جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

نظرية القرارات

Decision Theory

الباب الثاني

إتخاذ القرار مع البيانات

Data decision problem

المحتويات

مقدمة: تعودنا سابقاً اتخاذ القرار بدون أي معلومات عن الواقع المحيط بنا، أو بدون بيانات. ونوضح فكرة إستخدام البيانات في إتخاذ القرارمن خلال الأمثلة التالية:

مثال1: بفرض أنك تسكن في الطابق الثالث في عمارة ما وأنك تستعمل المصعد للوصول لشقتك بأحد الإجرائين التاليين:

a_1 = تنزل لتأخذ المصعد من القبو أو a_2 =تصعد لتأخذ المصعد من الطابق الأول.

وتكون الظروف المستقبلية المجهولة هي:

θ_1= المصعد يعمل أو θ_2 = المصعد معطل

ويمكننا إفتراض دالة خسارة منطقية $\ell(a,\theta)$.

يلاحظ في حالة تعطل المصعد θ_2 أن الطلب على المصعد سيكون بدون استجابة وبالتالي فإن عدد الأزرار المضيئة في الطوابق يكون عاليا والعكس بالعكس. ويمكن إستحداث بيانات للإستفادة منها لهذه الحالة بتركيب عداداً لمعرفة عدد الأزرار المضيئة في القبو والطابق الأول ونعطيه الرمز X . واضح أن قيم هذا المتغير هي $X=0,1,2$ باحتمالات عند θ_2 متدرجة من الأصغر الى الأكبر، بالشكل التالي مثلاً:

$$P(X=2\,|\,\theta_2)=0.70,\quad P(X=1\,|\,\theta_2)=0.20,\quad P(X=0\,|\,\theta_2)=0.10$$

بينما ستكون بشكل معاكس عند θ_1، بالشكل التالي مثلاً:

$$P(X=2\,|\,\theta_1)=0.10,\quad P(X=1\,|\,\theta_1)=0.30,\quad P(X=0\,|\,\theta_1)=0.60$$

أو أي دالة كتلة مناسبة $f(x;\theta)$ أخرى.

مثال2: بفرض أنك تتخذ يومياً أمام ظروف الطقس المختلفة أحد الإجراءات التالية:

a_1 = البقاء في البيت أو a_2 = الذهاب للعمل بدون مظلة

أو a_3 = الذهاب للعمل مع مظلة.

وتكون الظروف المستقبلية المجهولة هي:

θ_1 = الجو ماطر أو θ_2 = الجو صحو

ولنفرض أن $\ell(a,\theta)$ هي دالة خسارة منطقية .

ويمكن إستحداث بيانات للإستفادة منها لهذه الحالة بالإستماع للنشرة الجوية الصباحية وتعريف متغيراً عشوائياً X يأخذ القيم التالية:

إذا قالت النشرة أن الجو صحواً فإن $X = 0$

إذا قالت النشرة أن الجو ماطراً فإن $X = 1$

ويجب أن تتوفر دالة كتلة مناسبة $f(x;\theta)$ تتميز بمصداقية عالية. بمعنى أن تقديرات النشرة الجوية يجب أن تكون دقيقة بمافيه الكفاية. ويمكن أن نقول أن النشرة الجوية ذات مصداقية عالية طالما أن القيمتين $f(1;\theta_1)$ و $f(0;\theta_2)$ عاليتين.

طريقة إستخدام البيانات X في إتخاذ القرار:

نفرض أننا أمام مسألة إتخاذ قرار فيها مجموعة الإجراءات البسيطة التالية :

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\dots, a_k\}$$

و مجموعة الظروف المستقبلية المجهولة هي:

$$\Omega = \{\theta\}$$

و لدينا متغيراً عشوائياً X يأخذ قيمه في فضاء القيم التالي:

$$\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$$

وأن دالة كتلته الاحتمالية المناسبة $f(x;\theta)$ متوفرة ومعلومة.

فإننا نستعمل البيانات X في اتخاذ القرار بأن نختار إجراءً بسيطاً من المجموعة $\mathcal{A}$ عند كل قيمة من قيم المتغير X كما يلي:

- نختار الإجراء a_{i_1} عند القيمة x_1
- نختار الإجراء a_{i_2} عند القيمة x_2
- نختار الإجراء a_{i_n} عند القيمة x_n

وبذلك نحصل على تشكيلة من الإجراءات البسيطة عددها n كما يلي:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots\dots, a_{i_n}$$

ونسمي هذه التشكيلة تصرفاً بسيطاً(ترجمة Decision Rule) ونعطيها الرمز d.

