الاختبار الفصلي الأول　　243 ريض　　الفصل 451

ملاحظة: رتب اجوبتك في الدفتر حسب ترتيب الاسئلة مع الاعتناء بوضوح الخط.

اقفل جميع جوالاتك و سلمها الى المراقب.

1- أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ لكل $n \geq 1$.

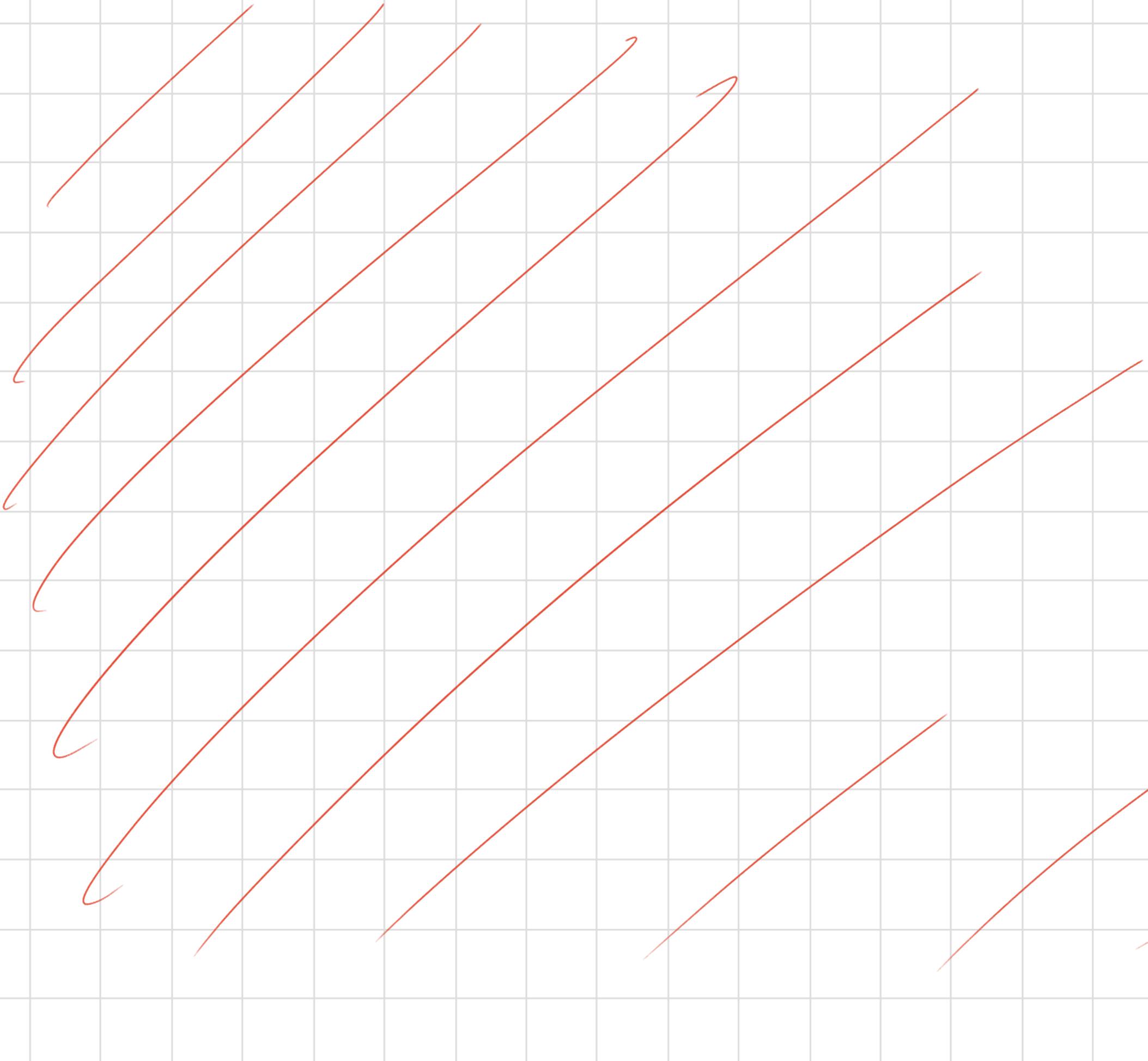
2- أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 221 ,117 ثم عبر عنه كتركيب خطي منهما مع بيان خطوات الحل كاملة.

