بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

مذكرة مقرر 215 احص (إحتمال -1-)

الدكتور/ محمد بن ناصر القريان أبو دجين

الطبعة الخامسة عام (1438هـ)

الفصل الأول

1- الإحتمال (Probability)

(1-1-1) مقدمة

سنراجع هنا بعض المواضيع التي سبق دراستها في مقررات سابقة لحاجتنا إليها في هذا المقرر. في العلوم التجريبية نلاحظ أن تكرار إجراء تجربة ما تحت نفس الظروف لا يعطي بالضرورة نفس النتائج. وهذا يعني أن لكل تجربة من ذلك النوع مجموعة من النتائج الممكنة. ومن مباحث علم الإحتمال حساب احتمال وقوع نتائج معينة لتلك التجارب.

(1-1-2) تعاريف أساسية

1. **التجربة العشوائية (Random Experiment) :**

التجربة العشوائية هي كل تجربة لا تعطي بالضرورة نفس النتيجة عند تكرار إجرائها مع علمنا المسبق لجميع نتائجها الممكنة.

أمثلة:

أ. رمي عملة مرة واحدة، نتائجها: ظهور الصورة H أو الكتابة T .

بـB رمي حجر نرد، نتائجها: ظهور السطح المكتوب عليه 1 أو2 أو3 أو4 او5 أو 6.

ج. سحب عينة من إنتاج مصنع لمعرفة المعيب منها والسليم في الإنتاج ، نتائجها: سليمة أو معيبة.

1. **فضاء العينة (Sample Space) :**

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة. ويرمز له بالرمز Ω أوS. وتنقسم فضاءات العينة من حيث عدد عناصرها إلى ثلاثة أنواع هي:

أ. **فضاء منته، وقابل للعد** : وهو الذي يحتوي على عدد محدود من العناصر.
مثال: تجربة رمي عملة ثلاث مرات، فضاء العينة لها هو:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

عدد عناصره ثمانية ، يرمز لذلك بـ : $n(\Omega) = 8$

ب. **فضاء غير منته، وقابل للعد:** وهو الذي يحتوي على عدد لا نهائي من العناصر لكنها قابلة للعد.
مثال: التجربة هي إلقاء قطعة نقود حتى تظهر الصورة H. فضاء العينة لهاهو:

$$\Omega = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \ldots\ldots\}$$

فعدد العناصر لا نهائي حيث لا نعلم متى ستنتهي هذه التجربة لكن العناصر قابلة للعد حيث H هو العنصر الأول ، TH الثاني، TTH الثالث،....وهكذا.

ولو أردنا فضاء العينة لعدد المرات اللازمة لإلقاء العملة حتى تظهر الصورة H في هذه التجربة لكان : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

ج. **فضاء غير منته، وغير قابل للعد:**
وهو الذي يحتوي على عدد لا نهائي من العناصر التي لا يمكن عدها. أي لا يمكن إيجاد تناظر أحادي بين عناصره وعناصر مجموعة الأعداد الطبيعية .{1,2,3....}

وهذا يعني أن عناصر هذا الفضاء هي كل الأعداد الحقيقية داخل فترة معينة (a,b) أي أن: $\Omega = \{x : x \in (a,b)\}$

مثال: الأعمار و الأوزان ودرجات الحرارة .

لاحظ أن الفضاءات في (أ ، ب) فضاءات متقطعة (منفصلة) بينما الفضاءات في(ج) متصلة (مستمرة).

3. الحادثة (Event):

الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فضاء العينة . ويرمز لها بالحروف ...,A,B,C أو $A_1,A_2,A_3,.....$.

ونقول عن الحادثة أنها وقعت إذا ظهر أحد عناصرها عند إجراء التجربة.

و تقسم الحوادث من حيث عدد عناصرها إلى قسمين هما:

أ. **حادثة بسيطة** (Elementary Event):

هي الحادثة التي تحتوي على عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

ب. **حادثة مركبة** (Compound Event):

هي الحادثة التي تحتوي على عنصرين أو أكثر من عناصر فضاء العينة.

وكذلك تقسم الحوادث من حيث وقوعها إلى ثلاثة أقسام هي :

أ. **حادثة مؤكدة** (Sure Event):

هي الحادثة التي تقع دائما عند إجراء التجربة. ويرمز لها بالرمز S أو Ω (وهي فضاء العينة). لماذا هي حادثة؟

ب. **حادثة مستحيلة** (Impossible Event):

هي الحادثة التي لا يمكن أن تقع عند إجراء التجربة. ويرمز لها بالرمز ϕ. (وهي المجموعة الخالية). لماذا هي حادثة؟.

ج. **حادثة عشوائية** (Random Event):

هي الحادثة التي ليست مؤكدة وليست مستحيلة الوقوع. أي هي الحادثة التي قد تقع و قد لا تقع عند إجراء التجربة ، ويرمز لها بالحروف ...,A,B,C أو$_1,A_2,A_3,.....$.

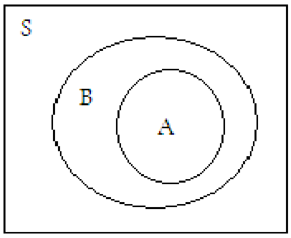
(3-1-1) بعض العلاقات الرياضية بين الحوادث موضحةً بأشكال فن

إن إجراء بعض العلاقات الرياضية بين الحوادث ينتج عنها حوادث جديدة يمكن

توضيحها بإستخدام أشكال ڤن كما يلي:

1. الحادثة الجزئية (Sub Event):

نقول عن حادثة A أنها حادثة جزئية من حادثة B ونكتب ذلك $A \subset B$ إذا كانت جميع عناصر A هي عناصر لـ B. ولها المدلول أن وقوع A يعني حتمية وقوع B، ويوضح بالرسم التالي:



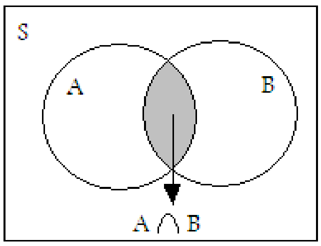
2. تكافؤ حادثتين (Equivalence):

نقول عن حادثة A أنها تكافئ حادثة B ونكتب ذلك $A = B$ إذا تحقق أن $A \subset B$ و $B \subset A$. وهذا يعني أن A هو تعبير أو إسم آخر لـ B .

3. تقاطع حادثتين (Intersection):

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة جديدة، يرمز لها بالرمز $A \cap B$ أو AB.

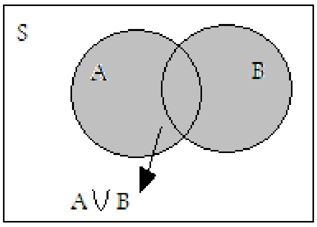
وقوع التقاطع يعني وقوع A و B معا، ويوضح بالرسم التالي:



4. إتحاد حاثتين (Union) :

إتحاد حادثتين A و B هو حادثة جديدة، يرمز لها بالرمز $A \cup B$.

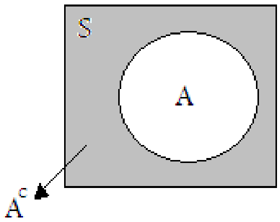
وقوع الإتحاد يعني وقوع A أو B أو كلاهما أي وقوع أحدهما على الأقل. ويوضح بالرسم التالي:



الحادثة المكملة (Complement Event):

الحادثة المكملة لأي حادثة A هي حادثة جديدة، يرمز لها بالرمز A^c أو $\overline{A}$.