واضح أن d هو دالة من قيم المتغير $\mathbb{X}$ الى قيم الإجراءات البسيطة $\mathcal{A}$، هكذا:

$$d: \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{A}$$

وبعبارة أخرى يمكن أن نكتب:

$$d(x_1) = a_{i_1}$$
$$d(x_2) = a_{i_2}$$
$$.$$
$$.$$
$$d(x_n) = a_{i_n}$$

عدد التصرفات الممكنة: واضح باستعمال طرق العد أن عدد كل التصرفات d الممكنة يساوي k^n تصرفاً .

مثال3: عدد التصرفات في **المثال1** السابق هو $2^3 = 8$ موضحة في الجدول التالي:

z	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
0	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2
1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_1	a_1	a_2	a_2
2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2

ملاحظة: نلاحظ أن التصرفين d_1, d_8 لا يتغيران مع تغيرX . ونقول عن هذا النوع من التصرفات أنها لا تعطي للبيانات أهمية أو قيمة.

تعريف نقول عن التصرف d أنه لا يعطي للبيانات قيمة أو أهمية إذا كان:

$$\forall x : d(x) = a$$

المعيار العددي لمقارنة التصرفات تحت نفس الظرف:

ليكن d أحد التصرفات عند الظرف θ ، وحيث أن لهذا التصرف d قيمة عند كل X كما يلي:

$$d(x_1) = a_{i_1}, \cdots, d(x_j) = a_{i_j}, .., d(x_n) = a_{i_n}$$

فسيكون لكل إجراء بسيط $d(x_j)$ الخسارة التالية :

$$\ell(d(x_j), \theta) = \ell(a_{i_j}, \theta) \ , \quad j = 1, \ldots, n$$

وإحتمال ظهور هذه الخسارة كاحتمال ظهور x_j أي $f(x_j;\theta)$. وهكذا تصبح الخسارات السابقة $\ell(d(x_j),\theta)$ قيماً لمتغير عشوائي له دالة كتلة احتمالية $f(x_j;\theta)$ والمتوسط التالي:

$$E_x[\ell(d,\theta)] = \sum_x \ell(d(x);\theta) f(x;\theta)$$

ونسمي هذا المتوسط **مخاطرة** d عند θ ونعطيه الرمز التالي $r(d,\theta)$، أي أن:

$$r(d,\theta) = E_x[\ell(d,\theta)] = \sum_x \ell(d(x),\theta) f(x;\theta)$$

وهو المعيار العددي الذي نستعمله لمقارنة التصرفات المختلفة عند الظرف θ.

ملاحظة هامة : إذا كان التصرف d **لايعطى أهمية للبيانات** ($\forall x : d(x) = a$) فيمكن إثبات أن:

$$r(d,\theta) = \ell(a,\theta)$$

البرهان:

$$r(d,\theta) = E_x[\ell(d,\theta)] = \sum_x \ell(d(x),\theta) f(x;\theta)$$
$$= \sum_x \ell(a,\theta) f(x;\theta) = \ell(a,\theta) \sum_x f(x;\theta) = \ell(a,\theta)$$

ومنه فسيكون لدينا في **المثال1** السابق النتائج التالية:

$$\forall\theta : r(d_1\theta) = \ell(a_1,\theta) \quad \& \quad r(d_8\theta) = \ell(a_2,\theta)$$

مثـــــــال4: لديك مسألة إتخاذ القرار بدالة الخسارة والبيانات التالية:

$\ell(a,\theta)$	θ_1	θ_2
a_1	**1**	**4**
a_2	**2**	**3**
a_3	**5**	**2**

$f(x;\theta)$

x	θ_1	θ_2
x_1	**0.7**	**0.1**
x_2	**0.1**	**0.4**
x_3	**0.2**	**0.5**

أحسب $r(d,\theta_2)$, $r(d,\theta_1)$ للتصرفين التاليين:

x	d_1	d_2
x_1	a_3	a_2
x_2	a_1	a_3

x_3	a_2	a_2

$r(d,\theta_1)=\sum_x \ell(d(x),\theta_1)f(x;\theta_1)$ $\qquad$ $r(d,\theta_2)=\sum_x \ell(d(x),\theta_2)f(x;\theta_2)$

