مقدمة في البرمجة الخطية

Introduction to Linear Programming

مقدمة في البرمجة الخطية

- **تعريف:**

يقال أن الدالة $f(x_1, \dots, x_n)$ دالة خطية إذا كانت على الصورة

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

بحيث أن $c_1, c_2, \dots, c_n$ هي ثوابت.

- **تعريف:**

لأي دالة خطية $f(x_1, \dots, x_n)$ وثابت b فإن:

$$f(x_1, \dots, x_n) \le b \quad \text{أو} \quad f(x_1, \dots, x_n) \ge b$$

تسمى متراجحة خطية ،

و $f(x_1, \dots, x_n) = b$ تسمى معادلة خطية.

مقدمة في البرمجة الخطية

ملاحظة:

لأي دالة خطية $f(x_1, \dots, x_n)$ وثابت b فإن:

- $f(x_1, \dots, x_n) < b$
- $f(x_1, \dots, x_n) > b$
- $f(x_1, \dots, x_n) \neq b$

لا تستخدم في البرمجة الخطية.

مقدمة في البرمجة الخطية

- **تعريف:**

البرنامج الرياضي يسمى برنامجاً خطياً إذا احتوى على الآتي:

1. دالة هدف خطية في متغيرات القرار $(x_1 , \ldots , x_n)$ و يراد تعظيم قيمتها (maximize) أو تقليل قيمتها (minimize).
2. مجموعة من القيود الخطية في متغيرات القرار في صورة معادلات خطية أو متراجحات خطية.
3. قيود الإشارة (مثل قيود اللا سالبية) على جميع متغيرات القرار.

- جميع البرامج الرياضية التي سبق صياغتها في المحاضرات السابقة هي برامج خطية.

افتراضات البرنامج الخطي

1. التناسب أو النسبية (Proportionality)

- مساهمة كل متغير في قيمة دالة الهدف أو في قيمة الطرف الأيسر للقيد الخطي تتناسب مع قيمة المتغير.

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$ ✓

$$2x_1^2 + x_2 \leq 8$$ X

$$x_1 + \sqrt{x_2} \leq 8$$ X

x_1	$2x_1$	$2x_1^2$
2	4	8
4	8	32
تضاعفت قيمة المتغير	تضاعف إسهام المتغير	تضاعف إسهام المتغير 4 مرات

افتراضات البرنامج الخطي

2. التجميع (Additivity)

- قيمة دالة الهدف هي مجموع العائد من كل متغير على حدة.
- مقدار الاستهلاك لأي مورد في أي قيد هو مجموع استهلاك كل متغير على حدة.

أي أن مساهمة كل متغير في البرنامج الخطي مستقل عن قيمة بقية المتغيرات. علاقة المتغيرات مع بعضها البعض علاقة جمعية فقط $\pm$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \quad \checkmark$$

$$x_1 x_2 + x_3 \leq 5 \quad \text{X}$$

افتراضات البرنامج الخطي

3. الاتصال (Continuity)

جميع متغيرات القرار متغيرات متصلة وليس منها متغيرات متقطعة (صحيحة). أي يسمح للمتغير يأخذ قيم حقيقية (كسرية).

✓ $x_1 \geq 0$

X $x_1 = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4 \ldots$

4. التأكد (Certainty)

جميع معالم النظام محددة بشكل يقيني وليس في النظام أي عوامل احتمالية أو متغيرات عشوائية.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$, $a_1 \sim \text{Normal Distribution}$ X

$b \sim \text{Normal Distribution}$ X

الحل البياني للبرامج الخطية

Graphical Solution of Linear Programs

الحل البياني للبرنامج الخطي

- أي معادلة في متغيرين (أو ثلاثة متغيرات) يمكن تمثيلها بيانياً.
- المعادلة الخطية في متغيرين يتم تمثيلها بيانيا بخط مستقيم.
  - نحتاج معرفة نقطتين على المستقيم
  - أو نقطة على المستقيم وميل المستقيم
- المتراجحة الخطية في متغيرين يتم تمثيلها بيانياً بنصف فضاء مغلق.
  - نحتاج معرفة نقطتين لرسم مستقيم المتراجحة، ونقطة إضافية ليست على المستقيم لتحديد إتجاه تحقق المتراجحة الخطية.
  - تنصف الفضاء الذي تنتمي إليه $\mathbf{R}^2$ إلى نصفين.

الحل البياني للبرنامج الخطي

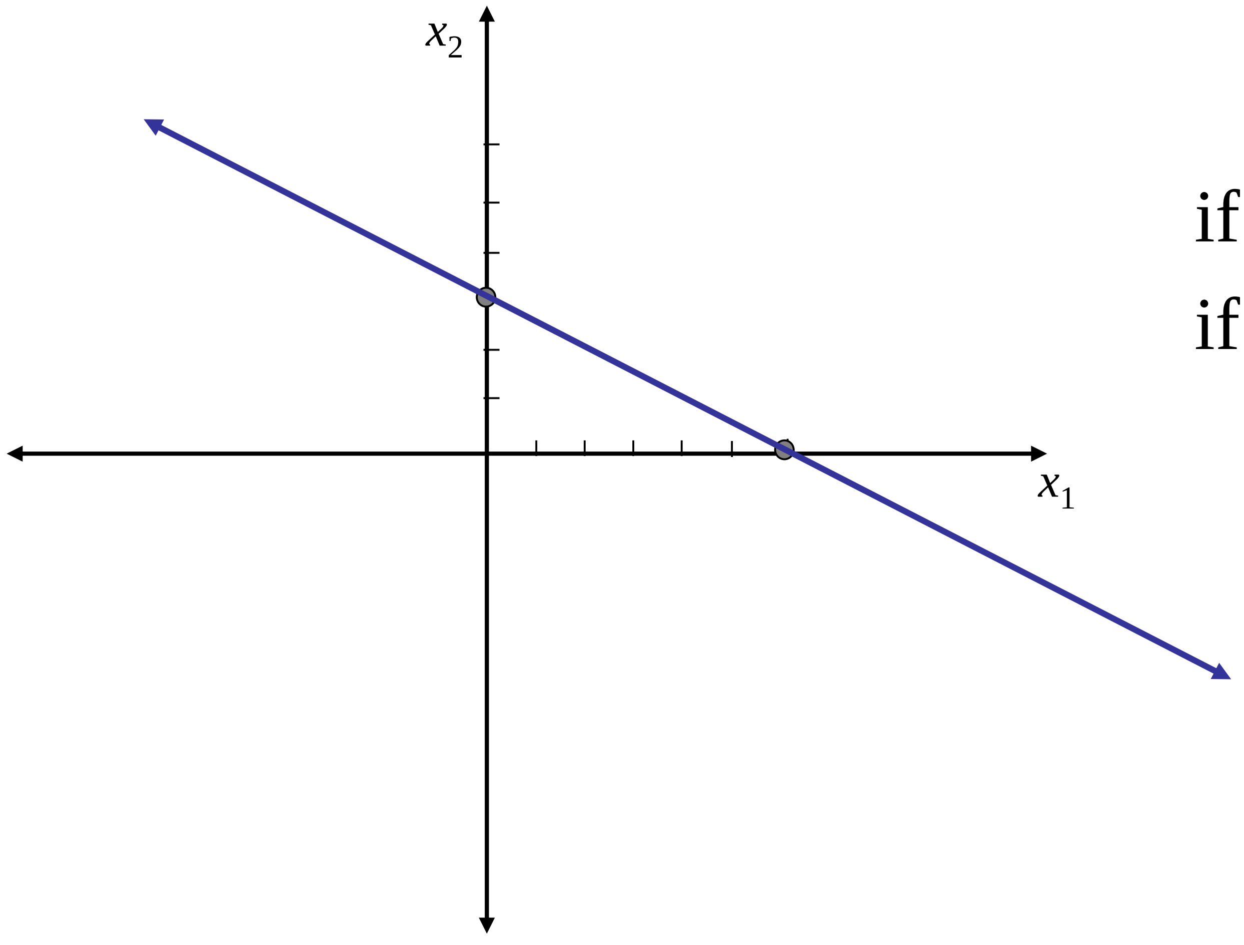
مثال: $x_1 + 2x_2 = 6$

نحتاج نقطتين:

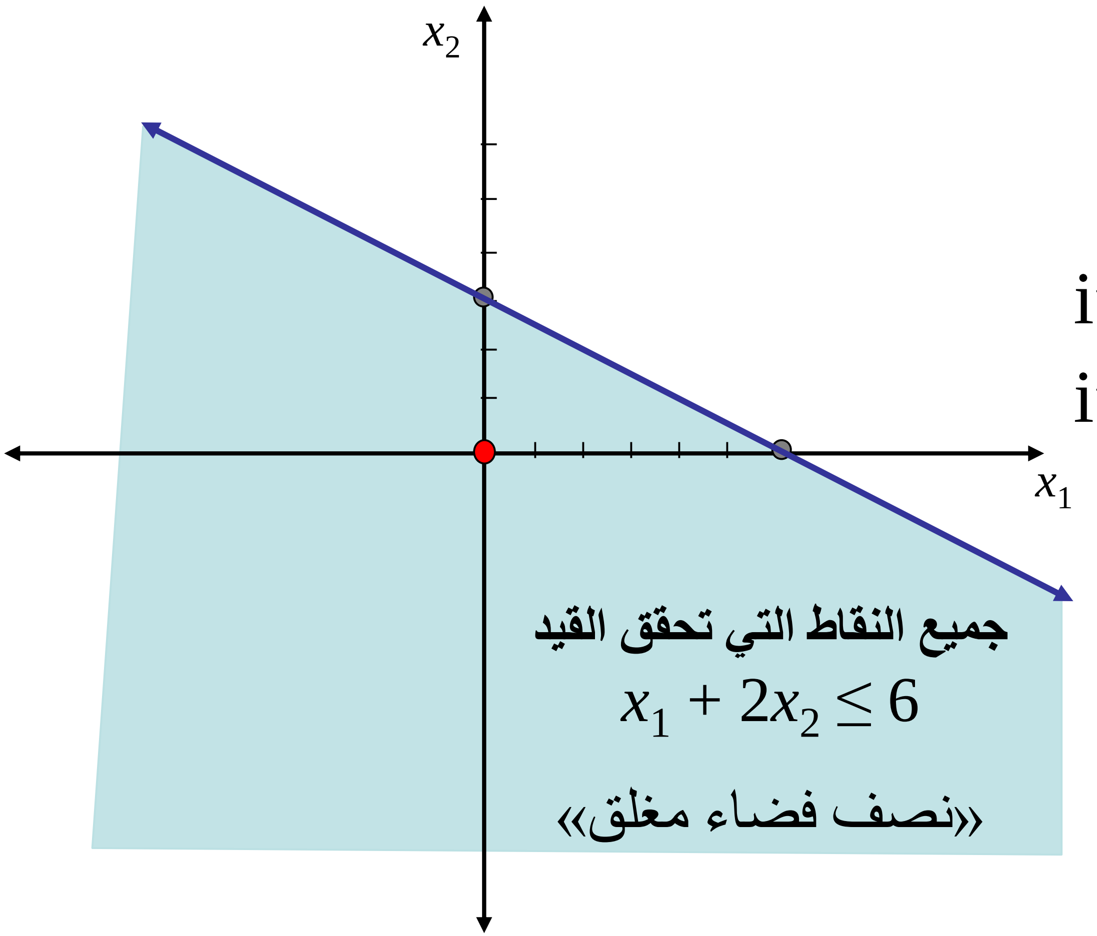
$$\text{if} \quad x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 3$$

$$\text{if} \quad x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 6$$

$$(0\,,3) \text{ and } (6\,,0)$$



الحل البياني للبرنامج الخطي



مثال: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

نحتاج نقطتين لرسم المستقيم

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$\text{if} \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

$$\text{if} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$(0,3) \text{ and } (6,0)$$

نحتاج نقطة ثالثة ليست على المستقيم للتعويض ومعرفة اتجاه تحقق المتراجحة : $(0,0)$

$$0 + 2(0) = 0 < 6$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

مثال : استخدم الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$\max \; z = 3000x_1 + 2000x_2$$

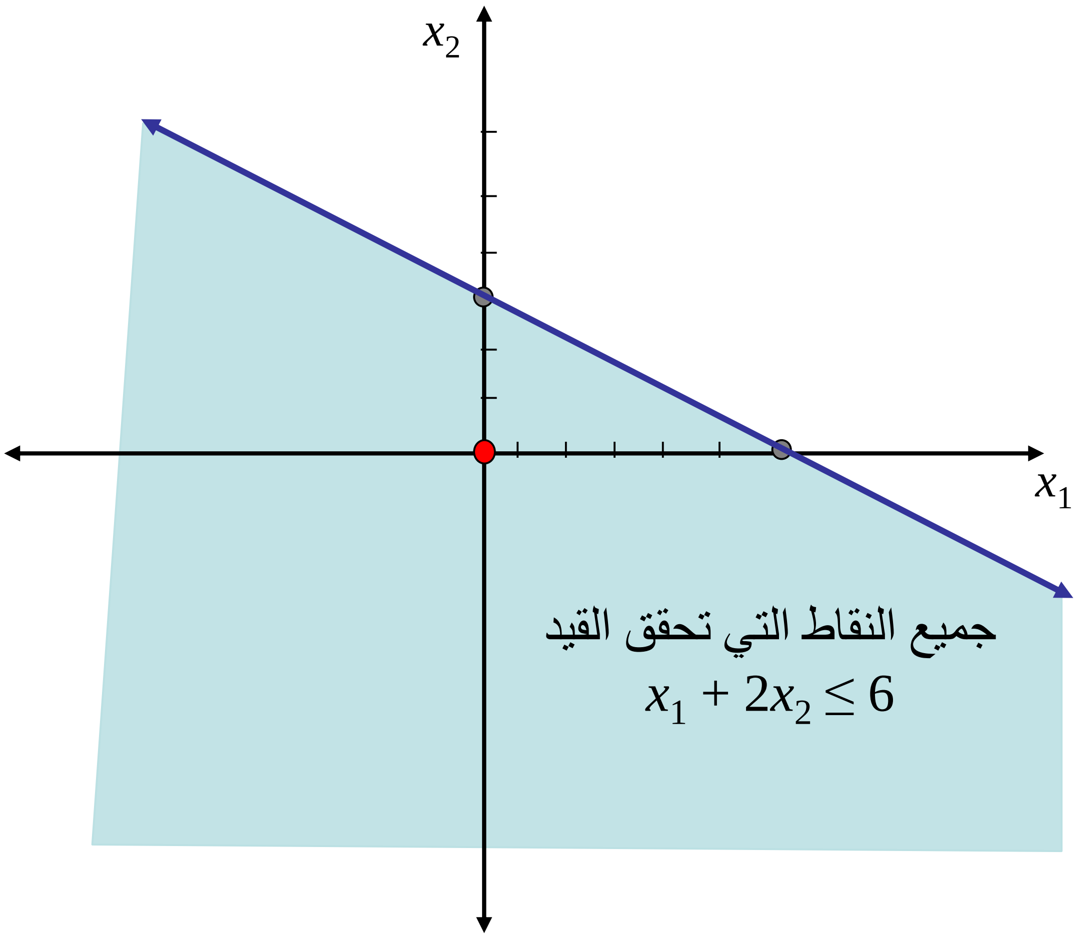
s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