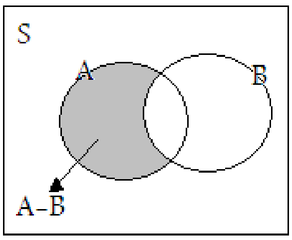
وقوع A^c يعني عدم وقوع A. وتوضح بالرسم التالي:



5. الفرق بين حادثتين (Difference):

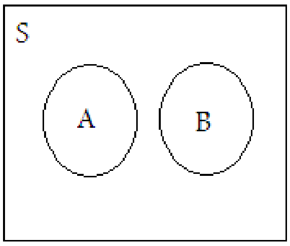
الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة جديدة، يرمز لها بالرمز $A-B$.

وقوع $A-B$ يعني وقوع A مع عدم وقوع B. أي أن : $A-B=AB^c$. وتوضح بالرسم التالي:



6. الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive):

نقول عن حادثتين A و B أنهما متنافيتين إذا كان من المستحيل وقوعهما معاً. أي إذا كان : $AB=\phi$. كما في الرسم التالي:



مثال (1-1):

لتكن التجربة العشوائية هي رمي حجر نرد مرة واحدة.

إن فضاء العينة لهذه التجربة هي : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، وإذا عرفنا عليه الحوادث التالية :

A={ظهور الرقم 1}={1} , B={ظهور 1 أو 3}={1,3}

C={ظهور عدد فردي}={1,3,5} , D={ظهور عدد أقل من 6}={1,2,3,4,5}

E={ظهور عدد زوجي}={2,4,6} , F={ظهور عدد أكبر من 6}={ }

فإن:

الحادثة الأكيدة التي لابد من وقوعها هي: $S=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$

الحادثة المستحيلة هي : $F=\{\}=\phi$. أما بقية الحوادث فهي حوادث عشوائية يمكن أن تقع ويمكن أن لا تقع.

لاحظ أن A حادثة بسيطة ، وأن الحوادث B,C,D,E حوادث مركبة, وأن

$$A\subset B \quad , \quad BA=\{1\}=A \quad , \quad B^c=\{2,4,5,6\} \quad , \quad C^c=\{2,4,6\}=E$$
$$A\cup E=\{1,2,4,6\} \quad , \quad D-C=\{2,4\} \quad , \quad B\subset C \quad , \quad C\cup B=C \quad ,$$

$\because C\cap E=\phi \quad \Rightarrow C\ \&\ E$ متنافيان

هل $E=C$ ؟.

من هذا المثال نلاحظ أن هناك تفاوت في فرص الوقوع أمام تلك الحوادث، فالحادثة S لها أكبر الفرص والحادثة $F=\phi$ لها أقل الفرص والحادثة D فرصة وقوعها أكبر من فرصة وقوع الحادثة C مثلاً، وكذلك الحادثة E فرصتها أكبر من A وهكذا. **وال<u>مقياس</u> الذي يقيس هذه الفرص وإختلافها هو الإحتمال.** فما هو تعريف الإحتمال ؟.

(4-1-1) تعريف الإحتمال (Definition of Probability)

توجد عدة تعاريف للإحتمال تأخذ في إعتبارها طبيعة عناصر الحوادث. إلا أن التعريف التالي يعتبر أشملها وأحدثها ويسمى التعريف الرياضي للإحتمال وهو:

<u>تعريف:</u>

إحتمال الحادثة A هو <u>مقياس</u> لفرصة وقوع الحادثة A ، ويرمز له بالرمز $P(A)$.

ويقرأ إحتمال الحادثة A. أي أنه إذا كانت A و B حادثتين وكان $P(B)>P(A)$ فإن هذا يعني أن فرصة وقوع الحادثة B أكبر من فرصة وقوع A. ويحقق هذا المقياس P (أو الدالة) المسلمات الثلاث التالية:

<u>مسلمات الإحتمال (Axioms of Probability):</u>

1. لأي حادثة A نجد أن : $\boxed{P(A)\geq 0}$.

 أي أن الإحتمال غير سالب (موجب دائماً).

2. إحتمال وقوع حادثة مؤكدة يساوي الواحد الصحيح. أي أن:

$$\boxed{P(S)=1}$$

3. لأي متتابعة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى(وهذا يعني):

$$A_1, A_2, A_3, ... \quad \text{و} \quad \forall i\neq j \quad A_i\cap A_j=\phi$$

نجد أن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ......) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$$

أي أن:

$$\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}$$

وهذا يعني أن إحتمال إتحاد الحوادث المتنافية يساوي مجموع إحتمالاتها.

أي أنه – مثلاً – إذا كانت الحادثتان A,B متنافيتين $(AB = \phi)$ فإن:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

(5-1-1) بعض القوانين الأساسية في الإحتمال

بإستخدام مسلمات الإحتمال يمكن إثبات القوانين المهمة في حساب إحتمالات الحوادث كما يلي:

1. إحتمال وقوع حادثة مستحيلة يساوي صفر. أي أن: $\boxed{P(\phi) = 0}$
2. إذا كانت $\overline{A}$ هي الحادثة المكملة للحادثة A فإن: $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
3. لأي حادثة A نجد أن: $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$
4. إذا كانت $A \subset B$ فإن : $\boxed{P(A) \le P(B)}$.
5. لأي حادثتين A و B نجد أن: $\boxed{P(B - A) = P(B) - P(AB)}$

ويمكننا أن نكتب هذه العلاقة بالصورة:

$$\boxed{P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB)}$$

كذلك نجد أن : $\boxed{P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)}$

6. لأي حادثتين A و B نجد أن: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$

ملاحظة:

من النتيجة (5) يمكننا أن نكتب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B)$$
$$P(A \cup B) = P(B) + P(A\overline{B})$$

(6-1-1) طريقة حساب قيمة الإحتمال

في جميع الأحوال يمكن حساب قيمة احتمال أي حادثة أو حوادث بإستخدام مسلمات الإحتمال الثلاث السابقة أوالقوانين الناتجة. وفي حالة خاصة عندما يتحقق لتجربة عشوائية الشرطين التاليين:

أ. عدد النتائج الممكنة للتجربة محدودة، أي أن عدد عناصر فضاء العينة للتجربة محدود وليكن $n(\Omega)$.

ب. النتائج متساوية الفرص في الظهور (تكافؤ الفرص)، ويعبر عن ذلك عادةً بأن نقول: رمي عملة متزنة أو نرد متزن أو نختار بطريقة عشوائية.

في هذه الحالة يمكن إحتساب إحتمال أي حادثة A على فضاء العينة لهذه التجربة من العلاقة التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

حيث أن:

عدد عناصر الحادثةA = $n(A)$ ، عدد عناصر فضاء العينة = $n(\Omega)$

(7-1-1) أمثلة لحساب قيمة الإحتمال

أولاً: الحالة العامة:(بإستخدام مسلمات الإحتمال الثلاث والقوانين الناتجة)

مثال (2-1):

إذا كان إحتمال نجاح محمد هو $1/4$ وإحتمال رسوب أحمد هو $1/3$ وإحتمال نجاح محمد وأحمد هو $1/6$ فأوجد:

أ. إحتمال نجاح محمد ورسوب أحمد (نجاح محمد فقط).
بـ. إحتمال نجاح أحدهما على الأقل.
جـ. إحتمال نجاح واحد منهما فقط.