3- اذا كانت الاعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أولية نسبياً مثنى مثنى ، فأثبت أن

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n$$

4- اذا كان لدين المعادلة الدايوفانتينية $ax + by = c$ ، فأثبت وجود حل لها اذا و فقط اذا كان $d \mid c$ ، حيث $d = (a,b)$. اذا كان x_0, y_0 أحد الحلول، فإن جميع الحلول على الصيغة $x = x_0 + \frac{b}{d}k, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

5- إذا كان $n = (718)_9$ ، فأوجد تمثيل العدد للأساس 7 .



Q 1)

-1 أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ لكل $n \geq 1$.

1) base Step: (let $n=1$)

$L.H.S = (3(1)-2) = 3-2=1$

$R.H.S = \left(\frac{(1)(3(1)-1)}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\right)=1$

$L.H.S = R.H.S \Rightarrow p(1)$ is True

2) Inductive Hyp:

assume the formula is true for $n=k \geq 1$

$$\sum_{K=1}^{k}(3K-2) = \frac{k(3(k)-1)}{2} \quad (*)$$

3 Inductive Step: $(n = k+1)$ (We show it is work for $n = k+1$)

$$\sum_{k=1}^{k+1} (3k-2) = \frac{(k+1)\left(3(k+1)-1\right)}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2} \quad (*)$$

$$\sum_{k=1}^{k+1} (3k-2) = \left(\sum_{k=1}^{k} (3k-2)\right) + \left(3(k+1)-2\right)$$