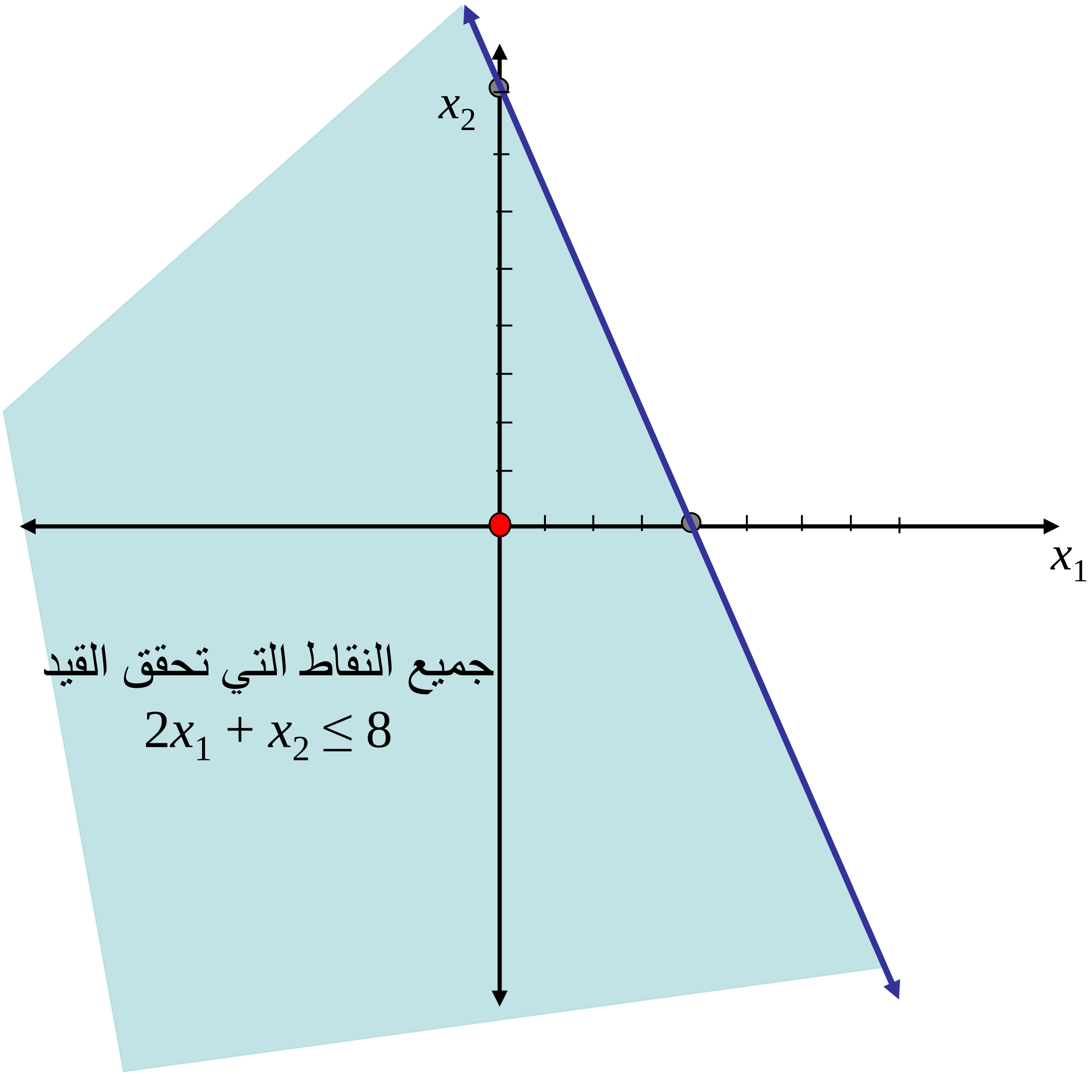
الحل البياني للبرنامج الخطي

تمثيل القيد:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$



الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل القيد:

$$2x_1 + x_2 \le 8$$

نقطتين على المستقيم:

$$2x_1 + x_2 = 8$$

$$\text{if} \quad x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 8$$

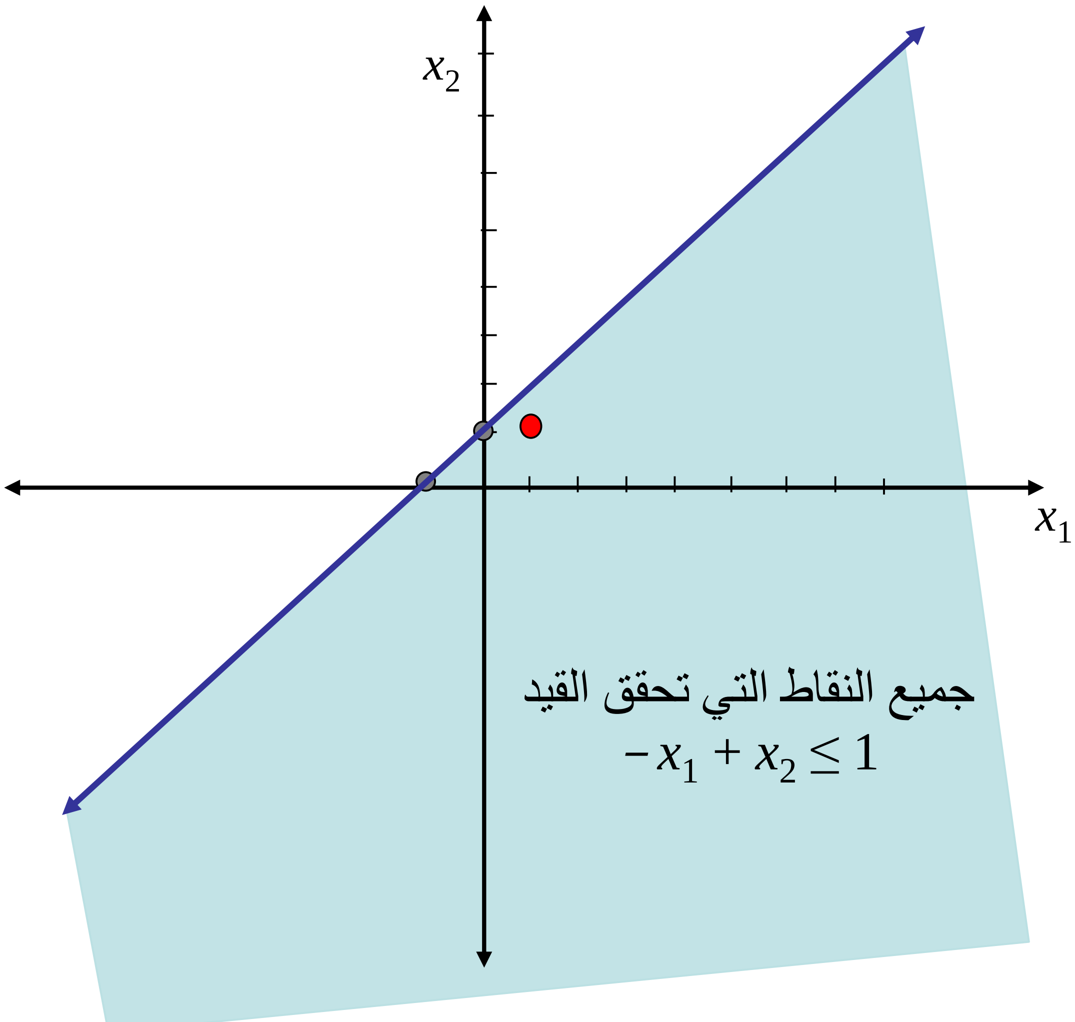
$$\text{if} \quad x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 4$$

$$(0\,,8) \text{ and } (4\,,0)$$

نقطة إضافية للتعويض: $(0\,,0)$

$$2(0) + 0 = 0 < 8$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل القيد:

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

نقطتين على المستقيم:

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$\text{if} \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

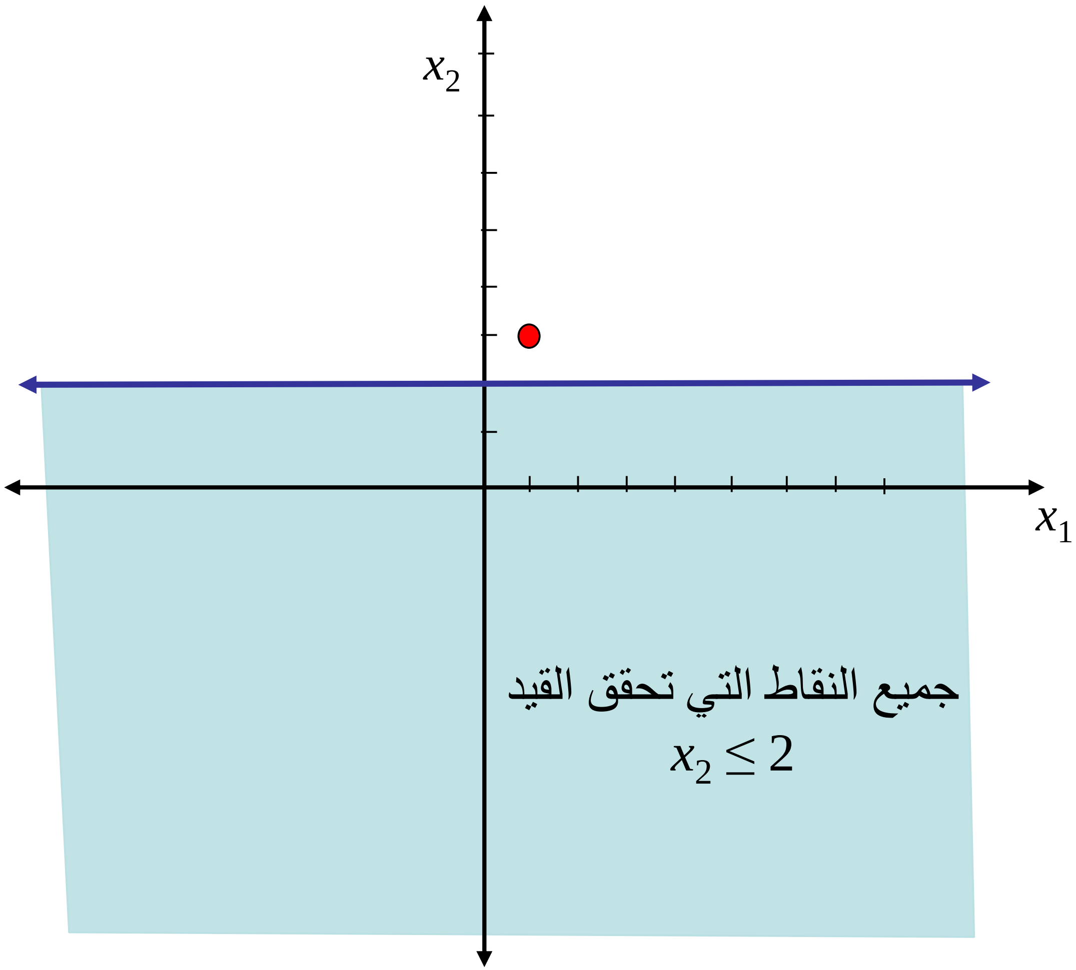
$$\text{if} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$(0, 1) \text{ and } (-1, 0)$$

نقطة إضافية للتعويض: $(1, 1)$

$$1 - 1 = 0 < 1$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل القيد:

$$x_2 \leq 2$$

نرسم المستقيم:

$$x_2 = 2$$

نقطة إضافية للتعويض: $(1\,,3)$

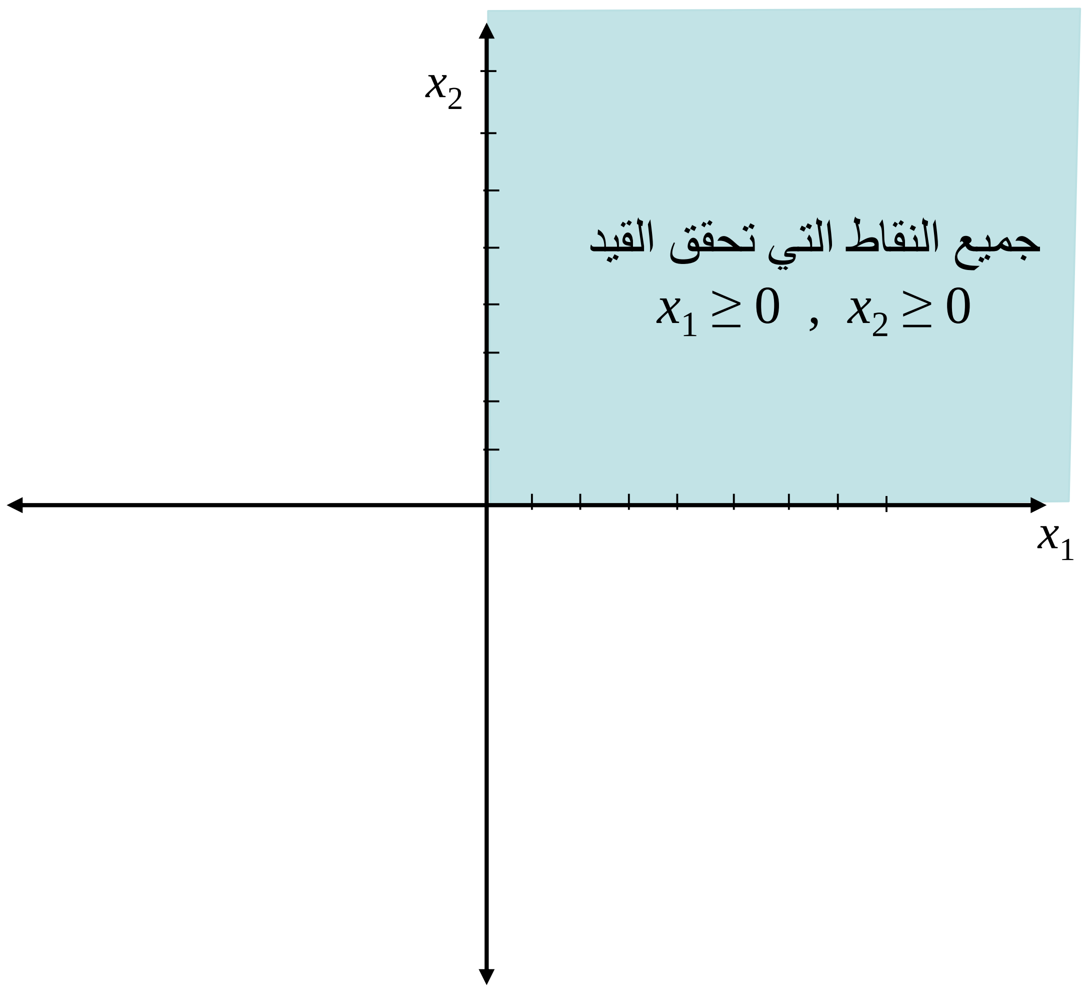
$$3 > 2$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