$$d_1\begin{pmatrix}=\ell(a_3,\theta_1)\times0.7+\ell(a_1,\theta_1)\times0.1+\ell(a_2,\theta_1)\times0.2\\=5\times0.7+1\times0.1+2\times0.2=4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell(a_3,\theta_2)\times0.1+\ell(a_1,\theta_2)\times0.4+\ell(a_2,\theta_2)\times0.5\\=2\times0.1+4\times0.4+3\times0.5=3.3\end{pmatrix}$$

$$d_2\begin{pmatrix}=\ell(a_2,\theta_1)\times0.7+\ell(a_3,\theta_1)\times0.1+\ell(a_2,\theta_1)\times0.2\\=2\times0.7+5\times0.1+2\times0.2=2.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}=\ell(a_2,\theta_2)\times0.1+\ell(a_3,\theta_2)\times0.4+\ell(a_2,\theta_2)\times0.5\\=3\times0.1+2\times0.4+3\times0.5=2.6\end{pmatrix}$$

عناصر مسألة إتخاذ القرار مع البيانات: هي العناصر الأربعة التالية:

1- كل عناصر إتخاذ القرار بدون بيانات:

- مجموعة الإجراءات البسيطة $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$
- مجموعة الظروف الطبيعية $\Omega=\{\theta\}$.
- معيار دالة الخسارة $\ell(a,\theta)$ للمفاضلة بين الإجراءات البسيطة عند كل θ.

2- دالة البيانات $f(x;\theta): x=x_1,x_2,\dots,x_n$

3- مجموعة التصرفات البسيطة $\mathcal{D}=\{d_1,d_2,\dots,d_m\}$ بدلاً من $\mathcal{A}$

4- معيار المخاطرة $r(d,\theta)$ للمفاضلة بين التصرفات عند كل θ بدلاً من $\ell(a,\theta)$

الحلول التي نبحث عنها عند إتخاذ القرار مع البيانات:

نبحث عن الحلول المناسبة بطريقة مشابهة لإتخاذ القرار بدون بيانات. ونبدأ بحذف التصرفات الضعيفة، ونقول عن التصرف d_2 أنه ضعيف أمام d_1 إذا كان:

$$\forall\theta \Rightarrow r(d_1,\theta)\le r(d_2,\theta)$$

ثم نبحث عن النوعين التاليين من الحلول:

أولاً: التصرف البسيط أقل الكبريات وتصرف بيز:

- سنبحث عن التصرف البسيط d^* أقل الكبريات المعرف بالشكل:

$$\forall d \Rightarrow Max_\theta\, r(d^*,\theta)\le Max_\theta\, r(d,\theta)$$

بدلاً من الإجراء البسيط a^* أقل الكبريات المعرف بالشكل:

$$\forall a \Rightarrow Max_\theta\, \ell(a^*,\theta)\le Max_\theta\, \ell(a,\theta)$$

ونعرف **قيمة البيانات للحل البسيط أقل الكبريات** بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_\theta\, \ell(a^*,\theta) - Max_\theta\, r(d^*,\theta)$$

- سنبحث عن تصرف بيز d^* البسيط المعرف بالشكل:

$$\forall d \Rightarrow B(d^*) \leq B(d) = \sum_j r(d,\theta_j)g(\theta_j)$$

بدلاً من إجراء بيز a^* البسيط المعرف بالشكل:

$$\forall a \Rightarrow B(a^*) \leq B(a) = \sum_j \ell(a,\theta_j)g(\theta_j)$$

ونعرف **قيمة البيانات لحل بيز البسيط** بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$B(a^*) - B(d^*)$$

ثانياً: التصرف المركب أقل الكبريات:

بفرض أن $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ هي مجموعة التصرفات البسيطة، وبفرض أننا قررنا إختيار التصرف d_i بالإحتمال p_i فإننا نعرف التصرف المركب بأنه دالة الكتلة:

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \;\; ; \;\; \Sigma p_i = 1$$

ونمثل التصرف المركب P بنقطة في الفضاء لها عند كل ظرف $\boldsymbol{\theta}$ الإحداثي التالي:

$$\boldsymbol{R(P,\theta) = \Sigma_{i=1}^{m} r(d_i,\theta) p_i}$$

وسنبحث عن التصرف المركب أقل الكبريات P^* المعرف بالشكل:

$$\boldsymbol{\forall P \Longrightarrow Max_\theta R(P^*,\theta) \leq Max_\theta R(P,\theta)}$$

بدلاً من الإجراء المركب أقل الكبريات P^* المعرف بالشكل:

$$\boldsymbol{\forall P \Longrightarrow Max_\theta L(P^*,\theta) \leq Max_\theta L(P,\theta)}$$