الحل:

نفرض الحوادث التالية:

$$A=\{\text{نجاح محمد}\} \Rightarrow P(A)=1/4$$

$$B=\{\text{نجاح أحمد}\} \Rightarrow \overline{B}=\{\text{رسوب أحمد}\} \Rightarrow P(\overline{B}) = 1/3 \Rightarrow P(B) = 1 - 1/3 = 2/3$$

$$\therefore AB=\{\text{نجاح أحمد و محمد}\} \Rightarrow P(AB) = 1/6$$

أ. $A\overline{B}$ ={نجاح محمد ورسوب أحمد}

$$\therefore P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 1/4 - 1/6 = 1/12$$

ب. $A \cup B$ ={نجاح أحدهما على الأقل}

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1/4 + 2/3 - 1/6 = 3/4$$

ج. {نجاح واحد منهما فقط}≡{نجاح محمد ورسوب أحمد أو رسوب محمد ونجاح أحمد}

$$\therefore P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B) \quad \text{متنافيتان}$$

$$=\tfrac{1}{12}+P(B)-P(AB)=\tfrac{1}{12}+\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{6}=\tfrac{7}{12}$$

ملاحظة: يمكن الإستفادة من العلاقة التالية

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$$

مثال (3-1):

أ. إذا كانت A و B حادثتين بحيث أن: $P(A\cup B)=\tfrac{3}{4},\quad P(B)=\tfrac{1}{2},\quad P(\bar{A})=\tfrac{5}{8}$

فأحسب كلاً من:

$$1)P(AB),\quad 2)P(\bar{A}B),\quad 3)P(\bar{A}\bar{B}),\quad 4)P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

ب. إذا كانت $P(\bar{B})=0.7\,,\,P(A\bar{B})=0.2$ فأحسب $P(A\cup B)$ ؟

ج. إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين وكانت $P(B)=0.45$ ، $P(A)=0.3,$ فأحسب كلاً من:

$$1)P(A\cup B),\quad 2)P(\bar{A}\cup\bar{B}),\quad 3)P(\bar{A}B)$$

الحل:

أ.

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\tfrac{5}{8}=\tfrac{3}{8}$$

$$1)P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}=\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}-\tfrac{6}{8}=\tfrac{1}{8}$$

$$2)P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}=\tfrac{3}{8}$$

$$3)P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$4)P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) \quad = 1 - P(AB) = 1 - \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}$$

or

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\overline{AB})$$

$$= \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{8} + \tfrac{4}{8} - \tfrac{2}{8} = \tfrac{9}{8} - \tfrac{2}{8} = \tfrac{7}{8}$$

ب.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B\bar{A}) = \quad P(B) + P(A\bar{B}) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

ج. A و B متنافيتان يعني أن $P(AB) = 0$ إذاً:

$$1)P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad = 0.3 + 0.45 = 0.75$$

$$2)P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) \quad = 1 - P(AB) = 1 - 0 = 1$$

$$3)P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) = 0.45$$

ثانياً: الحالة الخاصة (تساوي الفرص):

مثال (4-1):

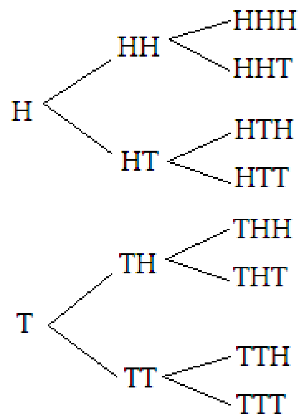
رميت ميدالية متزنة ثلاث مرات, فأوجد ما يلي:

أ. فضاء العينة لهذه التجربة.　　　ب . احتمال ظهور الوجه H ثلاث مرات.

ج. احتمال ظهور الوجه H مرتين والوجه T مرة واحدة.　　د. احتمال ظهور الوجه H مرة واحدة فقط.

الحل:

أ. بإستخدام شكل الشجرة يمكن حصر كل النتائج الممكنة لهذه التجربة كما يلي:



∴ فضاء العينة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

لاحظ أن عدد عناصرفضاء العينة هو: $n(\Omega) = 2^3 = 8$

ب. المطلوب $P(A)$ حيث أن: $A = \{HHH\} \Rightarrow n(A) = 1$

$$\therefore P(A) = P(\{HHH\}) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

ج. المطلوب $P(B)$ حيث أن:

$$B = \{HHT, HTH, THH\} \Rightarrow n(B) = 3$$
$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

د. المطلوب $P(C)$ حيث أن:

$$C = \{HTT, THT, TTH\} \Rightarrow n(C) = 3$$
$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

<u>مثال (5-1)</u>: عائلة لديها طفلان فقط . فإذا كانت فرصة وجود الذكور M تساوي فرصة وجود الأناث F لدى هذه العائلة. فأوجد مايلي: (أ) احتمال أن الطفلين ذكور، (ب) احتمال وجود طفلة واحدة على الأقل لدى هذه العائلة.

الحل: $\Omega = \{MM, MF, FM, FF\} \Rightarrow n(\Omega) = 4$

أ) نفرض أن الحادثة A= {الطفلين ذكور}

$$\therefore P(A) = P(\{MM\}) = \frac{1}{4}$$

ب) نفرض أن الحادثة B = {وجود طفلة واحدة على الأقل}

$$\therefore P(B) = P(\{MF, FM, FF\}) = \frac{3}{4}$$

مثال (1-6):

ألقيت قطعة نقود متزنة 6 مرات متتالية. ماهو احتمال أن تظهر صورة واحدة على الأقل؟

الحل: نفرض أن A ={ ظهور صورة واحدة على الأقل }

$\therefore \bar{A}$ = { عدم ظهور صورة } = { TTTTTT }

$$n(\Omega) = 2^n = 2^6 = 64 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{64}$$
$$\because P(\bar{A}) + P(A) = 1$$
$$\therefore P(A) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

1-2 الإحتمال الشرطي
(Conditional Probability)

(1-2-1) مقدمة

يكون إحتمال هطول المطر - بمشيئة الله تعالى- في يوم تكون السماء فيه ملبدة بالغيوم أكبر منه في يوم تكون السماء خالية من السحب.ولو فرضنا أن الحادثة A هي {هطول المطر}=A والحادثة B هي {السماء ملبدة بالغيوم}=B فإن احتمال هطول المطر علماً أن السماء ملبدة بالغيوم يسمى الإحتمال الشرطي لـ A علماً أن B قد وقعت ، ويكتب $P(A|B)$.

في مثالنا هذا نجد أن $P(A|B)$ أكبر من $P(A)$ المطلق (غير المشروط) ، كذلك من هذا المثال نجد أن بعض الحوادث مرتبطة ببعضها ، بمعنى أن وقوع حادثة معينة قد يؤثر (زيادة أو نقصاناً) في احتمال وقوع حادثة أخرى ، ومن هنا تأتي أهمية دراسة الاحتمال الشرطي.