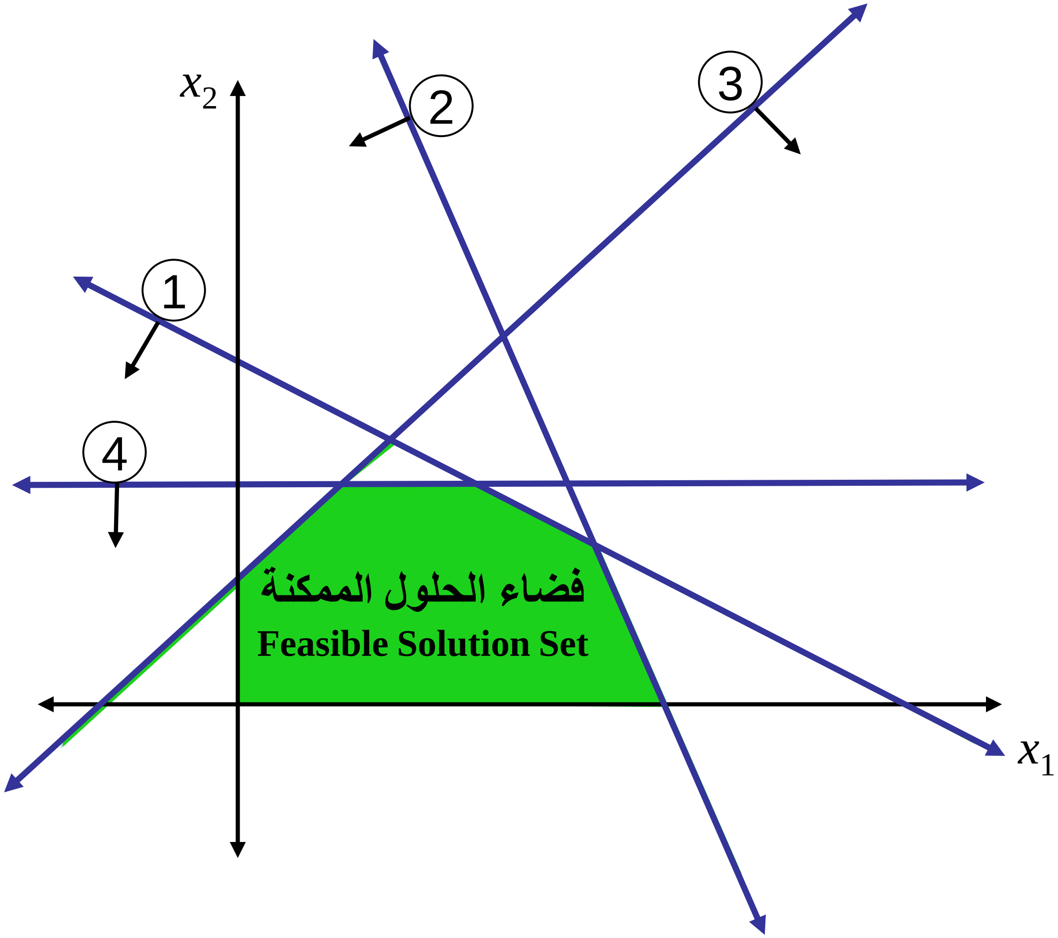
تمثيل القيود:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



الحل البياني للبرنامج الخطي



النقاط التي تحقق جميع القيود:

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \le 8 \qquad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \le 1 \qquad (3)$$

$$x_2 \le 2 \qquad (4)$$

$$x_1 \, , \, x_2 \ge 0$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

- تعريف: الحل الممكن (المسموح ، المقبول)

تكون النقطة $(x_1, \ldots , x_n)$ حلاً ممكناً إذا كانت تحقق جميع القيود.

بيانياً: هي النقطة التي تقع ضمن منطقة التظليل لجميع القيود.

- تعريف: منطقة الحلول الممكنة

هي المجموعة الجزئية من الفضاء $\mathbf{R}^n$ والتي تحقق جميع القيود.

أي أنها مجموعة النقاط التي تحقق جميع القيود.

بيانياً: هي منطقة تقاطع التظليل لجميع القيود.

الحل البياني للبرنامج الخطي

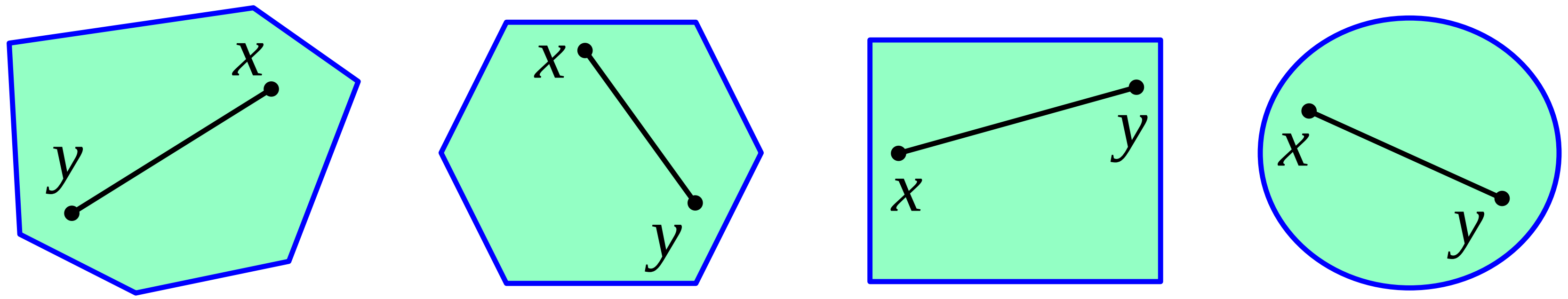
- <u>تعريف</u>: مجموعة محدبة (convex set)

تكون المجموعة S مجموعة محدبة إذا كان لأي نقطتين x و y تنتميان للمجموعة S ، فإن $t\,x + (1-t)\,y$ تنتمي للمجموعة S، حيث $0 \le t \le 1$.

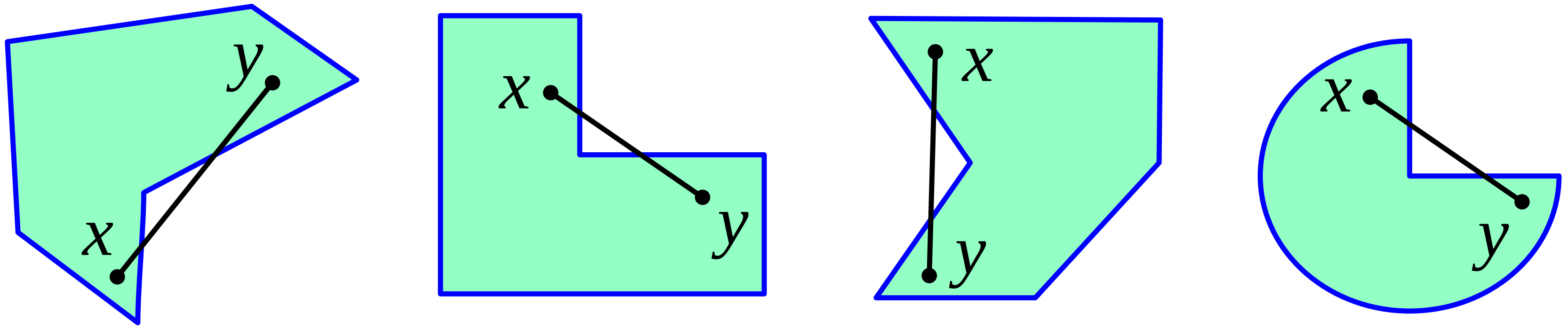
بيانياً: لأي نقطتين x و y تنتميان للمجموعة S ، فإن المستقيم الذي يصل بين هاتين النقطتين يقع كاملا ضمن المجموعة S .

الحل البياني للبرنامج الخطي

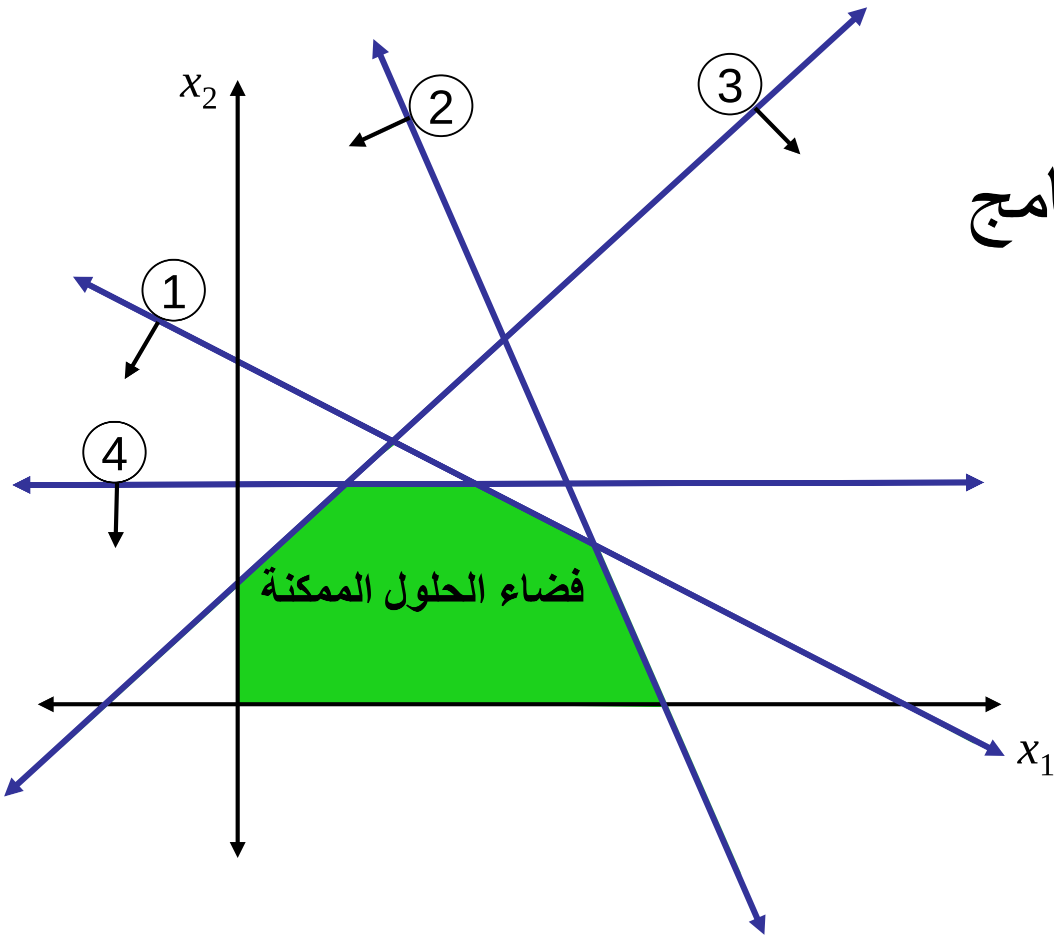
- أمثلة على مجموعات محدبة:



- أمثلة على مجموعات غير محدبة:



الحل البياني للبرنامج الخطي



نظرية:

منطقة الحلول الممكنة لأي برنامج خطي ستكون منطقة محدبة.

منطقة الحلول الممكنة في هذا المثال يسمى مجسم مضلع.

ويتكون من تقاطع عدد من أنصفة الفضاء المغلقة.

الحل البياني للبرنامج الخطي

تمثيل دالة الهدف بيانياً:

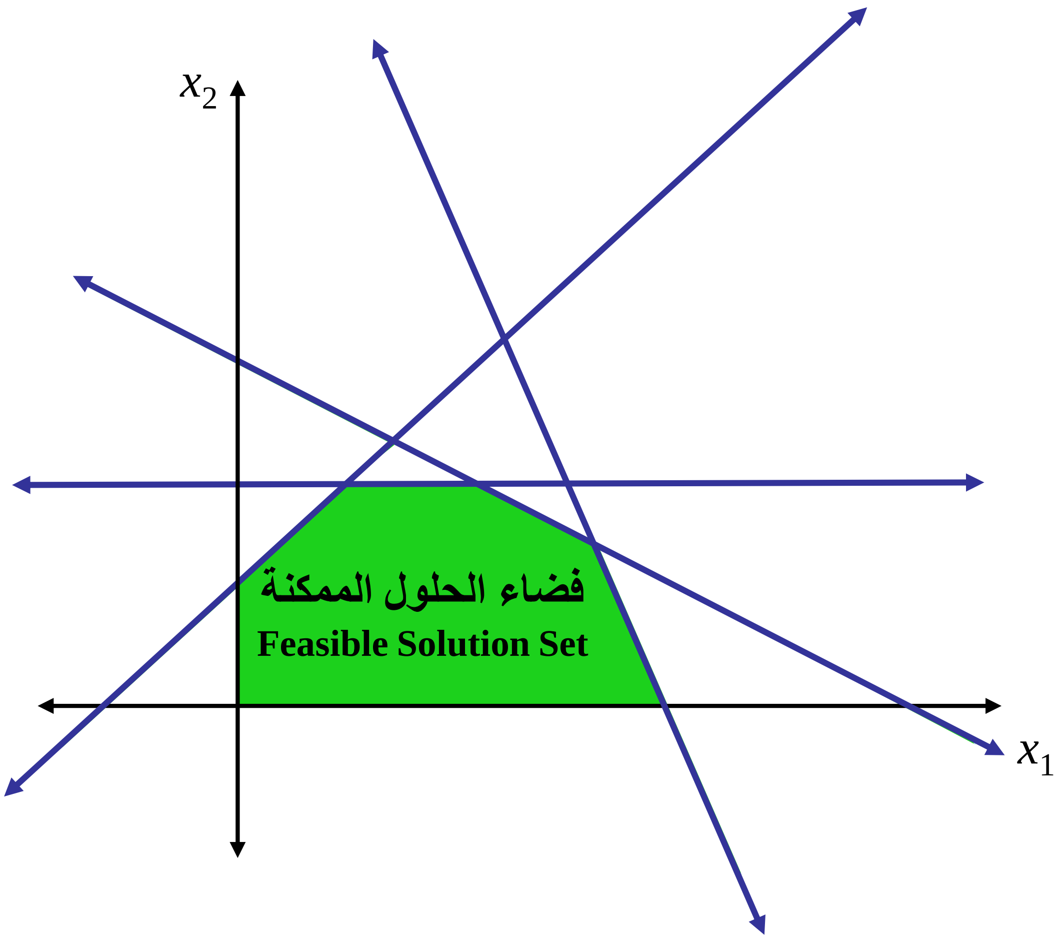
$$\max \text{ or } \min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2$$

- لاحظ لا يوجد طرف أيمن لدالة الهدف.
- نستطيع رسم دالة الهدف فقط عندما تكون كما يلي:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = k$$

