Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار الثاني للفصل الأول (1430-1431) للمقرر 316

السؤال الأول:

أ) لتكن $P_n(x)$ كثيرهت حدود لوجوندر المتعامدة على $[-1,1]$. أوجد منشور الدالة: 3

$f(x) = 1 - x^3$ حيث $-1 < x < 1$ بدلالة $P_n(x)$.

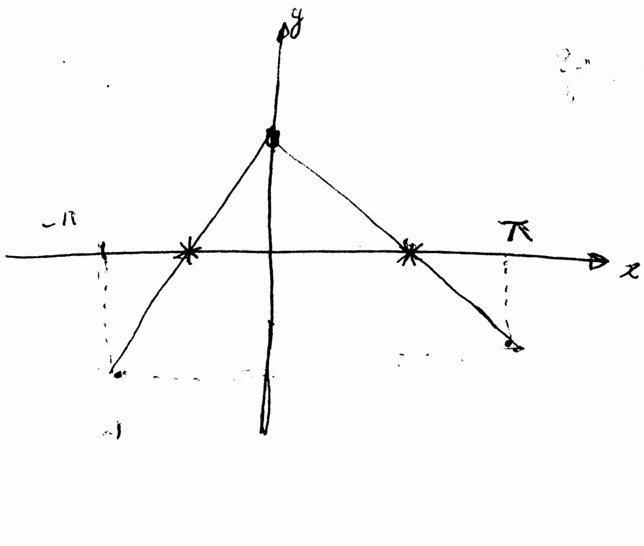
ب) أي من المعادلات التالية تحققها كثيرات حدود لوجوندر: $1)\ xP_n' - nP_n + P_n' = 0$ 9

السؤال الثاني:

أ) أعط الدالة المولدة لكثيرات حدود لوجوندر واستنتج قيم: $P_n(1),\ P_n(-1)$. 3

ب) أوجد مفكوك فوريير للدالة: $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi < x \leq 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi} & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ حيث $f(x + 2\pi) = f(x)$ ثم 4

استنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 2



السؤال الثالث:

أوجد تكامل فوريير للدالة f المعرفة كالتالي: 4

$$f(x) = \begin{cases} |cosx|, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

واستنتج أن: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1-\xi^2} (2\cos(\frac{\pi\xi}{2}) - \xi\sin(\pi\xi))d\xi = \frac{\pi}{2}$ 2

(1)

تصحيح الاختبار الثاني

الفصل الأول ٣٠/٣١

٣١٦ رسص

إجابة السؤال الأول:

أ)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle P_n, f \rangle}{\|P_n\|^2} P_n(x)$$

$$\langle P_0, f \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^3)\, dx = x \Big|_{-1}^{1} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$\langle P_1, f \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^3)x\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{5}$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \Rightarrow \|P_0\| = 1, \quad \|P_1\| = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$f(x) = \frac{\langle P_0, f \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 + \frac{\langle P_1, f \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 + \cdots$$

$$= (1/2)\, P_0 - \frac{3}{5} P_1 + \cdots$$

ب) المعادلة التي تحققها كثيرات حدود لوجندر من المعادلات المعطاة هي:

$$x P_n'(x) - n P_n(x) - P_{n-1}'(x) = 0$$

إجابة السؤال الثاني: الدالة المولدة لكثيرات حدود لوجندر

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, \xi^n = \frac{1}{\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}}$$

(للبرهان أنظر المحاضرة)

$$\underline{x=1}: \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\, \xi^n = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi)^2}} = \frac{1}{1-\xi} \qquad |\xi|<1$$