(1-2-2) تعريف الاحتمال الشرطي

إذا كانت A وB حادثتين في فضاء العينة Ω، فإن احتمال وقوع A علماً أن B قد وقعت ، يسمى بالاحتمال الشرطي لـ A ويرمز له الرمز $P(A|B)$ ويحسب من العلاقة التالية:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0}$$

وبالمثل نجد أن:

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A)>0}$$

مثال (1-7):

في دراسة على الحاسبات الآلية الشخصية لمعرفة تأثير استخدام برنامج معين والاصابة بفيروس ، درست عينة ولخصت النتائج في الجدول التالي:

	أصيب (A)	لم يصب $(\overline{A})$	المجموع
استخدم (B)	5	12	17
لم يستخدم $(\overline{B})$	9	4	13
المجموع	14	16	30

فإذا إختير جهاز من هذه العينة بطريقة عشوائية فما احتمال:

أ) أن يكون ممن استخدم فيه البرنامج؟ ،

ب) أن يكون ممن استخدم فيه البرنامج علماً بأنه مصاب بالفيروس؟

الحل: نفرض الحوادث التالية: $\overline{A}$={لم يصب الجهاز بالفيروس} $\Rightarrow n(\overline{A})=16$

A={اصيب الجهاز بالفيروس} $\Rightarrow n(A)=14$

$\overline{B}$={لم يستخدم البرنامج في الجهاز} $\Rightarrow n(\overline{B})=13$

B={استخدم البرنامج في الجهاز} $\Rightarrow n(B)=17$

أ) المطلوب $P(B)$:

$$\therefore P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{17}{30}=0.57$$

ب) المطلوب $P(B|A)$:

$$\therefore P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{n(AB)/n(\Omega)}{n(A)/n(\Omega)}=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{5}{14}=0.357$$

ملاحظة:

عند حساب الاحتمال الشرطي في المثال السابق فقرة (ب) لم نهتم من فضاء العينة إلا بالحادثة المعلومة الوقوع A . وهذا يعني أن فضاء العينة Ω (30) قد اختصر إلى عناصر A (14) وكان اهتمامنا هو معرفة فرصة ظهور B من خلال A. لذا نسمي عناصر A فضاء العينة المختصر. كما لاحظنا اختلاف المقياس $P(B)$ عن $P(B|A)$.

(3-2-1) قاعدة ضرب الاحتمالات

(Multiplication Rule)

من تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن: $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow P(AB)=P(A\mid B).P(B)$

وبالمثل: $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\Rightarrow P(AB)=P(B\mid A).P(A)$

أي أن:
$$\boxed{\begin{aligned} P(AB) &= P(A\mid B).P(B) \\ &= P(B\mid A).P(A) \end{aligned}}$$

وبذلك عبرنا عن احتمال التقاطع كحاصل ضرب احتمالين.

(1-3) <u>الحوادث المستقلة</u>

<u>(Independent Events)</u>

نقول عن حادثتين *A* و *B* أنهما مستقلتان إذا كان حدوث أحدهما لايؤثر في حدوث أو عدم حدوث الحادثة الأخرى.

<u>تعريف :</u>

من مفهوم الاحتمال الشرطي نقول أن الحادثة *A* مستقلة عن الحادثة *B* وبالعكس إذا تحقق <u>أحد</u> الشروط الثلاثة التالية:

$1)\ P(A\mid B)=P(A)$ ، $2)\ P(B\mid A)=P(B)$ ، $3)\ \boxed{P(AB)=P(A).P(B)}$

الشرط الثالث يسمى بشرط الإستقلال أو الشرط اللازم والكافي للإستقلال.

<u>نظرية (1-2-1):</u>

إذا كانت الحادثتان *A* و *B* مستقلتين فإن كل من: $1-$ الحادثتين A و $\overline{B}$ مستقلتان.

$2-$ الحادثتين $\overline{A}$ و B مستقلتان. 3 - الحادثتين $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلتان.

<u>البرهان:</u>

1. تكون الحادثتان Aو $\overline{B}$ مستقلتين إذا تحقق الشرط:

$$P(A\overline{B})=P(A).P(\overline{B})$$
$$\begin{aligned} \therefore L.H.S = P(A\overline{B}) &= P(A)-P(AB) \\ &= P(A)-P(A).P(B) \\ &= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\overline{B}) = R.H.S \end{aligned}$$

2. متروك للطالب.
3. نبرهن أن:

$$P(\overline{AB}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$$
$$\therefore L.H.S = P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A).P(B)\}$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B)$$
$$= P(\overline{A}) - P(B)[1 - P(A)]$$
$$= P(\overline{A}) - P(B).P(\overline{A}) = P(\overline{A})(1 - P(B))$$
$$= P(\overline{A}).P(\overline{B}) = R.H.S$$

تعريف: إستقلال ثلاث حوادث:

نقول عن ثلاث حوادث A و B و C أنها مستقلة عندما وعندما فقط يتحقق الشرطان:

أ. الحوادث الثلاث مستقلة مثنى مثنى، ب. $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

تمرين :

ليكن $\Omega = \{1,2,3,4\}$ فضاء عينة عناصره متكافئة الفرص في الظهور . عرفنا عليه الحوادث التالية

$A = \{1,2\} \quad , \quad B = \{1,3\} \quad , \quad C = \{1,4\}$.هل هذه الحوادث مستقلة ؟ . وضح الإجابة .

(1-4) بعض المتطابقات المفيدة

$$(1)\quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \& \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

$$(2)\quad n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$$

$$(3)\quad \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

$$(4)\quad \binom{n}{1} + 1 = \binom{n+1}{1} = n+1$$

$$(5)\quad \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

(5-1) تمارين الفصل الأول

1) برهن صحة المتطابقات في (1-4) ؟ .

2) أثبت أن: $\boxed{P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)}$ ؟ .

3) تُلقى قطعة نقد متزنة حتى تظهر الصورة لأول مرة أو تظهر الكتابة خمس مرات متتالية .

(أ) أكتب فضاء العينة لهذه التجربة . (ب) احسب احتمال ظهور كل نقطة فيه ثم احسب

مجموع هذه الاحتمالات . (ج) هل تساوي الفرص محقق لعناصر فضاء العينة هذا ؟

.

4) أكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية التالية :

(أ) رمي قطعة عملة حتى الحصول على الناتج H . (ب) عدد المرات اللازمة لثني سلك

معدني حتى ينقطع . (ج) اختيار عدد فردي موجب أقل من 20 .(د) اللون الناتج من

اختيار كرة من بين 5 كرات بيضاء و 3 كرات زرقاء .

5) إذا كان $P(A\cup B^c)=0.8$, $P(A\cup B)=0.4$ ، فأوجد $P(A)$ ؟ .

6) لدينا قطعة ميدالية غير متزنة بحيث أن احتمال ظهور الكتابة T يساوي ضعف احتمال

ظهور الصورة H . إذا رُميت هذه القطعة مرتين فأوجد احتمال :

(أ) أن تكون النتائج متماثلة . (ب) الحصول على صورة في الرمية الأولى .

7) إذا كان $P(A)=0.3$ و $P(A\cup B)=0.8$ فأوجد $P(B)$ في كل من الحالات التالية:

أ) A و B حادثتان مستقلتان. (ب) A و B حادثتان متنافيتان. (ج) $A\subset B$.

8) إذا كان $P(C)=\frac{1}{3}$ و $P(D|C)=\frac{1}{2}$ و $P(C\cup D)=\frac{4}{5}$ ، فهل D وC مستقلتان؟ أو هل D و C

متنافيتان؟ وضح ذلك ؟ .

