندر المتعامدة على [-1,1]. أوجد الحدود الأربعة الأولى من منشور لوجاندر للدالة:

$f(x) = |x|, -1 < x < 1)$. للتذكير: $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \frac{3}{2}(3x^2 - 1)$

P1

إجابة السؤال الأول

$$f(x) = x\sin x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

بما أن f زوجية فإن $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\pi\cos\pi\right) = 2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right]dx$$

$$= \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} \qquad n \neq 1$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n^2-1}$$

$\underline{n=1}$: $a_1 = -\frac{1}{2}$

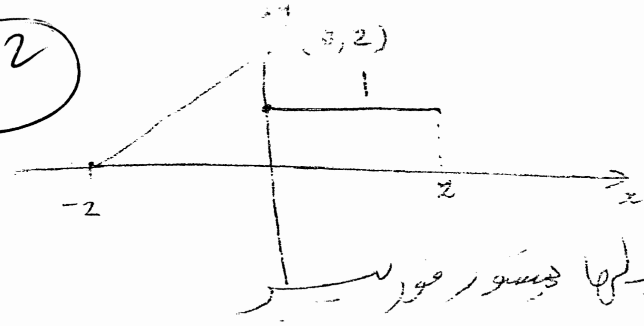
وبالتالي فإن.

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} - \frac{\cos 3x}{3^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \cdots\right)$$

بوضع $x = \frac{\pi}{2}$ نحصل على

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \cdots$$

P2



اجابة السؤال الثاني ٢)

باعتبار أن الدالة f ملساء قطعيا محدودة ودورية فيمكن تمثيلها بمتسلسلة فورير

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} dx = 2$$ ص

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}} - \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] + \frac{1}{2}\,\frac{2}{n\pi}\cancel{\sin\frac{n\pi x}{2}}\Big|_{0}^{2}$$

$$+ \frac{1}{n\pi}\cancel{\sin\frac{\pi n x}{2}}\Big|_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}\right)$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ زوجي} \\ \dfrac{4}{(n\pi)^2}, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{2}{n\pi}\cancel{\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx}\right] - \frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} = \frac{-1}{n\pi}\left[1+(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ فردي} \\ \dfrac{-2}{n\pi}, & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + a_1\cos\frac{\pi x}{2} + a_2\cos\pi x + \cdots + b_1\sin\frac{\pi x}{2} + b_2\sin\pi x + \cdots$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} + \cdots + \frac{4\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)\pi^2}\cdots - \frac{2}{2\pi}\sin\pi x - \frac{2}{4\pi}\sin 2\pi x$$

$$\cdots - \frac{2}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{2}x - \cdots$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}$$

P3

$$\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$ بما ان $x=0$ سـ

أي :

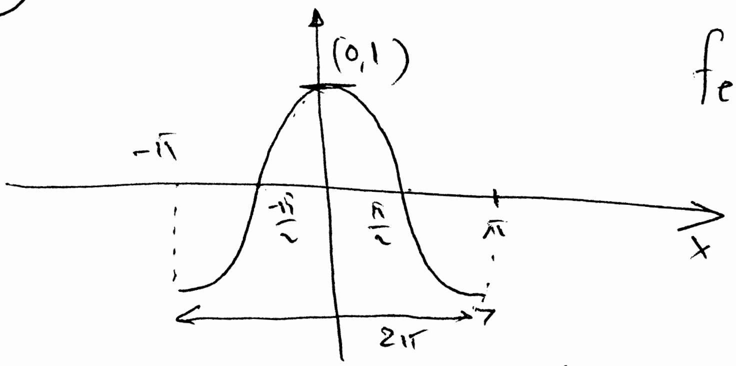
$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

أي ان

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

P4 $f(x) = \cos x , \quad x \in (0, \pi)$ السؤال الثالث (ب.

$$f_e(x) = \begin{cases} \cos x , & x \in (0,\pi) \\ \cos(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$



$$f_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(1+n)x + \cos(1-n)x}{2}$$