حيث:

$$\boldsymbol{L(P,\theta) = \Sigma_{i=1}^{k} \ell(a_i,\theta) p_i}$$

بفرض أن p_i هو إحتمال إختيار الإجراء البسيط a_i من هي مجموعة الإجراءات البسيطة $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

ونعرف **قيمة البيانات للحل المركب أقل الكبريات** بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_\theta\ L(P^*,\theta) - Max_\theta\ R(P^*,\theta)$$

وبما أننا نعتبر أي تصرف بسيط d_i تصرفاً مركباً نضع في المنزلة i كل الكتلة، لذلك يمكننا أن نستنتج من المتراجحة السابقة متراجحة جديدة تربط بين التصرف البسيط$\boldsymbol{d}^*$ أقل الكبريات وبين التصرف المركب$\boldsymbol{P}^*$ أقل الكبريات كما يلي:

$$\boldsymbol{Max_\theta R(P^*,\theta) \le Max_\theta r(d^*,\theta)}$$

وتكون فائدة الإنتقال من $\boldsymbol{d}^*$ الى $\boldsymbol{P}^*$ بالتخفيض الحاصل من الفرق:

$$\boldsymbol{Max_\theta r(d^*,\theta) - Max_\theta R(P^*,\theta)}$$

====================

<u>مثـــــــال5:</u> لديك مسألة إتخاذ القرار بدالة الخسارة والبيانات التالية:

$\ell(a,\theta)$	θ_1	θ_2
a_1	**0**	**4**
a_2	**3**	**0**

x	θ_1	θ_2
x_1	**0.7**	**0.2**
x_2	**0.2**	**0.3**
x_3	**0.1**	**0.5**

$f(x;\theta)$

1. عين جدول التصرفات الممكنة واحسب مخاطراتها.
2. عين التصرف البسيط أقل الكبريات $\boldsymbol{d}^*$.
3. عين التصرف المركب أقل الكبريات $\boldsymbol{P}^*$.
4. بين فائدة الإنتقال من $\boldsymbol{d}^*$ الى $\boldsymbol{P}^*$.
5. ما قيمة البيانات في الحل البسيط أقل الكبريات.
6. ما قيمة البيانات في الحل المركب أقل الكبريات.
7. ما قيمة البيانات في حل بيز عند التوزيع المبدئي $g(\theta_1)=1/3$
8. إقترح تصرفاً مركباً وقارنه مع$\boldsymbol{P}^*$ الذي وجدته في 3.

<u>الحــــــل</u> :

1) يوجد $8=2^3$ تصرفاً التالية:

x	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
x_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2

x_2	a_1	a_1	a_2	a_2	a_1	a_1	a_2	a_2
x_3	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2

نلاحظ أن d_1, d_8 لا تعطي للبيانات قيمة لذا:

$$\forall\theta : r(d_1\theta) = \ell(a_1,\theta) \quad \& \quad r(d_8\theta) = \ell(a_2,\theta)$$

ولحساب بقية المخاطرات نستعمل الصيغة التالية:

$$r(d,\theta) = E_x[\ell(d,\theta)] = \sum_x \ell(d(x),\theta) f(x;\theta)$$

ونتبع في حسابها الترتيب التالي:

$$\boldsymbol{r(d,\theta_1) = \Sigma_x \ell(d(x),\theta_1) f(x;\theta_1)} \qquad \boldsymbol{r(d,\theta_2) = \Sigma_x \ell(d(x),\theta_2) f(x;\theta_2)}$$

==

$$\boldsymbol{d_2}\begin{pmatrix} = \ell(a_1,\theta_1)\times 0.7 + \ell(a_1,\theta_1)\times 0.2 + \ell(a_2,\theta_1)\times 0.1 \\ = 0\times 0.7 + 0\times 0.2 + 3\times 0.1 = 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} = \ell(a_1,\theta_2)\times 0.2 + \ell(a_1,\theta_2)\times 0.3 + \ell(a_2,\theta_2)\times 0.5 \\ = 4\times 0.2 + 4\times 0.3 + 0\times 0.5 = 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{d_3}\begin{pmatrix} = \ell(a_1,\theta_1)\times 0.7 + \ell(a_2,\theta_1)\times 0.2 + \ell(a_1,\theta_1)\times 0.1 \\ = 0\times 0.7 + 3\times 0.2 + 0\times 0.1 = 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} = \ell(a_1,\theta_2)\times 0.2 + \ell(a_2,\theta_2)\times 0.3 + \ell(a_1,\theta_2)\times 0.5 \\ = 4\times 0.2 + 0\times 0.3 + 4\times 0.5 = 2.8 \end{pmatrix}$$