9) إذا كان: $P(A)=0.45\ ,\ P(B)=0.35\ ,\ P(A|B)=0.57$ فإن:

1- الاحتمال $P(B|A)$ يساوي:

A) 0.74   D) 0.57   C) <u>B) 0.44</u>   0.35

2- الاحتمال $P(B|\bar{A})$ يساوي:

<u>A)</u> 0.35   D) 0.455   C) 0.64   B) <u>0.274</u>

3- الاحتمال $P(A\cup B)$ يساوي:

A) 0.20 <u>D)</u>   0.45   C) 0.80   B) <u>0.60</u>

---

10) لأي حادثتين $A\ ,B$ من الفضاء Ω :

4- نقول ان $A\ ,\ B$ حادثتان متنافيتان إذا كان:

$A)\ A\cup B=\phi \qquad B)\ A\subseteq B \qquad C)\ A\bigcap B=\phi \qquad D)\ A=S\ ,\ B=S$

ونقول ان $A\ ,\ B$ حادثتان مستقلتان إذا كان:

$$A)\ A\cup B=\phi \qquad B)\,P(A\cup B)=P(A)+P(B) \quad C)\ A\bigcap B=\phi$$
$$D)\ P(A\bigcap B)=P(A)P(B)$$

5- إحدى العلاقات التالية دوما صحيحة:

$A)\ P(A\cap \overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$ $\quad B)\,P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$C)\,P(A\cap B)=P(A)P(B)$ $\quad D)P(A-B)=P(A)-P(B)$

11) إذا كان احتمال أن ينجح محمد في اختبار مقرر الإحصاء هو 0.3. و احتمال أن ينجح أحمد فى نفس المقرر هو0.6. بفرض استقلال نجاح الاثنين فإن:

6- احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد في الاختبار هو:

A) 0.18   D) <u>0.12</u>   C) 0.21   B) 0.3

7- احتمال رسوب محمد ورسوب أحمد في الاختبار هو:

A) 0.18   D) 0.12   <u>C) 0.28</u>   B) 0.3

---

12) إذا كانت الحادثتان A و B معرفتين على نفس فراغ العينة و كان $P(A\cap B^C)=0.2$ و $P(A\ \cap\ B)\ =\ 0.3$ و $P(A^C\cap B)=0.1$ فإن:

(1 $P(A^c\cap B^c)=$:

A) 0.20	**B) <u>0.40</u>**	C) 0.36	D) 0.55

(2 $P(A^c\cup B^c)=$:

A) 0.5	B) 1.0	**C) <u>0.7</u>**	D) 0.4

(3 $P(A|B)=$:

A) 0.85	B) 0.45	C) 0.65	**D) <u>0.75</u>**

(4 الحادثتان A و B :

A) مستقلتان	**B) <u>غير مستقلتين</u>**	C) متنافيتان	D) متساويتان

(5 $P(B|A)=$:

E) 0.8	F) 0.4	G) 0.7	**H) <u>0.6</u>**

الفصل الثانى

المتغير العشوائي ودالة التوزيع

(Random Variable and Distribution Function)

(1-2) مقدمة:

عندما نضيف إلى إهتمامنا بعناصر فضاء العينة لتجربة عشوائية ، إهتماماً آخر ، يمكن أن يكون هذا الإهتمام هو عدد العناصر التي تحمل صفة معينة أو وزن أو طول أو أي قياس آخر. فإن هذه القياسات هي قيم عددية مرتبطة بعناصر فضاء العينة المعرفة عليه وتتغير من عنصر إلى آخر. هذه القيم هي قيم لمتغير عشوائي يحمل إسم الصفة التي نهتم بدراستها ، ومن أمثلة ذلك:

1. عدد مرات ظهور H عند رمي عملة ثلاث مرات.
2. عدد مرات إصابة هدف عند إطلاق عشر رميات عليه .
3. عدد الأشخاص الذين يتجاوز طولهم 160 سم في عينة حجمها 100 شخص.
4. عدد القطع التالفة في عينة مأخوذة من انتاج أحد مصانع المصابيح الكهربائية.
5. أو عمر المصباح أو فترة الإنتظار لدى شباك التذاكر ...إلخ.

لذا نستطيع أن نعَرف المتغير العشوائي والذي يرمز له بـ X أو Y أو Z ... كما يلي:

(2-2) المتغير العشوائى: Random Variable

(1) تعريفه:

إذا كانت Ω هي فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن أي دالة X تخصص عدداً حقيقياً

X(w) لكل عنصر w من Ω ، $(w \in \Omega)$ تسمى متغيراً عشوائياً.أي أن المتغير

العشوائي X هو: $X : \Omega \to X(w) \subseteq R$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

(أي أن المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة Ω).

(1-2-2) **بعض خواص المتغير العشوائي:**

إذا كان X وY متغيران عشوائيان معرفان على نفس فضاء العينة Ω وكان c مقداراً ثابتاً $c \in R$ فإن:

$$\begin{aligned} &i) \quad (X+Y)(w) = X(w) + Y(w) \\ &ii) \quad (X+c)(w) = X(w) + c \\ &iii) \quad (cX)(w) = c(X(w)) \end{aligned}$$

(أي أن أي دالة في المتغير العشوائي X هي متغير عشوائي أيضا).

(2-2-2) أنواع المتغيرات العشوائية: Random Variable

يتحدد نوع المتغير العشوائي من طبيعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير. فالمتغير الذي يأخذ قيماً متقطعة (منفصلة) يسمى متغيراً متقطعاً (منفصلا)، والذي يأخذ قيماً مستمرة (متصلة) يسمى متغيراً مستمراً (متصلا). وسوف نفصل بعض المعلومات عن هذين النوعين الرئيسيين من المتغيرات كما يلي:

(3-2) أولاً: المتغير العشوائي المتقطع (Discrete Random Variable):

(1-3-2) تعريفه:

يقال أن المتغير العشوائي X متقطع (أو منفصل) إذا كانت مجموعة قيمه قابلة للعد.

مثال (2-1):

ألقيت قطعة عملة متزنة ثلاث مرات. أوجد القيم الممكنة للمتغيرات التالية:

1. X يمثل عدد الصور.　　2. Y يمثل نسبة عدد الصور إلى الناتج.

3. Z يمثل عدد الكتابة – عدد الصور.

<u>الحل:</u>

فضاء العينة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

X=　3,　2,　2,　1,　2,　1,　1,　0

Y=　3/3,　2/3,　2/3,　1/3,　2/3, 1/3, 1/3,　0/3

Z=　0-3,　1-2,　1-2,　2-1,　1-2, 2-1, 2-1, 3-0

=　-3,　-1,　-1,　1,　-1,　1,　1,　3

واضح أن القيم التي يأخذها X هي: {3, 2, 1, 0} أي أن: $X : \Omega \to \{0,1,2,3\} \subset R$

وذلك لأن:

$$\begin{aligned} &X(HHH) = 3 \\ &X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = 2 \\ &X(THT) = X(HTT) = X(TTH) = 1 \\ &X(TTT) = 0 \end{aligned}$$

وبالمثل: $Y : \Omega \to \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \subset R$

حيث أن:

$$\begin{aligned} &Y(HHH) = \tfrac{3}{3} = 1 \\ &Y(HHT) = Y(HTH) = Y(THH) = \tfrac{2}{3} \\ &Y(HTT) = Y(THT) = Y(TTH) = \tfrac{1}{3} \\ &Y(TTT) = \tfrac{0}{3} = 0 \end{aligned}$$

وكذلك فإن: $Z : \Omega \rightarrow \{-3,-1,1,3\} \subset R$

حيث أن:

$$
\begin{aligned}
&Z(HHH) = 0-3 = -3 \\
&Z(HTT) = Z(HTH) = Z(THH) = 1-2 = -1 \\
&Z(HTT) = Z(THT) = Z(TTH) = 2-1 = 1 \\
&Z(TTT) = 3-0 = 3
\end{aligned}
$$

ملاحظة: $X : \Omega \rightarrow R$ تعني هنا أن:

$$
X : \Omega = \left\{ \begin{array}{c} HHH \\ HHT \\ HTH \\ THH \\ HTT \\ THT \\ TTH \\ TTT \end{array} \right\}
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \rightarrow \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}
\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \\ \\ \\ 1 \\ \\ 0 \end{array} \right\} \subset R
$$

وهذا يعني:

(1) X تجزيء فضاء العينة Ω .