L.H.S

from $(*)$

$$= \frac{k(3k-1)}{2} + 3k+1 \cdot \frac{2}{2}$$

توحيد المقام

$$= \frac{k(3k-1) + 2(3k+1)}{2}$$

$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

L.H.S

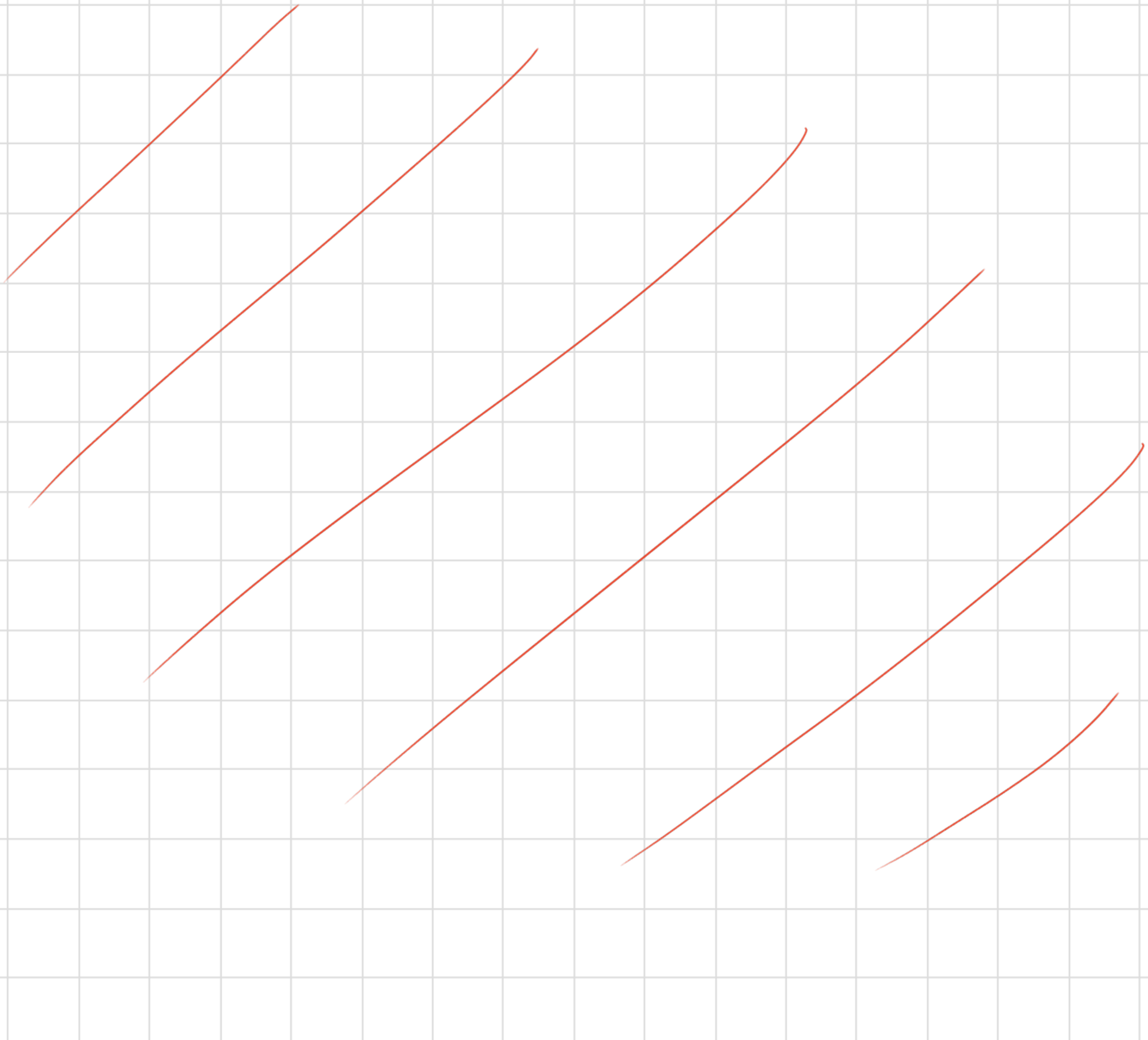
$$= \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

R.H.S

$$= \frac{(k+1)(3k+1)}{2}$$

by P.M.I the Statement is true $\forall n \geq 1$

Principle of Mathematical Induction



Q 2)

-2 أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 221, 117 ثم عبر عنه كتركيب خطي منهما مع بيان خطوات الحل كاملة.

(1) $d = (221, 117) = ?$

by Ecuildean Algorithem :