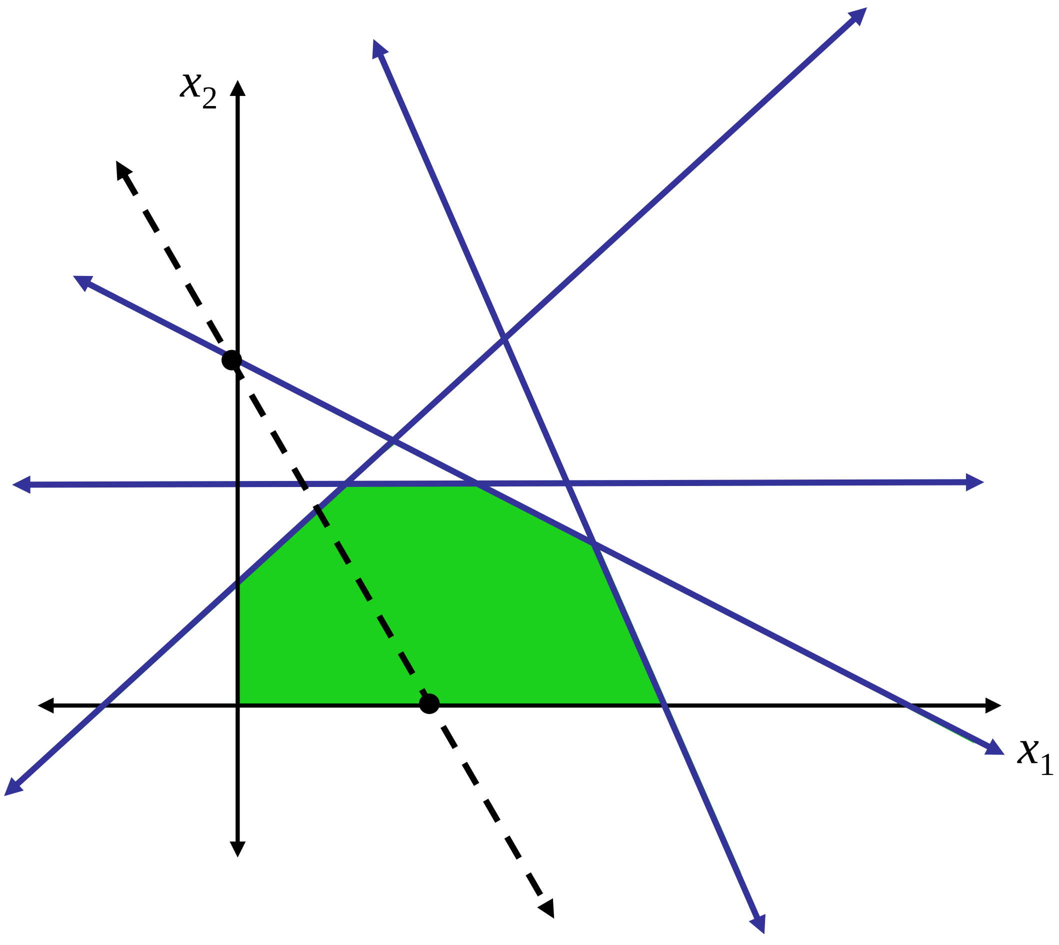
- نختار القيمة k كما نرغب، لكن يستحسن اختيارها بحيث يمر المستقيم بمنطقة الحلول الممكنة.

الحل البياني للبرنامج الخطي



ارسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختيارية في منطقة الحلول الممكنة، مثلا المار بالنقطة $(2,0)$

الحل البياني للبرنامج الخطي



مستقيم دالة الهدف الذي

يمر بالنقطة $(2\,,0)$:

$$3000x_1 + 2000x_2 = 6000$$

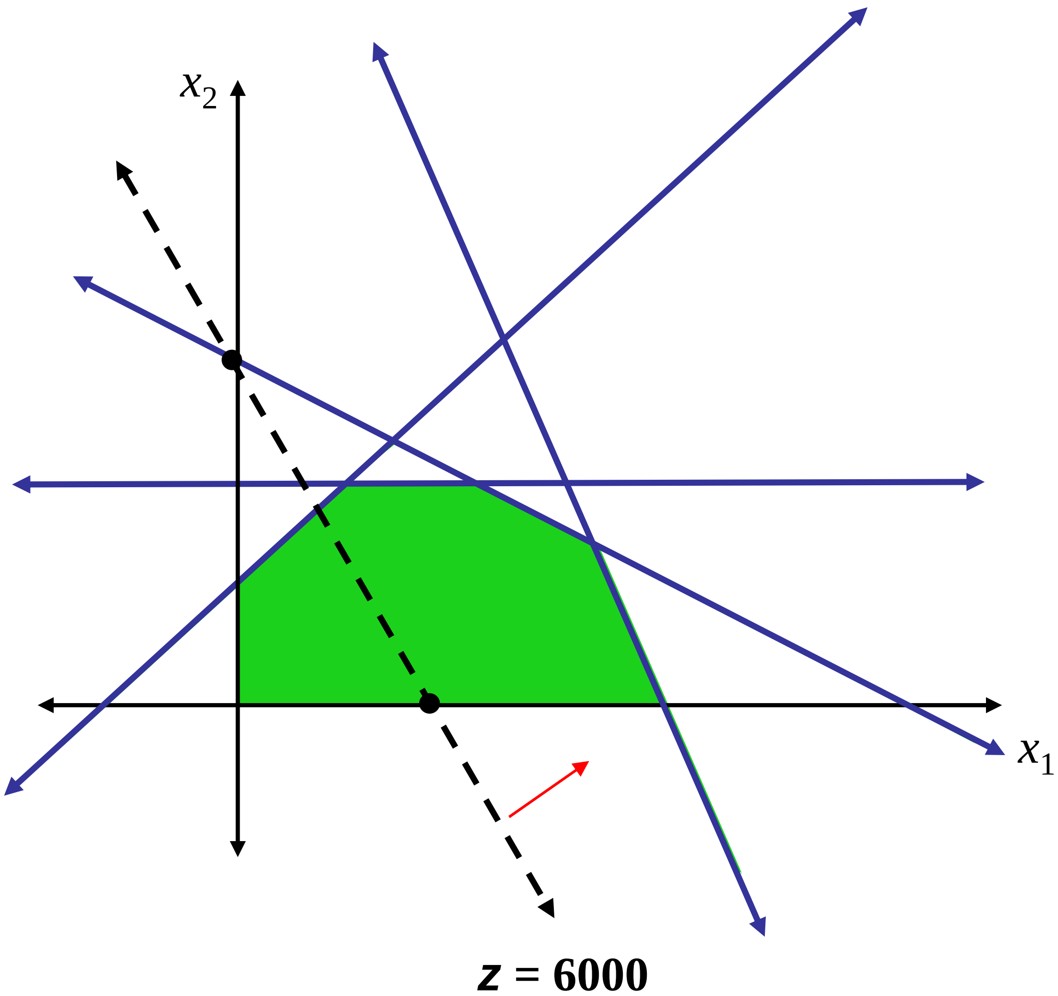
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 2 & 0 \end{array}$$

نحتاج نقطة أخرى:

$$\text{if } \; x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 3$$

$$(2\,,0) \text{ and } (0\,,3)$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



ثم نحدد اتجاه تحسن دالة الهدف. نختبر نقطة ليست على المستقيم.

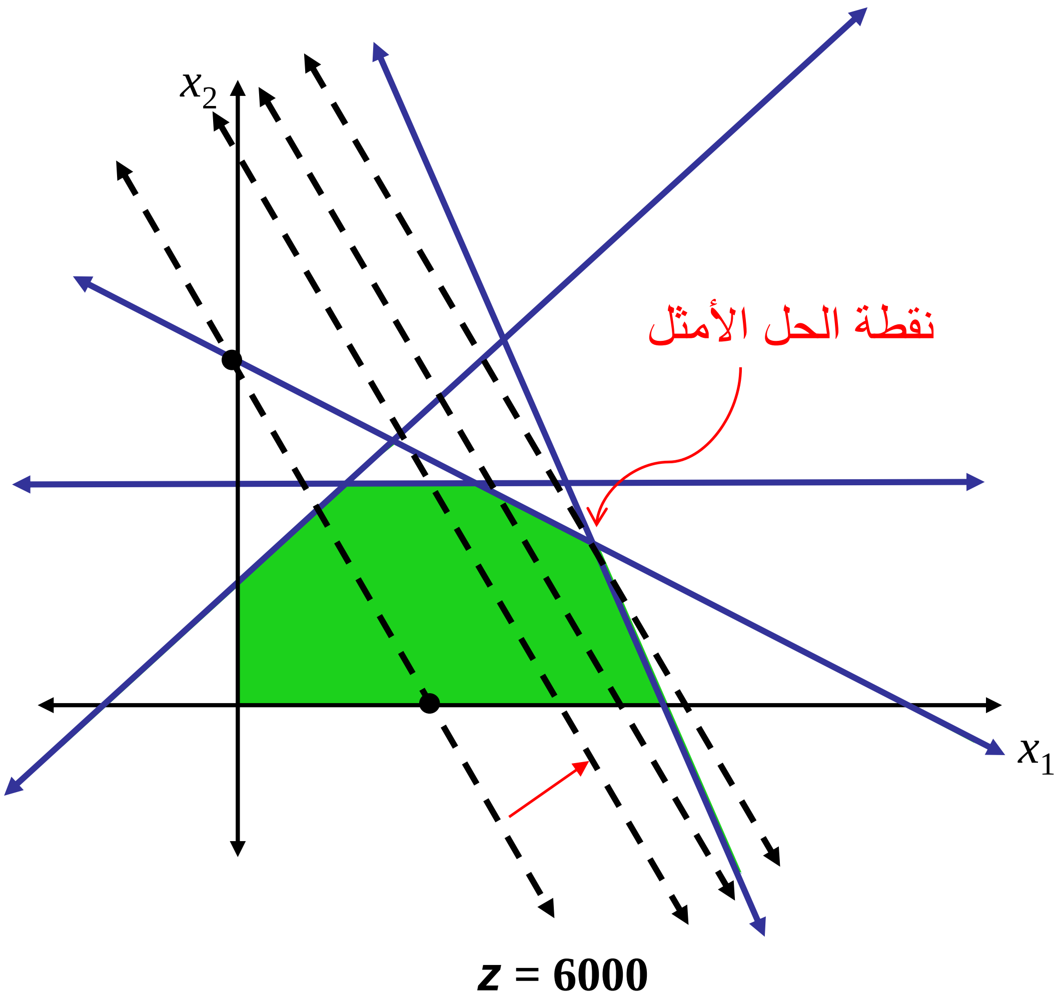
مثلا، عند النقطة $(3,3)$،

قيمة دالة الهدف هي:

$$3000x_1 + 2000x_2 = 15000$$

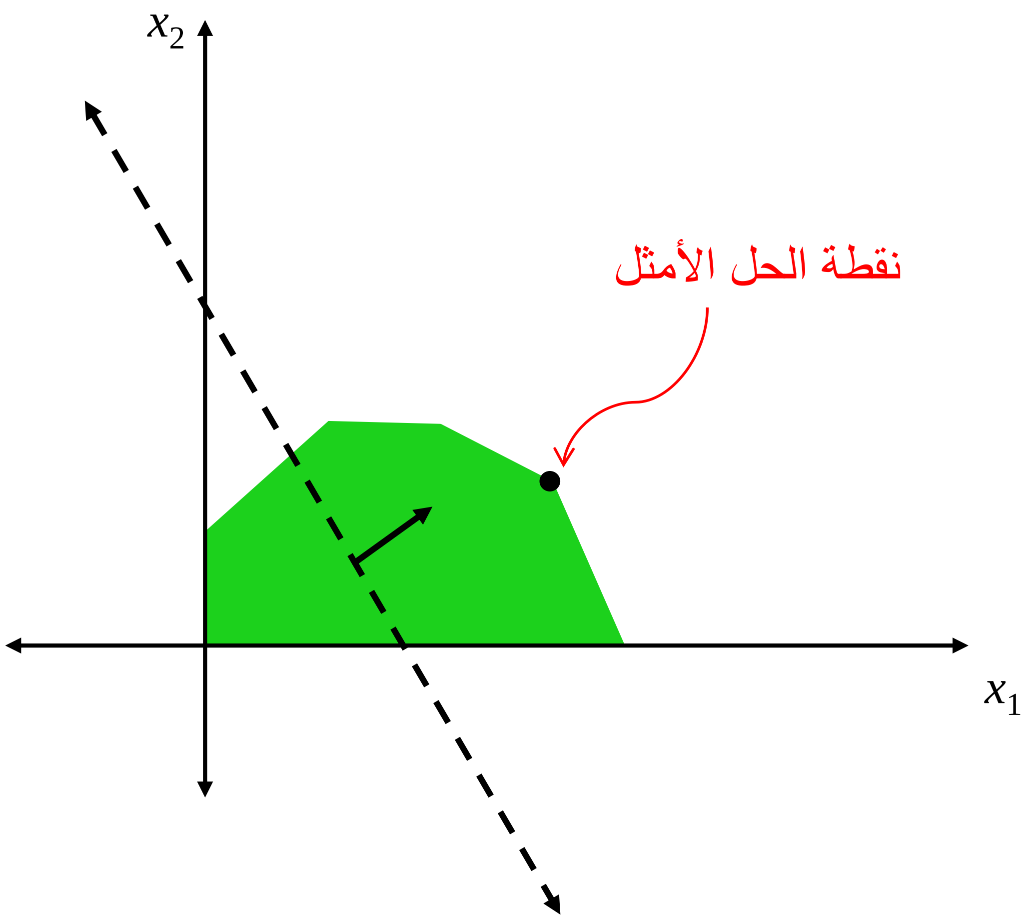
إذن دالة الهدف تتحسن جهة اليمين

الحل البياني للبرنامج الخطي

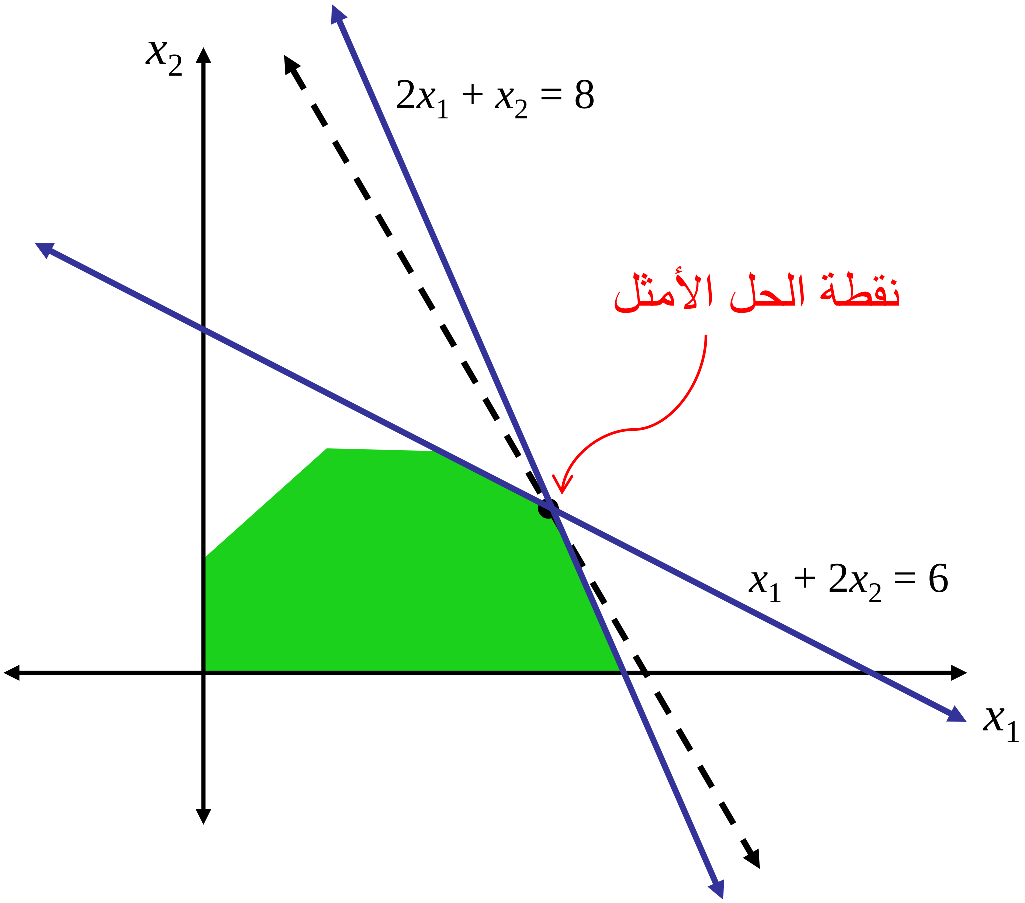


يزاح (يجر) مستقيم دالة الهدف موازيا لنفسه باتجاه **التحسن** حتى يصل إلى آخر نقطة في فضاء الحلول فتكون هذه النقطة هي الحل الأمثل.