(2) مجموعة قيمه {3, 2, 1, 0} تسمى فضاء عينة جديد مولداً بواسطة X .

وبالمثل المتغيران Y و Z .

مثال (2-2):

تقذف قطعة نقود حتى ظهور الصورة H للمرة الأولى. وليكن X عدد القذفات اللازمة لإنهاء هذه التجربة. أوجد قيم X ؟

الحل:

إن فضاء العينة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \ldots\ldots\ldots\}$$
$$X = 1,2,3,4,5,\ldots\ldots\ldots$$

أي أن مجموعة قيم X (الفضاء المولد بواسطة X) هي: $X(w) = \{1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots\}$

(2-3-2) دالة الكتلة الإحتمالية (Probability Mass Function):

تعريف دالة الكتلة الإحتمالية:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ القيم ....x_1, x_2, فإن دالة الكتلة الإحتمالية له يرمز لها بالرمز $f_X(x)$ أو $f(x)$. وتعرف كما يلي:

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & x = x_1, x_2, \ldots. \\ 0 & o.w \end{cases}}$$

هذه الدالة تسمى أحياناً دالة التوزيع الإحتمالي المنفصل

(Discrete Probability Distribution Function)

ويجب أن تحقق $f(x)$ الشرطين التاليين:

$$(i) \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x, \qquad (ii) \quad \sum_{\forall x} f(x) = 1$$

وتسمى أحياناً خواص دالة الكتلة الإحتمالية $f(x)$.

وأي دالة تحقق الشرطين السابقين تعتبر دالة كتلة إحتمالية لمتغير عشوائي. وكذلك أي دالة (أو جدول) تعطي جميع قيم المتغير X والاحتمال المناظر لكل قيمة ويحقق الشرطين السابقين يسمى توزيع إحتمالي للمتغير المتقطع X .

(3-3-2) القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتقطع (التوقع):

(The Expected Value of X (Expectation):

القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X هي مقدار يقيس متوسط Mean القيم التي يأخذها المتغير X ، ويرمز لها بالرمز μ أو E(X).

تعريف:

إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم ....,x_1,x_2 بإحتمالات ....,$f(x_1),f(x_2)$ فإن القيمة المتوقعة للمتغير X

(أو لتوزيعه الإحتمالي) هي: $\boxed{\mu = E(X) = \sum_x xf(x)}$

بشرط أن يتقارب هذا المجموع تقارباً مطلقاً. أي بشرط $\sum |x| f(x) < \infty$ وإلا فلا توجد قيمة متوقعة لـ X.

بعض خواص التوقع:

إذا كان **X** متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة الكتلة الإحتمالية f(x) و c مقدار ثابت بحيث $c \in R$ فإن:

i) $\boxed{E(c) = c}$

البرهان:

$$E(c) = \sum_x cf(x) = c\sum_x f(x) = c.1 = c$$

ii) $\boxed{E(cX) = cE(X)}$

البرهان: $E(cX) = \sum_x cx.f(x) = c\sum_x xf(x) = cE(X)$

ومن (i) و (ii) نجد أن: $\boxed{E(aX \pm b) = aE(X) \pm b}$ حيث a و b ثوابت

وبشكل عام إذا كانت g(x) دالة في المتغير X فإن g(x) هي أيضاً متغير عشوائي توقعها هو:

iii) $\boxed{E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)}$

(2-3-4) التباين والإنحراف المعياري (Variance and Standard Deviation):

تعريف:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً وتوقعه هو μ فإن تباينه يرمز له بالرمز σ_X^2 أو σ^2 أو Var(X) أو V(X) ويحسب كالتالي:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^2 &= Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) \\ &= E(X-\mu)^2\end{aligned}}$$

وتوجد صيغة أخرى أسهل إستخداماً في الحساب هي: $\boxed{\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2}$

أما الإنحراف المعياري فهو الجذر التربيعي الموجب للتباين، أي أنه:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}}$$

إن التباين والإنحراف المعياري يقيسان تشتت قيم X المختلفة حول متوسطها μ.

وحدات التباين هي وحدات مربعة (مربع وحدات X) أما الإنحراف المعياري فله نفس وحدات المتغير العشوائي.

<u>بعض خواص التباين والإنحراف المعياري:</u>

i) $\boxed{\sigma_a^2 = Var(a) = 0}$

a مقدار ثابت. وهذا يعني أن تباين المقدار الثابت يساوي صفر.

<u>البرهان:</u>

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= E(a - E(a))^2 \\ &= E(a-a)^2 = E(0) = 0\end{aligned}$$

<u>وعليه فإن الإنحراف المعياري للمقدار الثابت يساوي صفر، أي أن :</u>

$$\boxed{\sigma_a = \sqrt{V(a)} = 0}$$

ii) $\boxed{\sigma_{aX}^2 = Var(aX) = a^2 Var(X)}$

والإنحراف المعياري هو :

$$\therefore \sigma_{aX} = \sqrt{Var(aX)} = \sqrt{a^2 Var(X)} = |a|\sqrt{Var(X)} = |a|\sigma_X$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{aX} &= E[aX - E(aX)]^2 \\
&= E[aX - aE(X)]^2 = a^2 E[X - E(X)]^2 \\
&= a^2\sigma^2_X \\
\therefore \sigma_{aX} &= |a|\sigma_X \quad .
\end{aligned}$$

iii) $\boxed{\sigma^2_{(aX\pm b)} = V(aX \pm b) = V(aX) = a^2 V(X)}$

$$\boxed{\therefore \sigma_{aX\pm b} = \sigma_{aX} = |a|\sigma_X}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= E\left[\{(aX+b) - E(aX+b)\}^2\right] \\
&= E\left[\{aX + b - aE(x) - b\}^2\right] \\
&= E\left[\{aX - aE(X)\}^2\right] = a^2 E[X - E(X)]^2 \\
&= a^2 V(X)
\end{aligned}$$

مثال(2-3):

في مثال $(2-1)$ أوجد:

1. التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي X ومثله بيانياً، 2. أوجد E(X) و V(X) و σ_X ،

3. إذا كان Y=2X-1 فأوجد E(Y) و V(Y) .

الحل: من حل مثال $(2-1)$ وجدنا أن قيم X هي: $\{0\ ,1\ ,2\ ,3\}$ وعليه فإن:

(1)

$$f(0) = P(X=0) = P(\{TTT\}) = 1/8$$

بإستخدام مبدأ تساوي الفرص (لأن العملة متزنة).