$221 = 117 \times 1 + 104$

$117 = 104 \times 1 + 13$

$104 = 13 \times 8 + 0$

So $d = (221, 117) = 13$

Back-Substitution ↓

$13 = 117 - 104$

$13 = 117 - (221 - 117)$

$$13 = 117 - 221 + 117$$

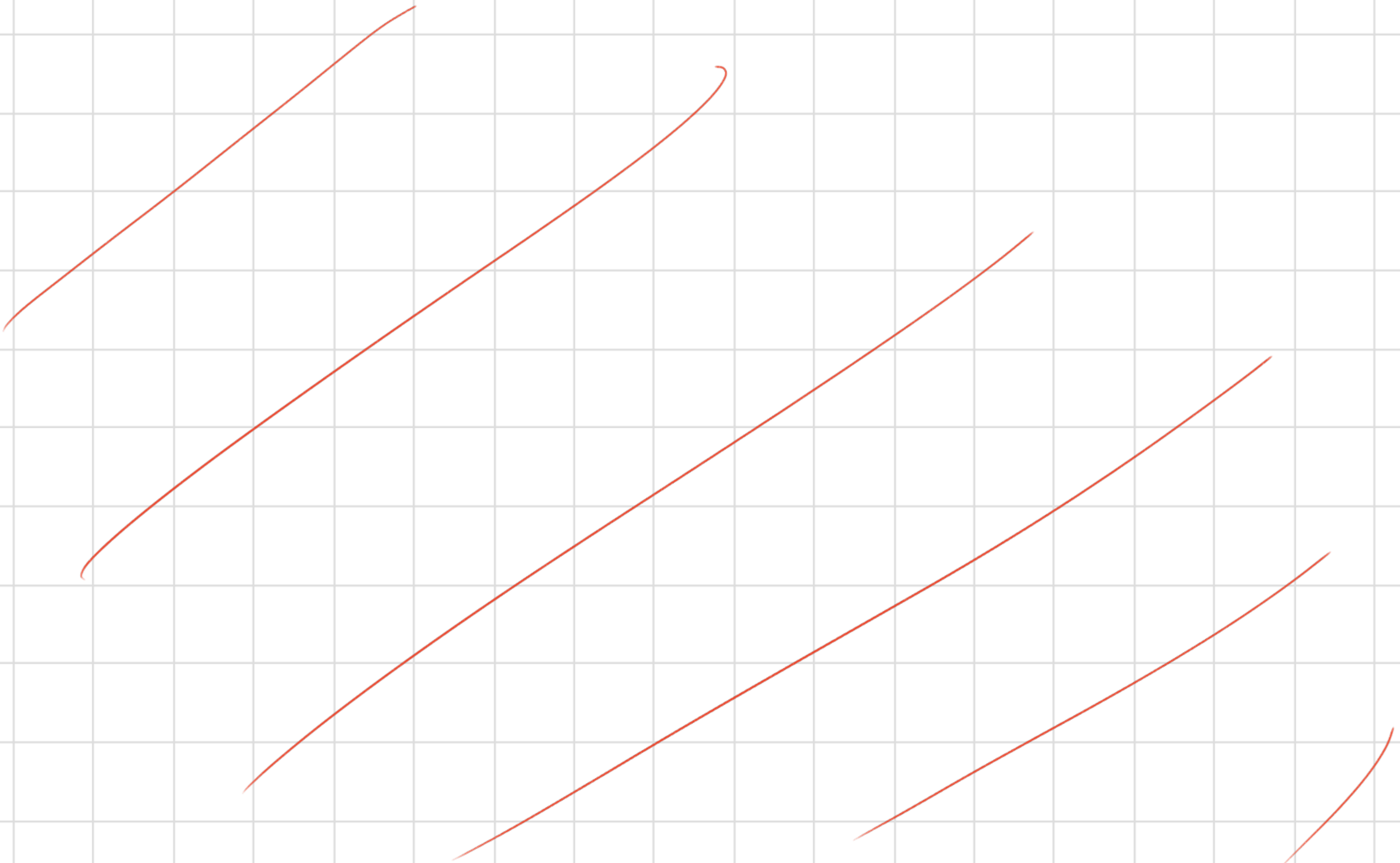
$$\downarrow$$

$$\leftarrow x$$

$$13 = 221(-1) + 117(2)$$

$$x = -1 \quad , y = 2$$

$$221x + 117y = 13$$



Q3)

3- اذا كانت الاعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أولية نسبياً مثنى مثنى ، فأثبت أن

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n$$

Proof by Mathematical induction :

(1) base step : $n=2$

$[a_1, a_2] = a_1 a_2$

كبران اوليان نسبيا

it is true when $(a_1, a_2) = 1$

$(a_1, a_2)\,[a_1, a_2] = a_1 a_2$

$1 \cdot [a_1, a_2] = a_1 a_2$

$[a_1, a_2] = a_1 a_2$

So the statment is true $n=2$

(2) We assume the Statement is True $\forall k$ کوچک تر مساوی

$$[a_1, a_2, \ldots\ldots a_k] = a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_k$$

(3) Now we proof $n = k+1$

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_k, a_{k+1}] = a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_k a_{k+1}$$