الحل البياني للبرنامج الخطي



الحل البياني للبرنامج الخطي

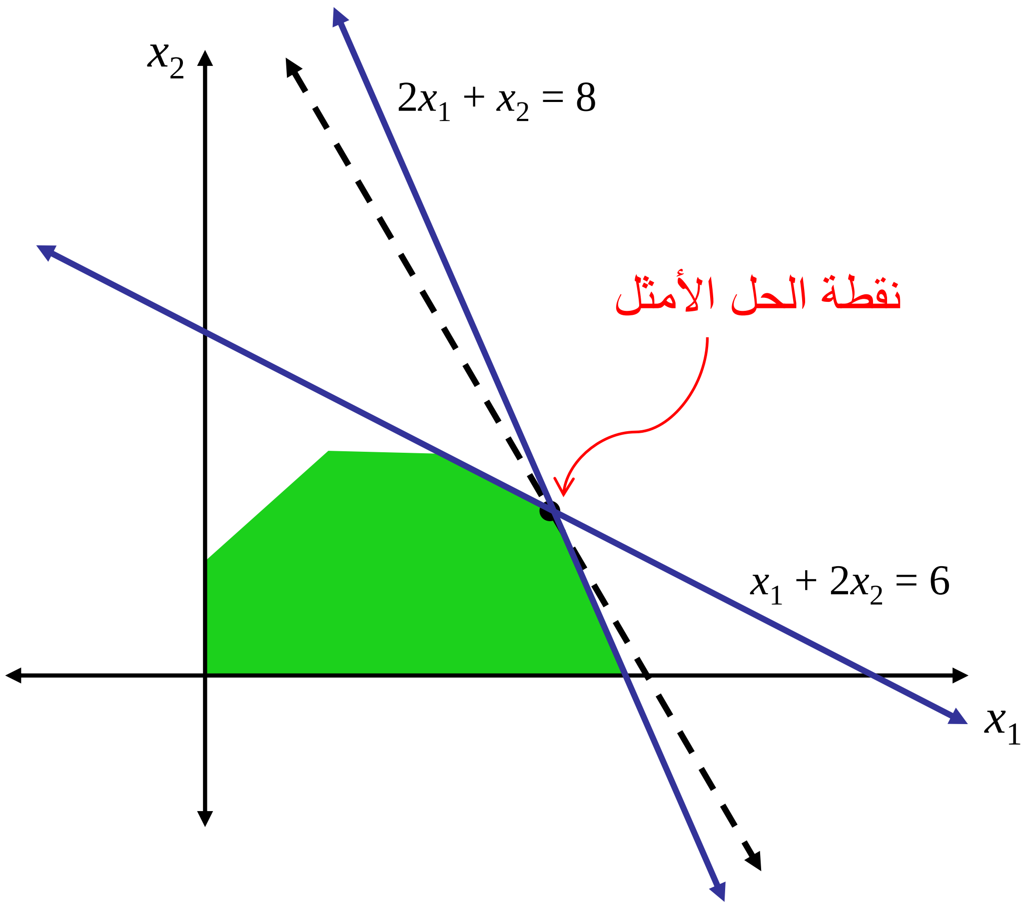


الحل الأمثل يقع عند تقاطع المستقيمين:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تحديد الحل الأمثل يكون بحل النظام الخطي التالي:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8$$

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 10/3 = 3.33$$

$$x_2^* = 4/3 = 1.33$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

الحل الأمثل هو

$$x_1^* = 3.33 \quad \text{and} \quad x_2^* = 1.33$$

بعد التعويض في دالة الهدف نحصل على القيمة المثلى لدالة الهدف و هي:

$$z^* = 12666.67 \text{ SR}$$

أي أن على الشركة إنتاج 3.33 طن من الدهان الخارجي و 1.33 طن من الدهان الداخلي يومياً لتحصل على عوائد يومية مثلى تقدر بـ 12666.67 ريال

الحل البياني للبرنامج الخطي

- **تعريف: الحل الأمثل (Optimal Solution)**

يكون القرار $(x_1 , \ldots , x_n)$ حلاً أمثلاً للبرنامج الخطي إذا كان:

– ينتمي إلى فضاء الحلول الممكنة

– ذو أعلى قيمة لدالة الهدف في حالة max

أو ذو أقل قيمة لدالة الهدف في حالة min

- **تحديد الحل الأمثل بيانيا:**

▪ في حالة max : يزاح مستقيم دالة الهدف باتجاه التزايد حتى يصل إلى آخر نقطة في فضاء الحلول فتكون هذه النقطة هي الحل الأمثل.

▪ في حالة min : يزاح مستقيم دالة الهدف باتجاه التناقص حتى يصل إلى آخر نقطة في فضاء الحلول فتكون هذه النقطة هي الحل الأمثل.

الحل البياني للبرنامج الخطي

- **تعريف:** **النقاط الركنية:**

يكون القرار $(x_1 , \dots , x_n)$ نقطة ركنية ضمن منطقة الحلول الممكنة إذا كان:

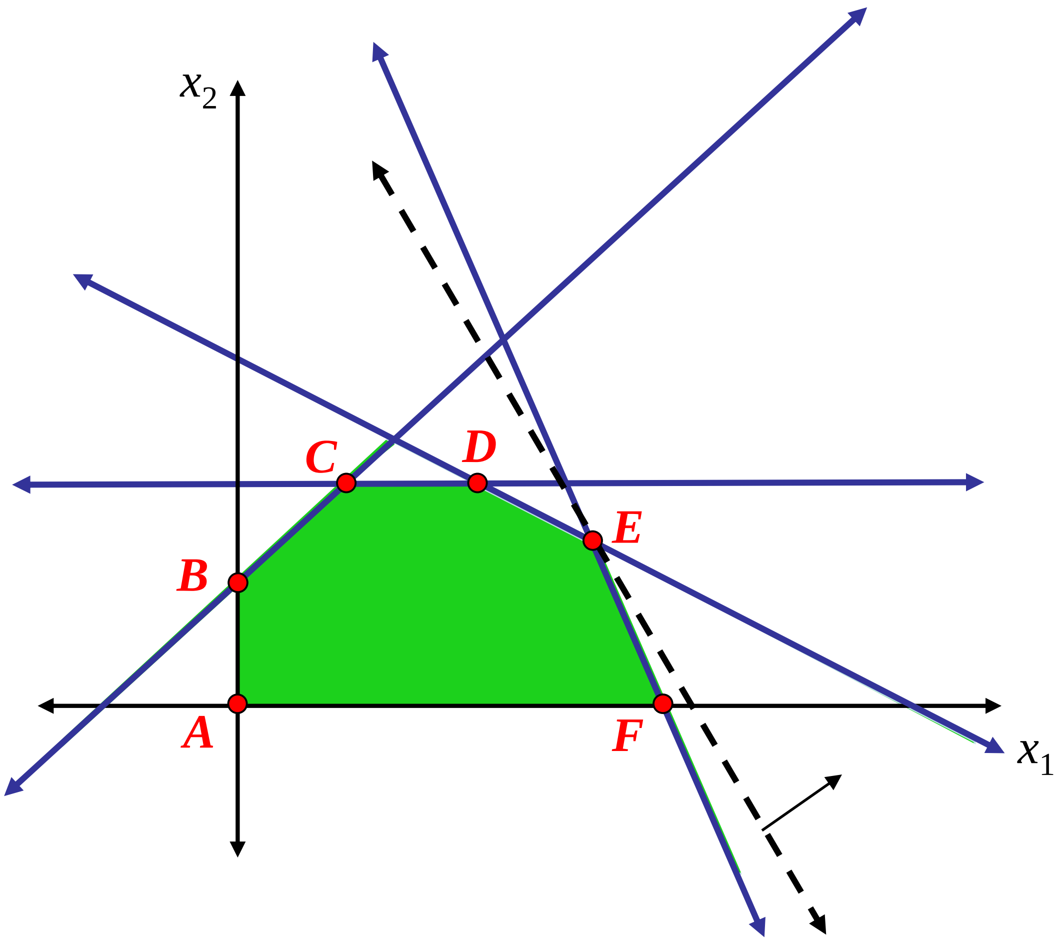
كل قطعة مستقيمة داخل منطقة الحلول الممكنة وتمر بالنقطة $(x_1 , \dots , x_n)$،
تكون النقطة $(x_1 , \dots , x_n)$ هي أحد طرفي هذه القطعة المستقيمة.

تسمى أيضا نقاط قصوى أو نقاط زاوية.

- **نظرية:** إذا يوجد حل أمثل لبرنامج خطي مع منطقة حلول محدودة ، فإن إحدى النقاط الركنية ستكون حل أمثل.

قد لا تكون الوحيدة كما سنرى لاحقاً.

الحل البياني للبرنامج الخطي



النقاط: A, B, C, D, E, F

هي نقاط ركنية لمنطقة الحلول الممكنة

الحل الأمثل عند النقطة E

$$x_1^* = 10/3 = 3.33$$

$$x_2^* = 4/3 = 1.33$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

مثـــال :

مصنع ينتج السيارات الفاخرة، وتعتقد الإدارة أن غالبية الزبائن إما من رجال الأعمال أو من الموظفين ذوي الدخل العالي. وللوصول إلى أكبر شريحة من الزبائن قررت الإدارة طرح إعلانات تجارية مدتها دقيقة واحدة تتخلل إما البرامج الكوميدية أو البرامج الرياضية. يبين الجدول التالي عدد مشاهدات هذه البرامج:

	مشاهدي إعلانات البرامج الكوميدية (مليون/دقيقة إعلان)	مشاهدي إعلانات البرامج الرياضية (مليون/دقيقة إعلان)
رجال الأعمال	7	2
الموظفين ذوي الدخل العالي	2	12

وترغب الإدارة في إيجاد سياسة إعلانية مثلى تضمن لها كحد أدنى 28 مليون مشاهد من رجال الأعمال و 24 مليون مشاهد من موظفي الدخل العالي. فإذا كان الإعلان يكلف 50000 ريال للدقيقة الواحدة خلال البرامج الكوميدية ويكلف 100000 ريال للدقيقة الواحدة خلال البرامج الرياضية، فما هي سياسة الإعلان المناسبة.

الحل البياني للبرنامج الخطي

متغيرات القرار: ما الذي تملك الشركة التصرف فيه؟؟

x_1 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الكوميدية

x_2 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الرياضية

الحل البياني للبرنامج الخطي

دالة الهدف:

– لتكن z التكلفة الإجمالية بالريال للإعلانات خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية

$$z = 50,000\, x_1 + 100,000\, x_2$$

– يمكن إعادة تعريف z التكلفة الإجمالية بـالـ 1000 ريال للإعلان خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية. وبالتالي:

$$z = 50\, x_1 + 100\, x_2$$

– دالة الهدف تمثل تكاليف $\Leftarrow$ min

الحل البياني للبرنامج الخطي

القيود:

– قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من رجال الأعمال، علماً بأن 7 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 2 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية:

$$7000000x_1 + 2000000x_2 \geq 28000000$$
$$\Leftrightarrow \; 7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

– قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من موظفي الدخل العالي، علماً بأن 2 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 12 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية:

$$2000000x_1 + 12000000x_2 \geq 24000000$$
$$\Leftrightarrow \; 2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

البرنامج الخطي:

x_1 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الكوميدية

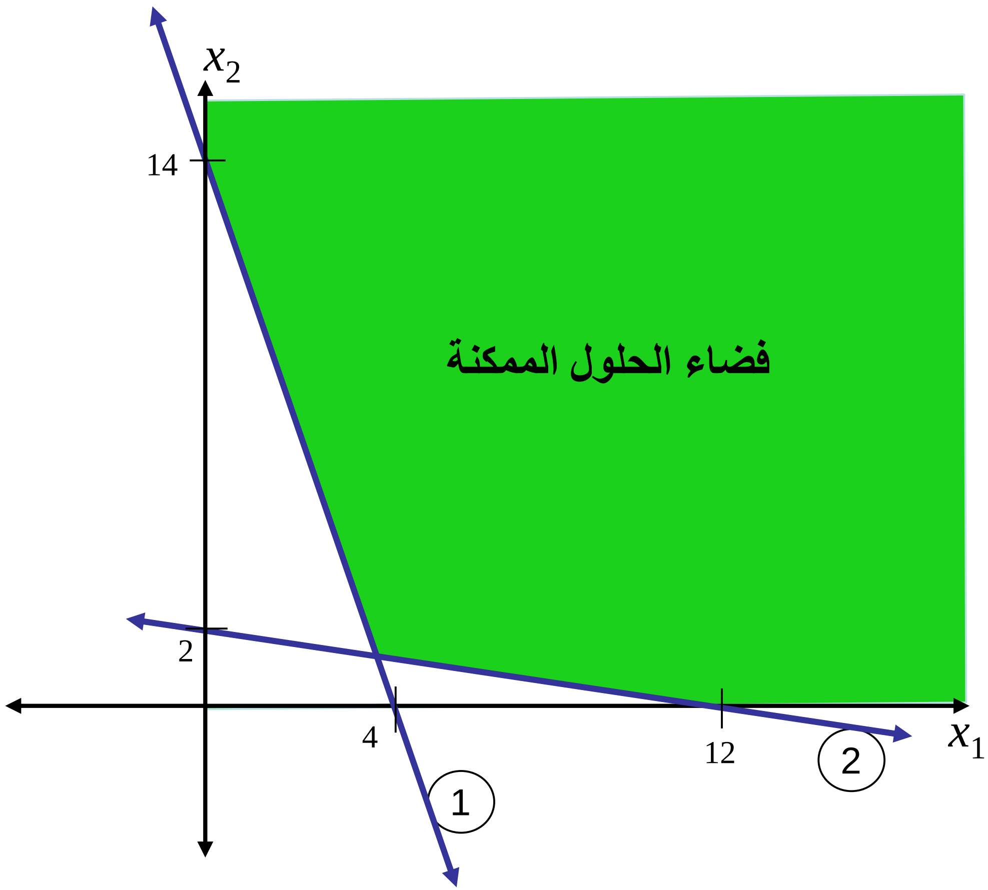
x_2 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الرياضية

$$\min \quad z = 50x_1 + 100x_2$$

s.t.