ونتابع بنفس الترتيب فنحصل على الجدول التالي:

$r(d,\theta)$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
θ_1	0	0.3	0.6	0.9	2.1	2.4	2.7	3
θ_2	4	2	2.8	0.8	3.2	1.2	2	0

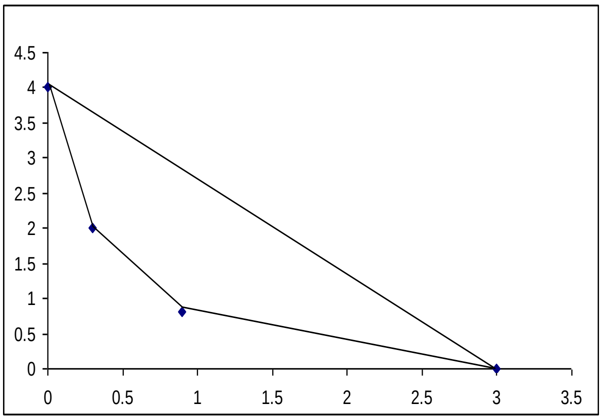
نلاحظ أن d_3, d_5, d_7 ضعيفة أمام d_2، وأن d_6 ضعيف أمام d_4. وبعد حذف كل هذه التصرفات الضعيفة يبقى لدينا التصرفات المقبولة التالية:

$r(d,\theta)$	d_1	d_2	d_4	d_8
θ_1	0	0.3	0.9	3
θ_2	4	2	0.8	0
$Max_\theta r(d,\theta)$	4	2	0.9	3

2. واضح أن التصرف البسيط أقل الكبريات $\boldsymbol{d^*}$ هو d_4 يقابله:

$$Max_\theta r(d^*,\theta) = 0.9 .$$

3. ولحساب التصرف المركب أقل الكبريات P^* نرسم مجموعة النقاط الممثلة للتصرفات المركبة:



نجد أن التصرف المركب أقل الكبريات يقع بين d_4 , d_2 لذا فإنه يأخذ الشكل التالي:

$$P^* = (0,\ p,\ (1-p),\ 0)$$

ونحسبه كما يلي:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = d_2 p + (1-p) d_4 = p\begin{pmatrix} 0.3 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-p)\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9-0.6p \\ 0.8+1.2p \end{pmatrix}$$

$$R_1 = R_2 \Rightarrow 0.9 - 0.6p = 0.8 + 1.2p \Rightarrow p = 1/18 \Rightarrow P^* = (0,1/18,17/18,0)$$

$$\Rightarrow Max_\theta R(P^*,\theta) = 13/15 = 0.87$$

4. وتكون فائدة الإنتقال من d^* الى P^* هو حصول التخفيض التالي:

$$Max_\theta r(d^*,\theta) - Max_\theta R(P^*,\theta) = 0.9 - \frac{13}{15} = \frac{1}{30}$$

5. قيمة البيانات في الحل البسيط أقل الكبريات هو التخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_\theta\ \ell(a^*,\theta) - Max_\theta\ r(d^*,\theta)$$

وواضح من جدول الخسارة أن $a^* = a_2$ و $Max_\theta\ \ell(a^*,\theta) = 3$ وبذلك يكون:

$$Max_\theta\ \ell(a^*,\theta) - Max_\theta\ r(d^*,\theta) = 3 - 0.9 = 2.1$$

6. قيمة البيانات في الحل المركب أقل الكبريات هو التخفيض الحاصل من الفرق:

$$Max_\theta\ L(P^*,\theta) - Max_\theta\ R(P^*,\theta)$$

وقد حسبنا في 3 المقدار: $Max_\theta\ R(P^*,\theta)=13/15$

ولحساب $Max_\theta\ L(P^*,\theta)$ نرسم النقاط الممثلة للإجراءات المركبة ونجد أن الإجراء المركب أقل الكبريات هو $\boldsymbol{P^* = (p,(1-p)}$ ونحسبه كما يلي:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = a_1 p + (1-p)a_2 = p\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (1-p)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3p \\ 4p \end{pmatrix}$$

$$L_1 = L_2 \Rightarrow 3-3p = 4p \Rightarrow p = 3/7 \Rightarrow P^* = (3/7, 4/7)$$

$$Max_\theta\ L(P^*,\theta) = 12/7$$

وبذلك تكون قيمة البيانات للحل المركب أقل الكبريات يساوي:

$$Max_\theta\ L(P^*,\theta) - Max_\theta\ R(P^*,\theta) = 12/7 - 13/15 = 89/105$$