أوباستخدام الاستقلال :

$$f(0) = P(\{TTT\}) = P(T).P(T).P(T) \quad = \quad \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}$$

وكذلك:

$$f(1) = P(X = 1) = P(\{HTT \cup THT \cup TTH\}) = \tfrac{3}{8}$$

OR

$$= P(HTT) + P(THT) = P(TTH)$$
$$= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}$$

وبالمثل:

$$f(2) = P(X = 2) = \tfrac{3}{8} \qquad \& \quad f(3) = P(X = 3) = \tfrac{1}{8}$$

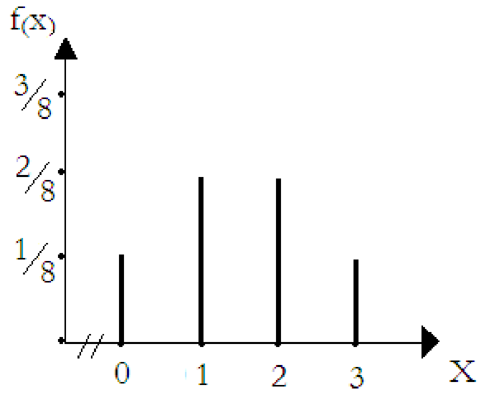
∴ يمكننا كتابة التوزيع الإحتمالي للمتغير X في الجدول التالي:

x	0	1	2	3
f(x)	$\tfrac{1}{8}$	$\tfrac{3}{8}$	$\tfrac{3}{8}$	$\tfrac{1}{8}$

<u>تمرين</u>: تحقق من أن:

$$i) \quad f(x) \ge 0, \quad \forall x$$
$$ii) \quad \sum_{\forall x} f(x) = 1$$

لتمثيل البياني:



(2) لإيجاد التوقع والتباين نكتب الجدول التالي:

x	0	1	2	3	المجموع
f(x)	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1
xf(x)	0	$3/8$	$6/8$	$3/8$	$12/8$=1.5=E(X)
x^2f(x)	0	$3/8$	$12/8$	$9/8$	$24/8$=3=E(X^2)

من الجدول أعلاه نجد أن :

$$E(X)=\sum_x xf(x)=0.\,1/8+1.\,3/8+2.\,3/8+3.\,1/8=1.5$$

$$E(X^2)=3$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$=3-(1.5)^2=0.75$$

$$\Rightarrow \sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.75}=0.866\ .$$

3. يمكن إيجاد E(Y) و V(Y) إستخدام خواص التوقع و التباين كما يلي :

$$\therefore E(Y) = E(2X-1)$$
$$= 2E(X) - 1 = 2.(1.5) - 1 = 2$$

$$V(Y) = V(2X-1) = 2^2 V(X)$$
$$= 4.(0.75) = 3 \quad .$$

(4-2) ثانياً: المتغير العشوائي المستمر (Continuous Random Variable):

(2-4-1)) تعريفه:

المتغير العشوائي المستمر (المتصل) هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أي قيمة داخل فترة معينة. مثل الطول، العمر، الزمن،....الخ. أي أنه يأخذ عدداً لانهائياً من القيم داخل نطاق تغييره.

(2-4-2) دالة الكثافة الإحتمالية (Probability Density Function):

تختلف طبيعة المتغير العشوائي المتصل عنها للمتغير المنفصل، حيث هنا لا نستطيع أن نحدد إحتمالاً يناظر كل قيمة من قيم المتغير المتصل X؛ لأننا لا نستطيع حصر هذه القيم. ولكن يمكن تحديد إحتمالاً يقابل كل فترة من الفترات داخل نطاق تغيير X، هذا الإحتمال هو عبارة عن المساحة المحصورة بين محور X ومنحنى دالة رياضية f(x) فوق هذه الفترة. لذا يمكن تعريف دالة الكثافة الإحتمالية لمتغير عشوائي X بأنها الدالة f(x) التي تحقق الآتي:

$$\boxed{P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx}$$

و عليه فإن أي دالة f(x) يمكن أن تكون دالة كثافة إحتمالية لمتغير عشوائي متصل إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$\boxed{(i) \quad f(x) \ge 0, \quad \forall x, \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$$

ويسمى هذان الشرطان أحياناً بخواص دالة الكثافة f(x).

ملاحظات هامة:

1. يعرف أحياناً المتغير العشوائي المتصل X كالتالي: يسمى المتغير العشوائي X متصلاً إذا كان:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = 0, \quad \forall x}$$

وذلك لأنه:

$$P(X = x_1) = P(x_1 \le X \le x_1) \quad = \int_{x_1}^{x_1} f(x)dx = 0$$

2. الإحتمال متساوي على كل من الفترات التالية:

$$[a,b], \quad (a,b], \quad [a,b), \quad (a,b)$$

أي أنه إذا كان X متصلاً فإن:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

وهذا يعني أن الإحتمال لا يتأثر بإضافة أو عدم إضافة نهايات الفترة (a,b).

(2-4-3) التوقع والتباين والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي المتصل:

يعرف التوقع والتباين والإنحراف المعياري للمتغير المتصل وكذلك تحسب بنفس القوانين التي تحسب بها للمتغير المنفصل مع استبدال علامة المجموع $\sum$ بعلامة التكامل $\int$. أي أن:

توقع المتغير المتصل X هو:

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$$

وله نفس الخواص في حالة المنفصل.

وتباين المتغير المستمر هو:

$$\boxed{V(X)=\sigma_X^2=\int_{-\infty}^{\infty}(X-\mu)^2 f(x)dx}$$

والصيغة الأخرى هي:

$$\boxed{\sigma_X^2=V(X)=E(X^2)-(E(X))^2}$$

والإنحراف المعياري هو:

$$\boxed{\sigma_X=+\sqrt{V(X)}}$$

وله نفس الخواص في حالة المتغير المنفصل.

<u>مثال(2-4):</u> أثبت أن الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة إحتمالية حيث:

$$f(x)=\frac{x}{8}\,,\quad 0<x<4$$

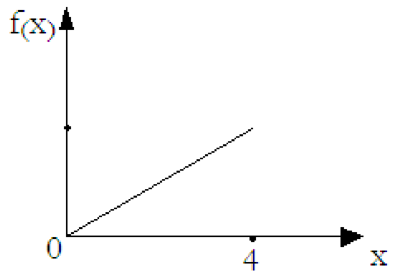
ثم أوجد كلاً من:

$$(i)\quad P(X\le 1),\quad (ii)\quad P(1<X\le 3),\quad (iii)\quad E(X),\quad (v)\quad \sigma_X$$

<u>الحل:</u>

نلاحظ أن مجموعة قيم X عبارة عن فترة (0,4) وهذا يعني أن X متصل ولكي تكون f(x) دالة كثافة إحتمالية لابد أن تحقق الشرطين التاليين:

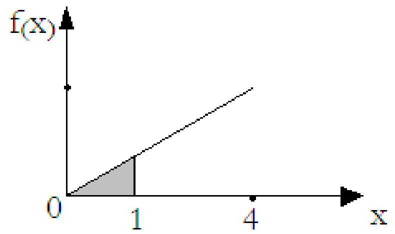
$f(x)\ge 0,\ \forall x$　(1)　وهذا محقق من تعريف $f(x)$



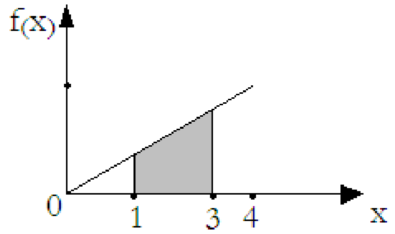
$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^4 \tfrac{1}{8} x dx = \tfrac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \tfrac{1}{16}[16] = 1$$

∴ الشرطان محققان . أي أن $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية.وعليه فإن :

$$(i) \quad P(X \le 1) = \int_0^1 \tfrac{1}{8} x dx = \tfrac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{16}$$



$$(ii) \quad P(1 < X \le 3) = \int_1^3 \tfrac{1}{8} x dx = \tfrac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \tfrac{1}{8}\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$



$$(iii) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \quad = \int_0^4 \tfrac{1}{8} x^2 dx = \tfrac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2.667$$

$$(v) \qquad \because \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$

$$\therefore E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^4 \tfrac{1}{8} x^3 dx = \tfrac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 8$$

$$\therefore V(X) = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 0.889 \Rightarrow \qquad \sigma_X = \sqrt{0.889} = 0.94$$