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$
$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل فضاء الحلول الممكنة بيانياً:

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$(0 , 14) , (4 , 0)$

$(0 , 0) \Rightarrow 7(0)+2(0) = 0 < 28$

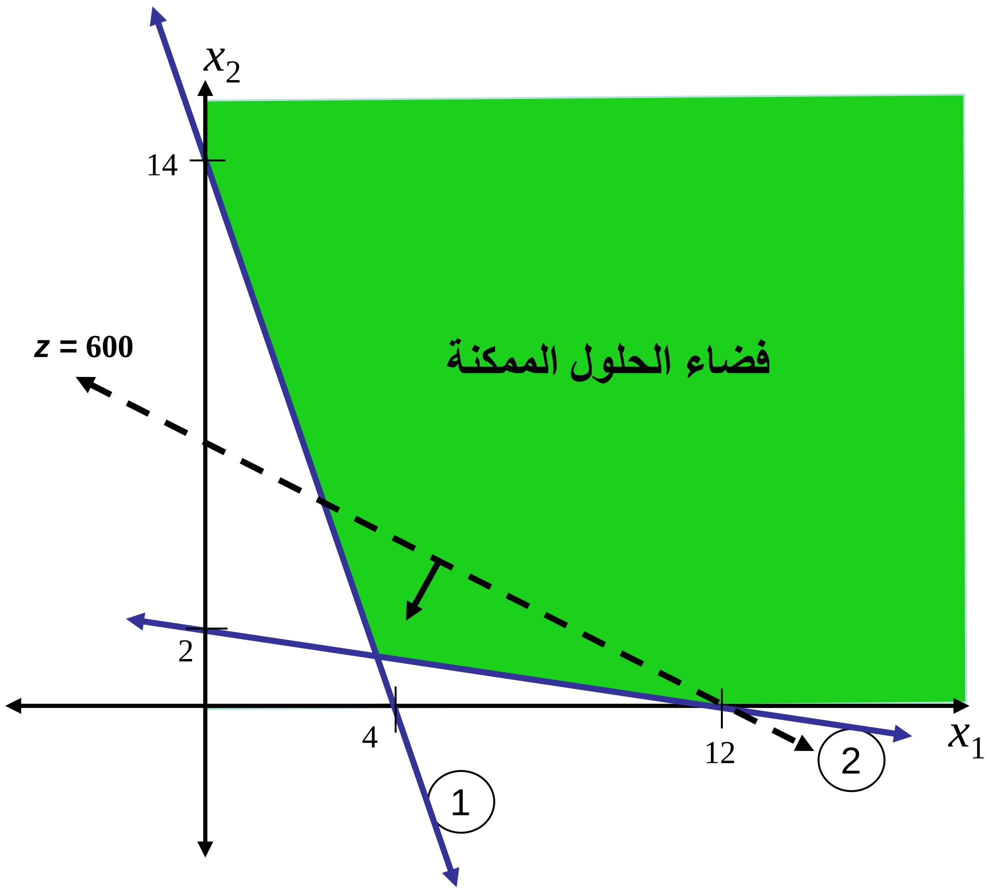
$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$(0 , 2) , (12 , 0)$

$(0 , 0) \Rightarrow 2(0)+12(0) = 0 < 24$

$$x_1 \geq 0 , \; x_2 \geq 0$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل دالة الهدف بيانياً:

$$\min \quad z = 50x_1 + 100x_2$$

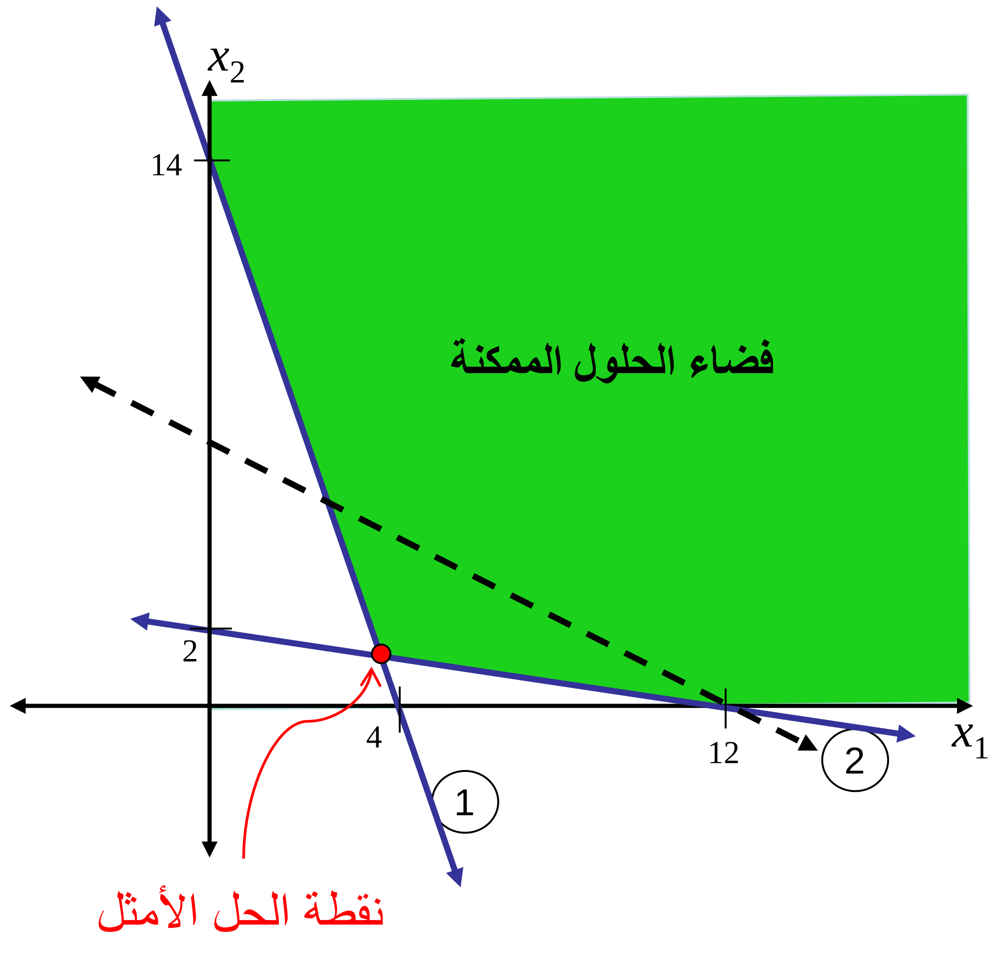
نرسم مستقيم دالة الهدف المار بالنقطة (4 , 4) «اختيارية»

$$\Rightarrow \; 50x_1 + 100x_2 = 600$$

نحتاج نقطة أخرى:
(12 , 0) أو (0 , 6)

نرسم المستقيم، ثم نحدد اتجاه تحسن دالة الهدف.

الحل البياني للبرنامج الخطي



إيجاد الحل الأمثل:

إزاحة مستقيم z الافتراضي باتجاه التناقص.

لإيجاد قيم متغيرات القرار الأمثل، نحل المعادلتين:

$$7x_1 + 2x_2 = 28$$
$$2x_1 + 12x_2 = 24$$

$$\Rightarrow x_1^* = 3.6 \text{ and } x_2^* = 1.4$$
$$\Rightarrow z^* = 320000$$

على الإدارة شراء 3.6 دقيقة إعلان في البرامج الكوميدية و 1.4 دقيقة إعلان في البرامج الرياضية بتكلفة مثلى تساوي 320,000 ريال.

الحل البياني للبرنامج الخطي

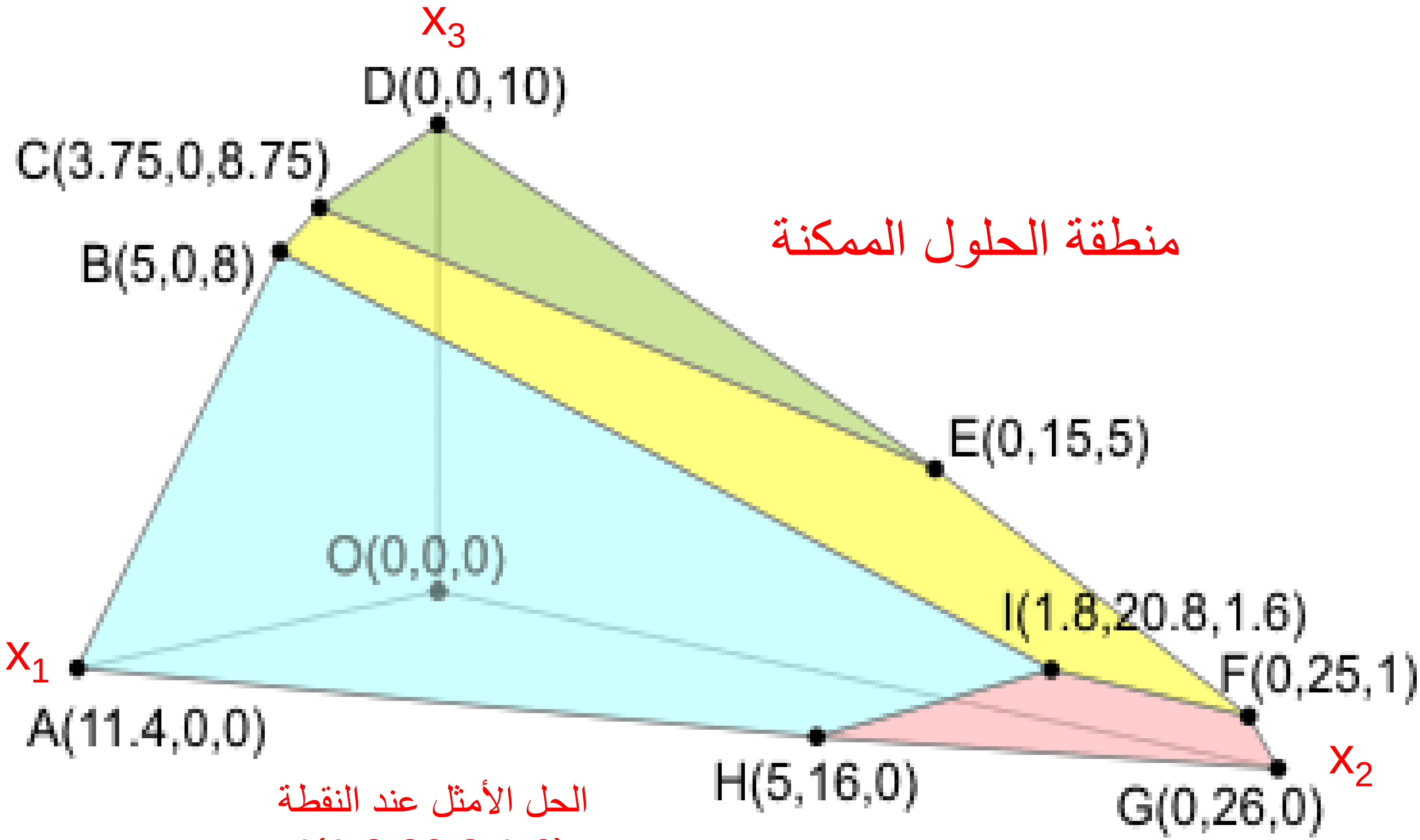
مثال: ثلاث متغيرات (غير مطلوب!)

$$\max z = 20x_1 + 10x_2 + 15x_3$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 55\\
2x_1 + x_2 + x_3 &\le 26\\
x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 30\\
5x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 57\\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



الحل الأمثل عند النقطة

I(1.8,20.8,1.6)

حالات القرار في البرامج الخطية

- حل أمثل وحيد (فريد)

للبرنامج الخطي نقطة وحيدة تعطي أفضل قيمة مثلى لدالة الهدف.

بيانياً: خط دالة الهدف يمر **بنقطة** وحيدة في فضاء الحلول عند أقصى حد ممكن لتحسين دالة الهدف.

- حلول مثلى متعددة (بديلة)

للبرنامج الخطي أكثر من نقطة تعطي أفضل قيمة مثلى لدالة الهدف. يوجد حلول مثلى لا نهائية.

بيانياً: خط دالة الهدف يمر **بحافة** (قطعة مستقيمة) من حواف فضاء الحلول عند أقصى حد ممكن لتحسين دالة الهدف.

- قيمة دالة الهدف غير محدودة

قيمة دالة الهدف تكون لا نهاية (∞) في حالة max، أو سالب لا نهاية (-∞) في حالة min.

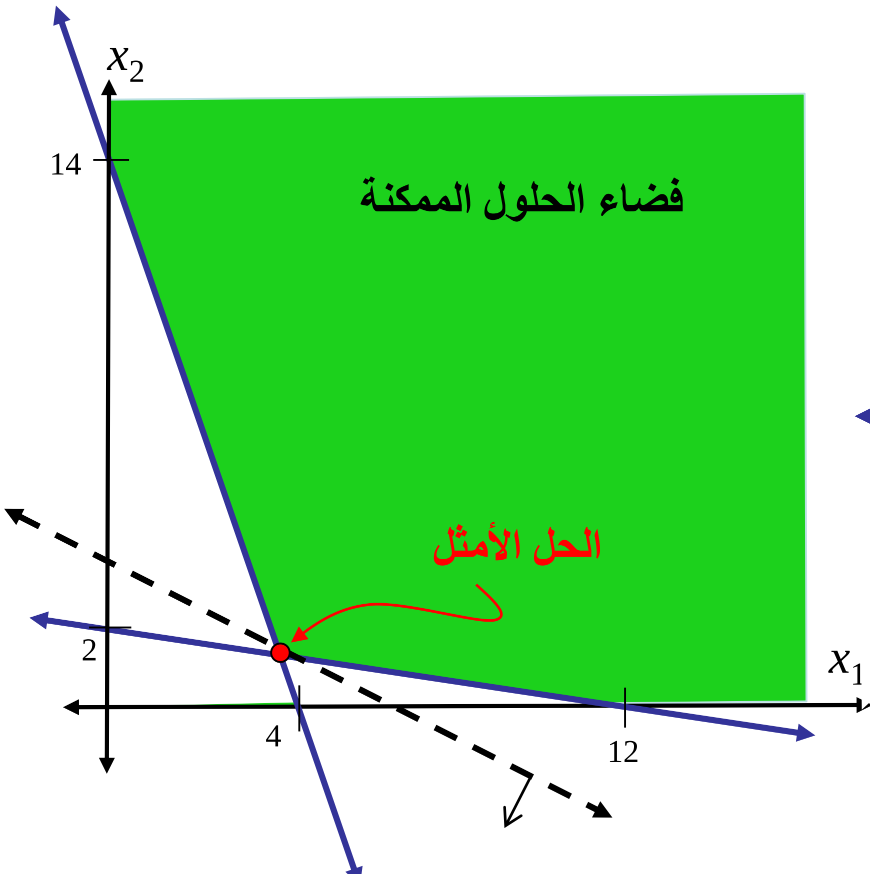
بيانيا: يمكن إزاحة مستقيم دالة الهدف في اتجاه التحسن إلى ما لا نهاية ، مع البقاء في منطقة الحلول الممكنة.