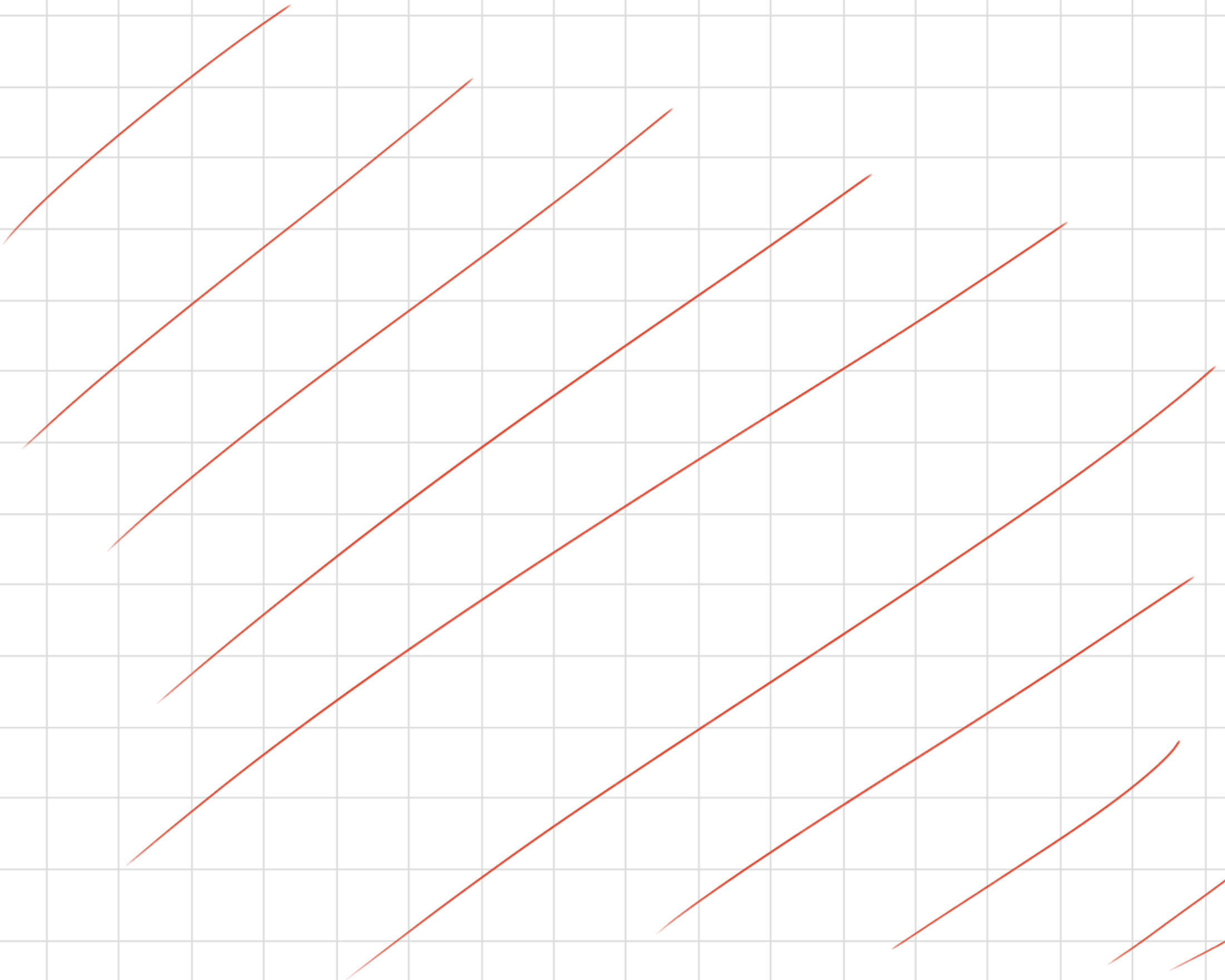
$$[a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_k, a_{k+1}] = [[a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_k], a_{k+1}]$$

$$[a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots a_k, a_{k+1}] = (a_1 a_2 \ldots a_k) \cdot a_{k+1} =$$