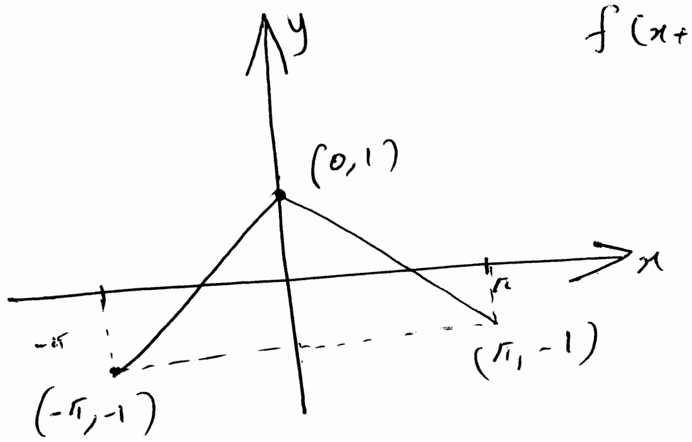
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \Rightarrow P_n(1) = 1$$

$\therefore\ \underline{x=-1}:\quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)\,\xi^n = \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^2}} = \frac{1}{1+\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\xi)^n$

② $\Longrightarrow\quad P_n(-1) = (-1)^n.$

$$f(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{2x}{\pi}, & -\pi < x \le 0 \\[2mm] 1-\dfrac{2x}{\pi}, & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad (ب$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$



f دالة زوجية $\Leftarrow b_n = 0$

وبالتالي فان :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-2\frac{x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[x\Big|_0^{\pi} - \frac{2x^2}{2\pi}\Big|_0^{\pi}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)_0^{\pi} = \frac{-4}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ زوجي} \\ \dfrac{8}{\pi^2 n^2} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

ومنه فان :

$$f(x) \simeq a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots$$

$$\simeq \frac{8}{\pi^2}\cos x + \frac{8}{3^2\pi^2}\cos 3x + \cdots$$

$$\simeq \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

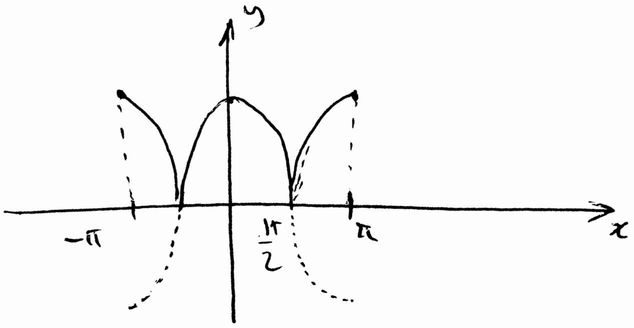
بوضع $x=0$ نجد أن :

$$1 = f(0) \simeq \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(3)

تصحيح السؤال الثالث :

$$f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$



f دالة زوجية

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\xi)\, d\xi$$

$$A(\xi) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(x\xi)\, dx$$

$$A(\xi) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(x\xi)\, dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos(x\xi)\, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(1+\xi)x + \cos(1-\xi)x}{2}\, dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(1+\xi)x + \cos(1-\xi)x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{1+\xi}\sin(1+\xi)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{1-\xi}\sin(1-\xi)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \frac{1}{1+\xi}\sin(1+\xi)x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{1-\xi}\sin(1-\xi)x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \cancel{\frac{1}{1+\xi}\cos\frac{\xi\pi}{2}} + \cancel{\frac{1}{1-\xi}\cos\frac{\xi\pi}{2}}$$

$$+ \frac{1}{1+\xi}\sin\pi\xi + \cancel{\frac{1}{1+\xi}\cos\frac{\pi\xi}{2}} + \frac{1}{1-\xi}\sin\pi\xi + \cancel{\frac{1}{1-\xi}\cos\frac{\pi\xi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right)\sin\pi\xi = \frac{2}{1-\xi^2}\sin\pi\xi$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-2\xi}{1-\xi^2}\sin\pi\xi + \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)}{1-\xi^2}\right]\cos x\xi\, d\xi$$

نضع $x = 0$ نجد أن

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\xi}{1-\xi^2}\sin\pi\xi + \frac{2}{1-\xi^2}\cos\frac{\pi}{2}\xi\right) d\xi$$

ومنه التكامل المطلوب .