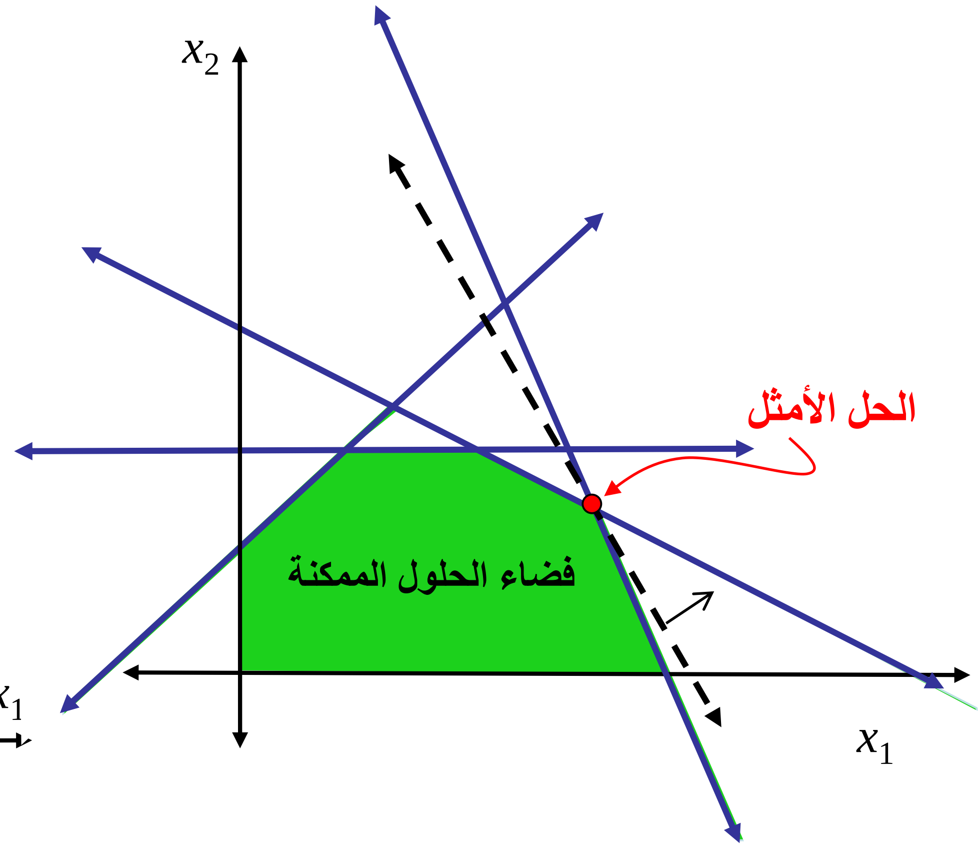
- فضاء الحلول فارغ

البرنامج الخطي ليس له فضاء حلول، أي لا يوجد له أي حل ممكن.

حالات القرار في البرامج الخطية

حل أمثل وحيد: المثالين السابقين لهما حل أمثل وحيد.





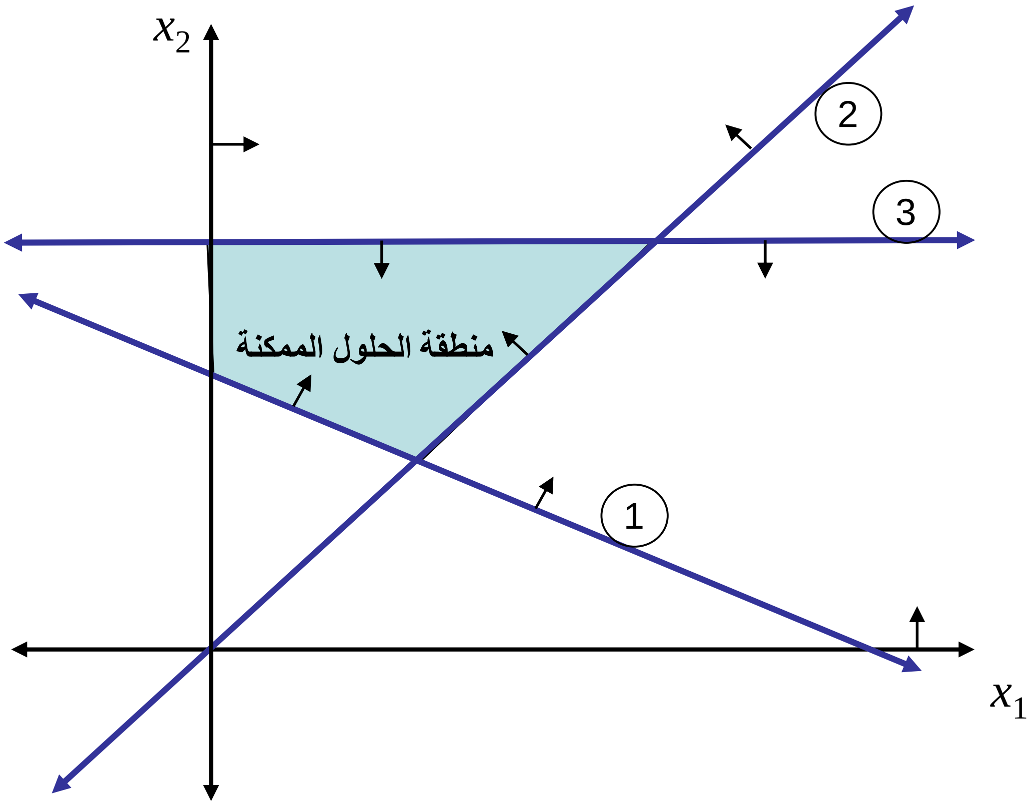
حالات القرار في البرامج الخطية

حلول مثلى متعددة (بديلة):

<u>مثال</u> : أوجد بيانياً الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&\min \quad z = 5x_1 + 10x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \geq 10 \\
&\qquad -x_1 + x_2 \geq 0 \\
&\qquad x_2 \leq 8 \\
&\qquad x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم منطقة الحلول الممكنة

$$x_1 \geq 0 \;,\;\; x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$(0, 5) \;,\; (10, 0)$$

$$(0, 0) \Rightarrow (0)+2(0) = 0 < 10$$

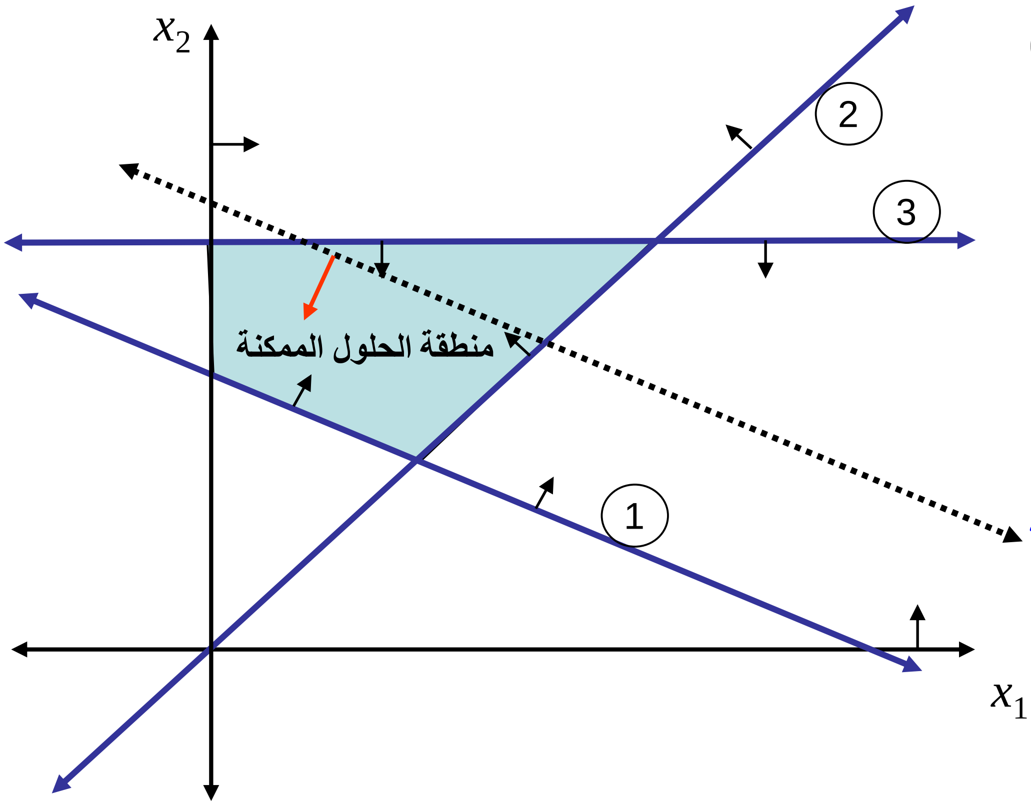
$$-x_1 + x_2 \geq 0$$

$$(1, 1) \;,\; (2, 2)$$

$$(1, 2) \Rightarrow (2) - (1) = 1 > 0$$

$$x_2 \leq 8$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم مستقيم دالة الهدف

نختار عندما يمر بالنقطة (4,7)

$$5x_1 + 10x_2 = 90$$

نحتاج نقطة أخرى:

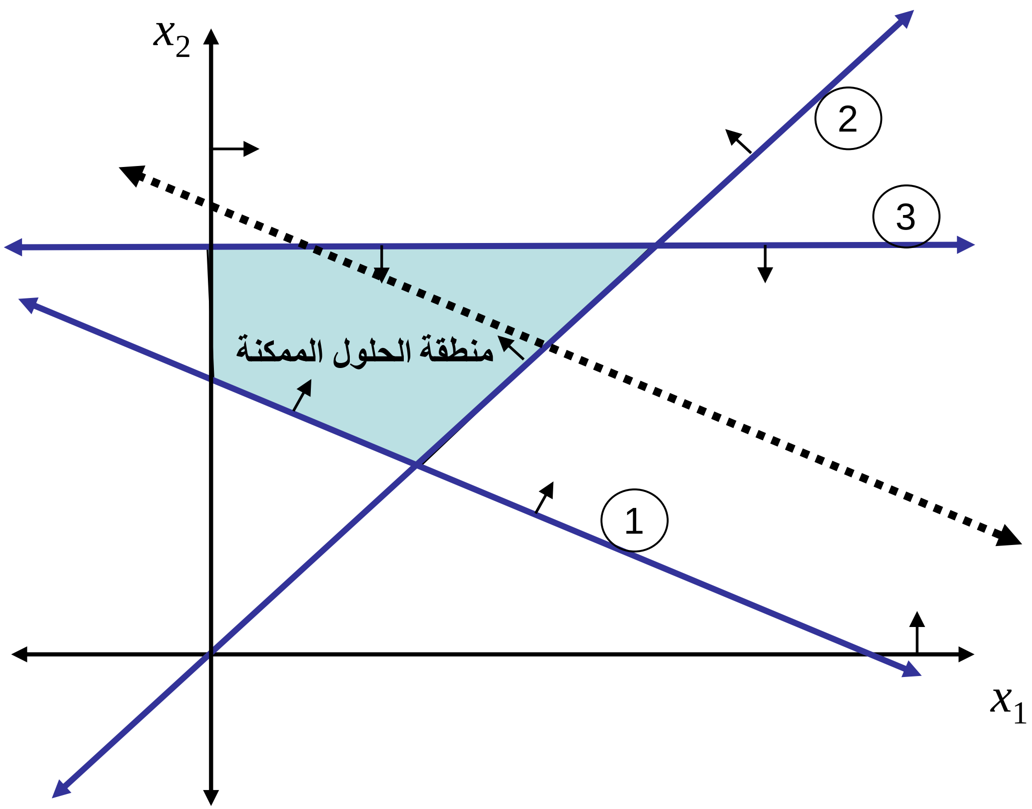
$$\text{if } \; x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 9$$

$$(4\,,7) \text{ and } (0\,,9)$$

نختبر نقطة لتحديد إتجاه تحسن دالة الهدف، مثلا (1 , 1)

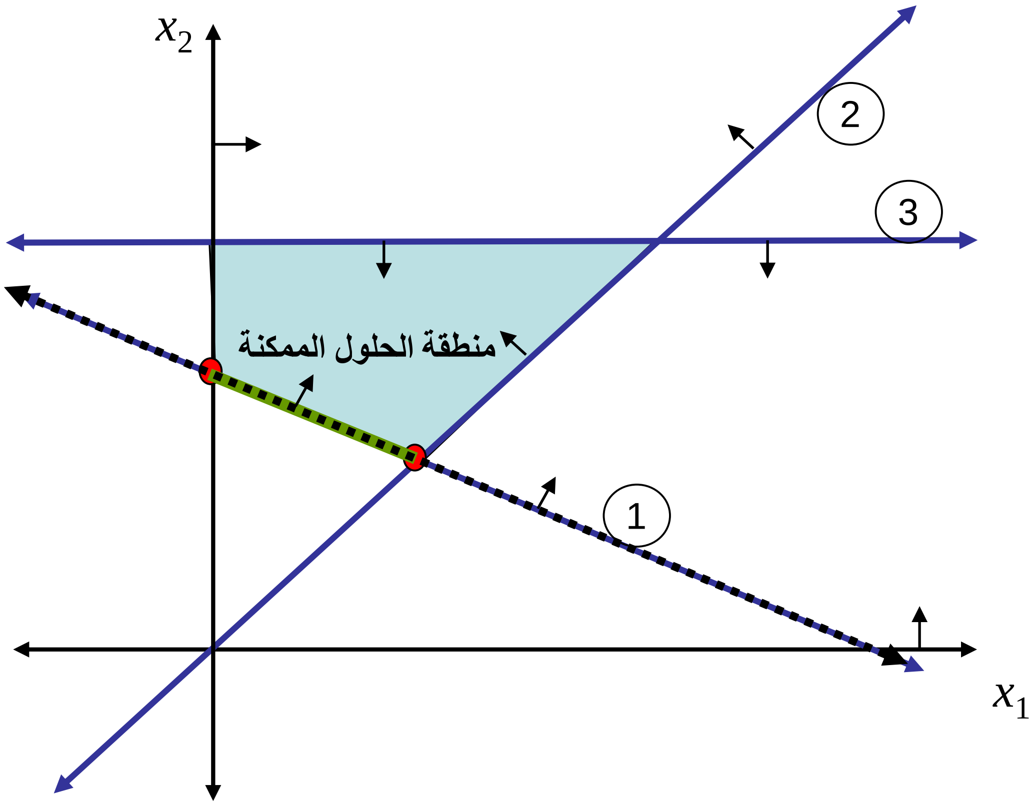
$$5(1)+10(1) = 15 < 90$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نحرك مستقيم دالة الهدف موازيا لنفسه في إتجاه تحسنها