↳ کوچک و مساوی k $\quad (a_i, a_{k+1}) = 1 \quad 1 \le i \le k$

$= a_1 a_2 \cdots \cdots a_k \, a_{k+1}$

by M.I the statement is true $\forall n \geq 2$



Q4)

-4 اذا كان لدين المعادلة الدايوفانتينية $ax + by = c$ ، فأثبت وجود حل لها اذا و فقط اذا كان $d \mid c$ ، حيث $d = (a,b)$. اذا كان x_0, y_0 أحد الحلول، فإن جميع الحلول على الصيغة $x = x_0 + \frac{b}{d}k, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

if & f

نبدأ من اليمين

$\Rightarrow$ $d|c$ so $\exists r \in \mathbb{Z} \rightarrow c = dr$

ا $d = (a,b)$ Bézout $\rightarrow$ $\exists m,n \in \mathbb{Z}$

$d = am + bn$

$d_r = a(mr) + b(nr)$

$c = a(mr) + b(nr)$

assume that $mr = x_0$, $nr = y_0$ $\Rightarrow (x_0, y_0)$

حل لمعادلة

If $d|c$ is Solution

We assume $\exists$ a Solution

(x_0, y_0) :

$$ax_0 + by_0 = c$$

$d = (a,b)$

$\Downarrow$

$d|a \wedge d|b$

$\Downarrow$

$d|ax_0 + by_0$

$\Downarrow \quad " c"$

$d|c$

اثبات الحل العام :

(x_1, y_1) is Solution

(x_0, y_0) is Solution

$$ax_0 + by_0 = c$$

$$\Vdash$$

$$ax_1 + by_1 = c$$

$$ax_1 + by_1 = ax_0 + by_0$$

$$(ax_1 - ax_0) + (by_1 - by_0) = 0$$

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$$

$$a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0) \longrightarrow (*)$$

$d = (a,b) \Rightarrow \exists\ r,s \in \mathbb{Z}$ نعوض

$a = dr \quad , b = ds \quad , (r,s) = 1$

$\cdot \frac{1}{d}\, d r (x_1 - x_0) = -ds (y_1 - y_0) \cdot \frac{1}{d}$

$$r(x_1 - x_0) = -s(y_1 - y_0) \leftarrow (2)$$

From equation (2) We notice $s \mid r(x_1 - x_0)$

$1 (r,s) = 1$ So by Euclid lemma :

$$s \mid (x_1 - x_0)$$

. $k \in \mathbb{Z}$ حيث $x = x_0 + \frac{b}{d}k, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}k$ الصيغة

$\frac{b}{d} = s$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$

$x_1 - x_0 = ks$

$\Downarrow$

$x_1 = x_0 + ks$

$$s = \frac{b}{d} \Longrightarrow \quad x_1 = x_0 + \frac{b}{d} K$$

from (2) $= (x_1 - x_0)$

$$\cdot \tfrac{1}{s} \quad r(Ks) = -s(y_1 - y_0) \quad \cdot \tfrac{1}{s}$$

$$rK = -(y_1 - y_0)$$

$$rK = -y_1 + y_0$$

$$y_1 = y_0 - rK$$

$$r = \frac{a}{d} \Longrightarrow \quad y_1 = y_0 + \frac{a}{d} K$$

الصيغة العامة:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}k \quad , \quad y = y_0 - \frac{a}{d}k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

ك

25)

-5 إذا كان $n = (718)_9$ ، فأوجد تمثيل العدد للأساس 7 .

$n = 7 \times 9^2 + 1 \times 9^1 + 8 \times 9^0$

7×81 $\quad 9$ $\quad 1$

$n = 567 + 9 + 8 = (584)_{10}$

$584 = 83 \times 7 + 3$

$83 = 11 \times 7 + 6$

$11 = 1 \times 7 + 4$

$(584)_{10} = (1463)_7$

$1 < 7$

منا نوقف

و نقرأ الرقم المنعشر

- $(1463)_7 = (584)_{10}$