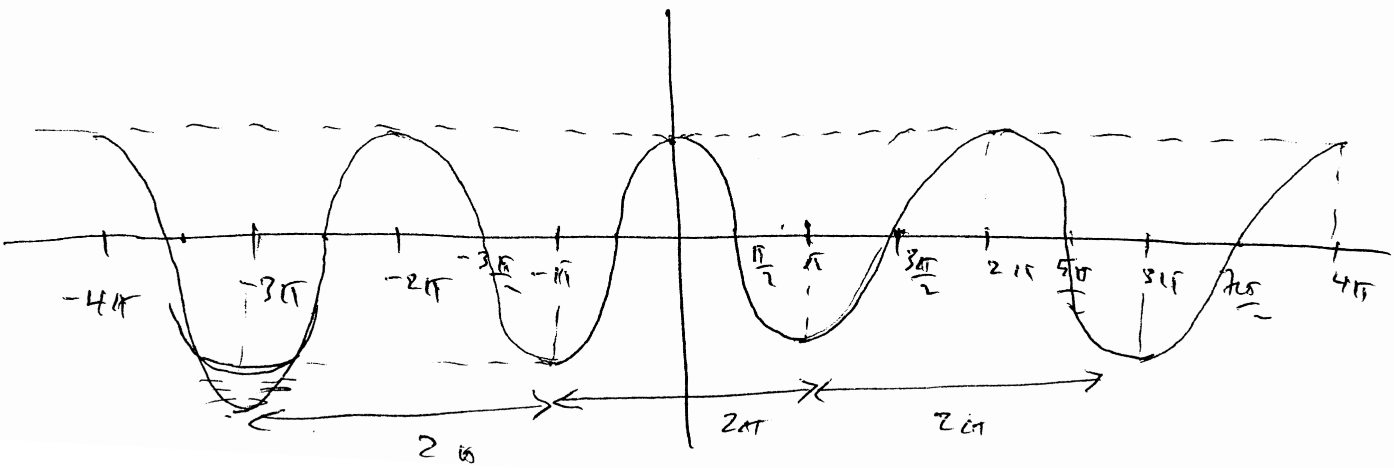
$$= \left. \frac{\sin(1+n)x}{\pi(1+n)} \right|_0^{\pi} + \left. \frac{\sin(1-n)x}{\pi(1-n)} \right|_0^{\pi} \qquad n \neq 1$$

$$= 0$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} x \Big|_0^{\pi} = 1$$

$$f_e(x) = \cos x .$$



(P5)

إجابة السؤال الثالث:

أ)

$$x = \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = -\sin t \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\sin t \frac{dy}{dx}\right) = -\frac{dy}{dx}\cos t - \sin t \frac{d}{dx}\left(-\sin t \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= -\frac{dy}{dx}\cos t + \sin^2 t \frac{d^2y}{dx^2}$$

مطلح لنا ب:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\cos^2 t)\left[\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right]$$

$$-2\cos t\left[-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right] + n(n+1)y = 0$$

أي أن

$$y'' - \frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt} + \frac{2\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt} + n(n+1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t\, y'' + \cos t \frac{dy}{dt} + n(n+1)\sin t \cdot y = 0$$

$W(t) = \sin t$ دالة الثقل هي

ب)

$$f(x) = |x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, P_n\rangle}{\|P_n\|^2} P_n(x)$$

$$\langle f, P_0\rangle = \int_{-1}^{1}|x| = \frac{2}{2} = 1$$

$$\langle f, P_1\rangle = \int_{-1}^{1}|x|\, x\, dx = 0$$

$$\langle f, P_2\rangle = \int_{-1}^{1}|x|\frac{3}{2}(3x^2-1)\,dx = \cancel{\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}|x|x^2 dx} - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,dx$$

$$= -\frac{9}{8}$$

(p6)

$$\|P_0\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\|P_2\|^2 = \frac{9}{4}\int_{-1}^{1} (3x^2-1)^2 dx = \frac{9}{4}\left(\frac{18}{5} - 2 + 2\right) = \frac{81}{20}$$

[illegible]

$$f(x) = |x| = \frac{\langle f, P_0\rangle}{\|P_0\|^2} P_0 + \frac{\langle f, P_1\rangle}{\|P_1\|^2} P_1 + \frac{\langle f, P_2\rangle}{\|P_2\|^2} P_2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} P_0(x) - \frac{5}{18} P_2(x) + \cdots$$