7. قيمة البيانات في حل بيز عند التوزيع المبدئي $g(\theta_1)=1/3$ هو الفرق:

$$B(a^*) - B(d^*)$$

- نحسب أولاً إجراء بيز a^* كما يلي:

$$\begin{pmatrix} B(a_1) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(4) = \frac{8}{3} \\ B(a_2) = \frac{1}{3}(3) + \frac{2}{3}(0) = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^* = a_2 \ \ \&\ \ B(a^*) = 1$$

- وثم نحسب تصرف بيز d^* كما يلي:

$$\begin{pmatrix} B(d_1) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(4) = \frac{8}{3} & \&\ \ B(d_2) = \frac{1}{3}(0.3) + \frac{2}{3}(2) = \frac{4.3}{3} \\ B(d_4) = \frac{1}{3}(0.9) + \frac{2}{3}(0.8) = 5/6 & \&\ \ B(d_8) = \frac{1}{3}(3) + \frac{2}{3}(0) = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d^* = d_4 \Rightarrow B(d^*) = 5/6$$

فتكون قيمة البيانات في حل بيز هي: $B(a^*) - B(d^*) = 1 - 5/6 = 1/6$

8. نقترح التصرف المركب $P = (1/8,\ 2/8,\ 4/8,\ 1/8)$ الذي تمثله النقطة:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{8}\times\begin{pmatrix} 0.3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{8}\times\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.8 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\times\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.4 \end{pmatrix} \Rightarrow Max_\theta R(P,\theta) = 1.4$$

ونقارنه مع $P^* = (0, 1/18, 17/18, 0)$ وقد وجدنا في 3 أن $Max_\theta R(P^*,\theta) = 0.87$

وتكون المقارنة بالشكل المحقق التالي $Max_\theta R(P^*,\theta) = 0.87 \le Max_\theta R(P,\theta) = 1.4$

باب 2 واجب (1): أعد **المثال 5** على دالة الخسارة والبيانات التالية:

$\ell(a,\theta)$	θ_1	θ_2
a_1	**7**	**4**
a_2	**3**	**5**
a_3	**1**	**7**

X	θ_1	θ_2
x_1	**0.3**	**0.9**
x_2	**0.7**	**0.1**

$f(x;\theta)$

باب 2 واجب (2): ترد بضاعة الى مخزن في علب تحوي العلبة خمس قطع ولنفرض أن العلبة تحوي θ من القطع المعيبة. ويقوم المخزن إما بقبول العلبة (a_1) أو رفضها (a_2) بدالة الخسارة $\ell(a,\theta)$ التالية:

θ	$\theta_0=0$	$\theta_1=1$	$\theta_2=2$	$\theta_3=3$	$\theta_4=4$	$\theta_5=5$
a_1	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
a_2	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
$\ell(a,\theta)$						

بفرض أن التوزيع المبدئي هو

θ	0	1	2	3	4	5
$g(\theta)$	0.55	0.2	0.1	0.07	0.06	0.02

أولاً: نريد اتخاذ القرار **مع البيانات** عن طريق سحب عينة من العلبة حجمها ***n=1*** ونفحصها ونعرف المتغير ***X*** بأنه عدد القطع المعيبة في العينة، ثم أجب على مايلي:

1- عين جدول التصرفات الممكنة.

2- أحسب قيم المخاطرة للتصرفات.

3- ماهي الحلول التي يمكننا حسابها واحسب قيمة البيانات عندها.

ثانياً: أعد حالة إتخاذ القرار **مع البيانات** بسحب عينة من العلبة حجمها ***n=2***

باب 2 واجب (3)): لديك مسألة اتخاذ قرارات بالإجراءات $\{a_1, a_2, a_3\}$ والظروف $\{\theta_1, \theta_2\}$ والبيانات $\{x_1, x_2\}$. وبفرض أن جدول التصرفات d_i والمخاطرة $r(d_i, \theta_j)$ معطاة كما يلي:

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
x_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
x_2	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
θ_1	**6**	**5**	**4**	**5**	**2**	**2**	**1**	**2**	**0**
θ_2	**3**	**2**	**7**	**5**	**4**	**6**	**4**	**3**	**6**

ما قيمة البيانات لحل أقل الكبريات البسيط والمركب وحل بيز عند التوزيع المبدئي $g(\theta_1) = 0.7$