حالات القرار في البرامج الخطية



الحل الأمثل:

جميع النقاط على قطعة المستقيم (اللون الأخضر) حلول مثلى

حالات القرار في البرامج الخطية

قيمة دالة الهدف غير محدودة:

مثال : قيمة دالة الهدف غير محدودة

$$\max \quad z = 50x_1 + 100x_2$$

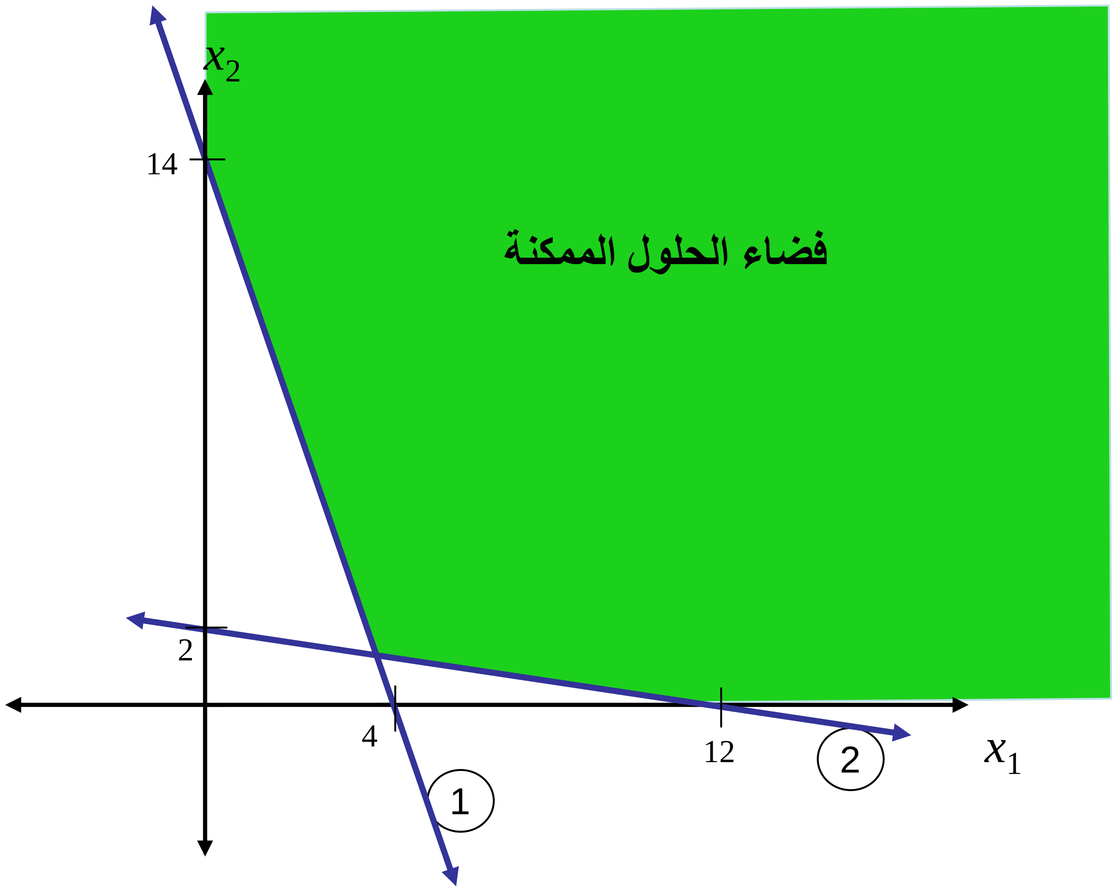
s.t.

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم منطقة الحلول الممكنة

$$x_1 \geq 0 \;,\;\; x_2 \geq 0$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$(0\,,14)\;,\;(4\,,0)$$

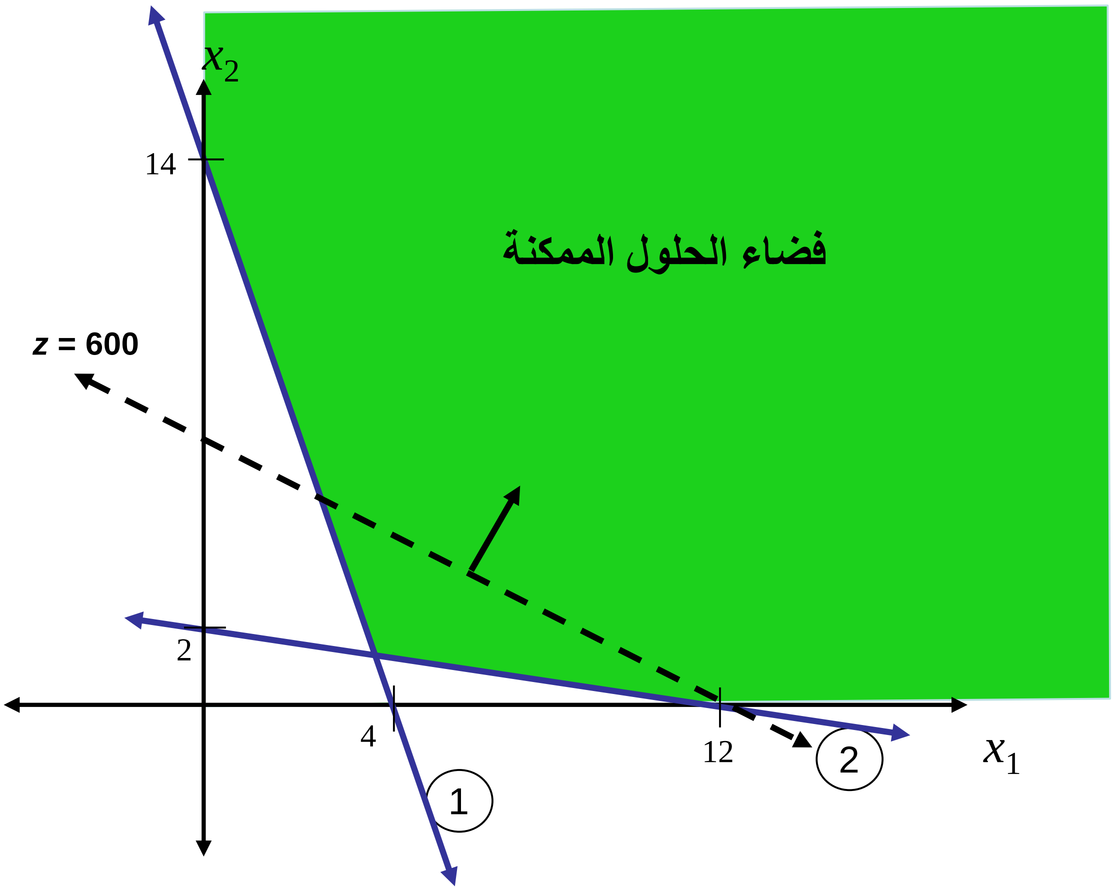
$$(0\,,0) \Rightarrow 7(0)+2(0) = 0 < 28$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$(0\,,2)\;,\;(12\,,0)$$

$$(0\,,0) \Rightarrow 2(0)+12(0) = 0 < 24$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم مستقيم دالة الهدف

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

نرسم مستقيم دالة الهدف عندما يمر بالنقطة (4 , 4)

$$50x_1 + 100x_2 = 600$$

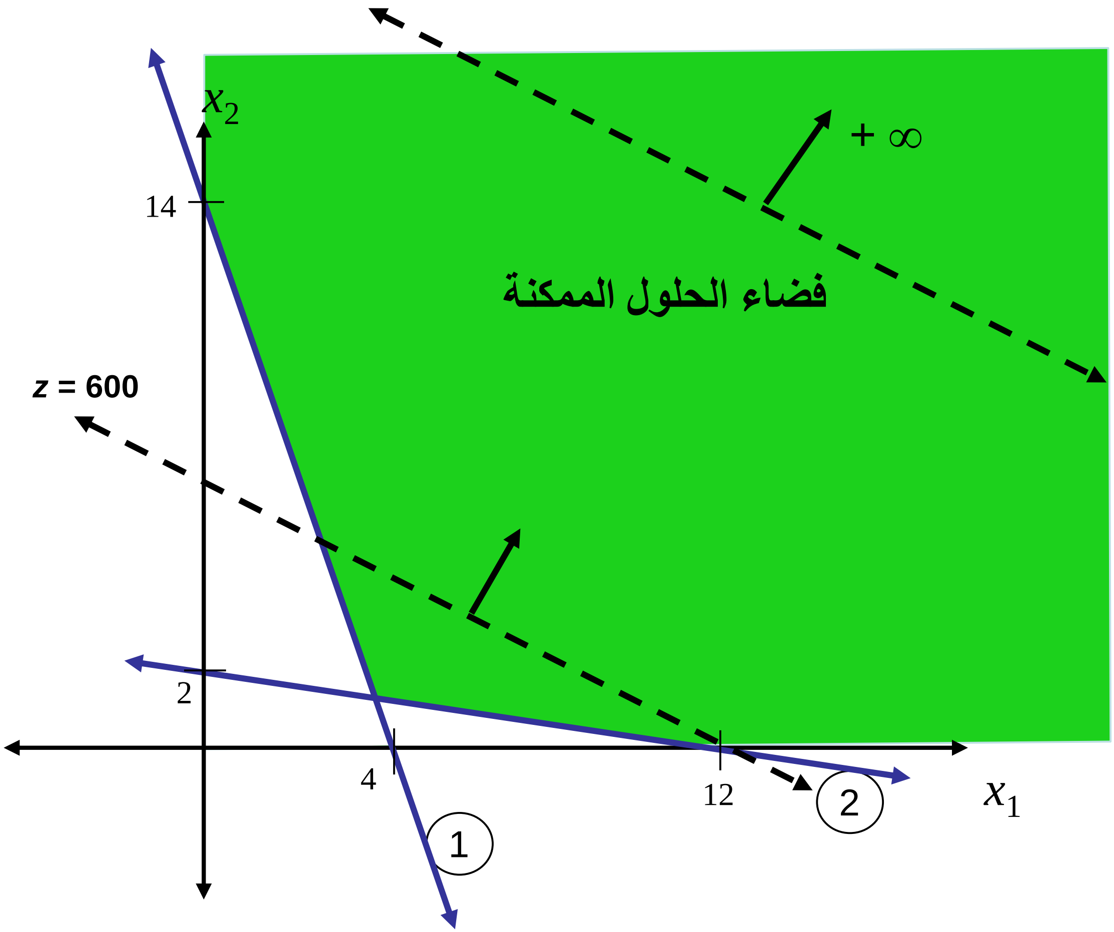
نحتاج نقطة أخرى:

$$\text{if } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$$

$$(4,4) \text{ and } (0,6)$$

اتجاه تحسن دالة الهدف للأعلى.

حالات القرار في البرامج الخطية



تتزايد قيمة دالة الهدف إلى ما لا نهاية !

الحل الأمثل غير محدود.

إي أنه لا يوجد حل أمثل.

حالات القرار في البرامج الخطية

فضاء الحلول فارغ:

مثال : افترض البرنامج الخطي التالي

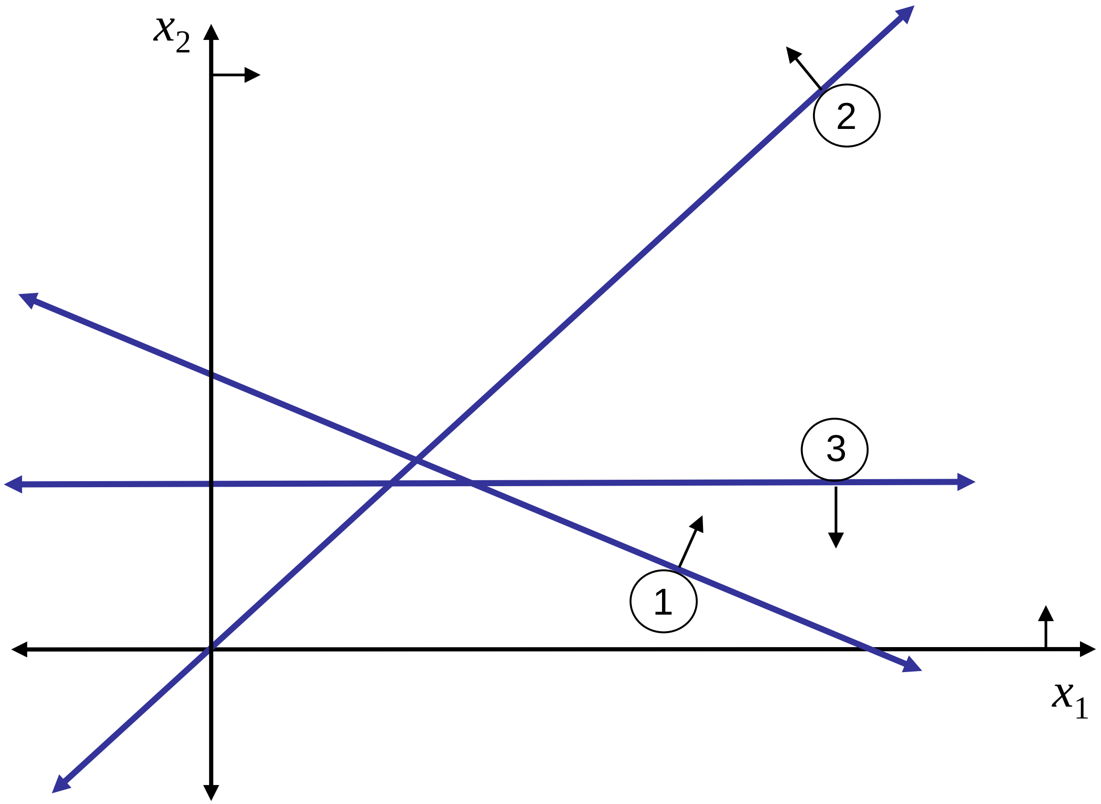
$$\min \quad z = 5x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ -x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حالات القرار في البرامج الخطية

الحل:



$x_1 \geq 0 \;,\;\; x_2 \geq 0$

$x_1 + 2x_2 \geq 10$

$(0\,,5)\;,\;(10\,,0)$

$(0,0) \Rightarrow (0)+2(0) = 0 < 10$

$-x_1 + x_2 \leq 0$

$(1\,,1)\;,\;(2\,,2)$

$(1,2) \Rightarrow (2) - (1) = 1 > 0$

$x_2 \leq \;3$

لا توجد منطقة تقاطع مشتركة!

لا يوجد أي حل ممكن للبرنامج الخطي.