مثال(2-5): إذا كان قطر سلك كهربائي X يتبع توزيعاً إحتمالياً متصلاً كثافته هي:

$$f(x) = ax^2(1-x), \quad 0 \le x \le 1$$

فأوجد ما يلي:

1) قيمة الثابت a   2) $P(X > \frac{2}{3})$ 3) E(X)   4) V(X)   5) σ_X

الحل: بما أن $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية

$$1) \qquad \therefore \int_0^1 f(x)dx = 1$$

$$\therefore a\int_0^1 x^2(1-x)dx = a\int_0^1 \left[x^2 - x^3\right]dx = a\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = a\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{a}{12}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{12} = 1 \quad \Rightarrow a = 12 \qquad \Rightarrow f(x) = 12x^2(1-x), \quad 0 \le x \le 1$$

$$2) \qquad P(X > \frac{2}{3}) = \int_{2/3}^{1} f(x)dx = \int_{2/3}^{1} 12\left[x^2 - x^3\right]dx$$

$$= 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{2/3}^{1} = \left[4x^3 - 3x^4\right]_{2/3}^{1} = 11/27 = 0.407$$

$$3) \qquad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_0^1 12\left[x^3 - x^4\right]dx = 12\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 0.6$$

$$4)\quad \because V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$\therefore E(X^2)=12\int_0^1 x^4(1-x)dx=12\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=0.4$$

$$5)\quad \because V(X)=0.4-(0.6)^2=0.04$$

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.04}=0.2$$

(5-2) دالة التوزيع: (دالة التوزيع التراكمي)

(Distribution Function (Cumulative D.F))

(1-5-2) تعريف:

تعرف هذه الدالة بأنها قيمة الإحتمال المتراكم لغاية قيمة حقيقية معطاة، x مثلاً، ويرمز لدالة التوزيع بالرمز $F(x)$. أي أن: $\boxed{F(x)=P(X\le x)}$

ويتم حساب قيمة $F(x)$ من $f(x)$ (دالة كتلة أو كثافة) كما يلي :

$$F(x)=\begin{cases}\sum_{t=-\infty}^{x} f(t)\\[2ex] \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\end{cases}$$

كذلك يتم حساب قيمة $f(x)$ (دالة كتلة) من $F(x)$ كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}F(x_i)-F(x_{i-1}) & ,\quad i=1,2,3,\cdots\\[2ex] F(x)-F(x^-)\end{cases}$$

حيث x^- هي: قيمة X التي قبل القيمة x مباشرة.

و يتم حساب قيمة $f(x)$ (دالة كثافة) من $F(x)$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)$

(2-5-2) خواص دالة التوزيع $F(x)$:

هذه الخواص تميز الدالة $F(x)$ عامة (سواءًا كان X منفصلاً أو متصلاً):

1. نهاية $F(x)$ من اليسار يساوي الصفر ومن اليمين يساوي واحد، أي أن:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \quad \& \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = F(\infty) = 1$$

البرهان:

الحادثة $\{X \le -\infty\}$ هي حادثة مستحيلة $\Leftarrow$ $F(-\infty) = P(X \le -\infty) = P(\Phi) = 0$

وكذلك فإن الحادثة $\{X \le \infty\}$ هي حادثة مؤكدة $\Leftarrow$ $F(\infty) = P(X \le \infty) = 1$

ومنه فإن: $\boxed{0 \le F(x) \le 1}$

ولذا فإن $F(x)$ تعرف بأنها تطبيق حقيقي مجاله المصاحب هو الفترة $[0,1]$ أي أن :

$$F : R \to [0,1]$$

2. دالة التوزيع $F(x)$ دالة غير تناقصية (تزايدية)، بمعنى أنه إذا كان $x_1 < x_2$ فإن:

$$\boxed{F(x_1) \le F(x_2)}$$

البرهان: إذا كان $x_1 < x_2$ فإن: $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$

(نتيجة من مسلمات الإحتمال) $\therefore P(X \le x_1) \le P(X \le x_2)$

$$\therefore F(x_1) \le F(x_2)$$

3. $F(x)$ دالة متصلة (مستمرة) من اليمين. أي أنه لأي $0 < \in$ نجد أن:

$$\boxed{\lim_{\in\to0} F(x+\in) = F(x)}$$

البرهان: محذوف

4. لأي عددين حقيقيين a و b نجد أن: $\boxed{P(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$

البرهان: إذا كان a < b فإن:

$$\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}$$
$$\therefore P(X \le b) = P(X \le a) + P(a < X \le b)$$
$$i.e \quad F(b) = F(a) + P(a < X \le b)$$
$$\therefore P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

ومن هذه العلاقة يمكن حساب الاحتمالات للمتغير المتقطع من العلاقات التالية:

$$i) \quad P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + f(a)$$
$$ii) \quad P(a \le X < b) = F(b) - F(a) + f(a) - f(b)$$
$$iii) \quad P(a < X < b) = F(b) - F(a) - f(b)$$

مثال(2-6): في مثال(2-1) أكتب دالة التوزيع F(x) ثم أستخدمها لحساب P(X > 1) ؟

الحل: من حل مثال (2-3) وجدنا أن التوزيع الإحتمالي للمتغير X هو:

x	0	1	2	3
f(x)	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

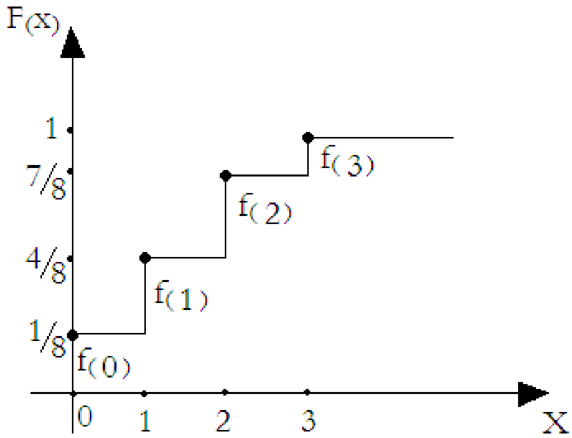
وبما أن دالة التوزيع هي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum f(x)$$
$$\therefore F(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = f(0) = 1/8$$
$$F(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= f(0) + f(1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$$
$$F(2) = P(X \le 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 4/8 + 3/8 = 7/8$$
$$F(3) = P(X \le 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$
$$= 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$$

ونكتب F(x) عادةً على الصورة التالية:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{8}, & 0\le x<1\\ \frac{4}{8}, & 1\le x<2\\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$$

وتوضح بيانياً كما يلي:



دالة درجية

Step-Function

$$\therefore P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=1-\frac{4}{8}=\frac{4}{8}$$

ملاحظة: حصلنا على F(x) من العلاقة: $F(x)=\sum f(x)$

والآن يمكننا الحصول على f(x) من F(x) بإستخدام العلاقة: $f(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$

كما يلي:

$$f(0)=F(0)-F(0^-)=\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}$$
$$f(1)=F(1)-F(1^-)=\frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$
$$f(2)=F(2)-F(2^-)=\frac{7}{8}-\frac{4}{8}=\frac{3}{8}$$
$$f(3)=F(3)-F(3^-)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

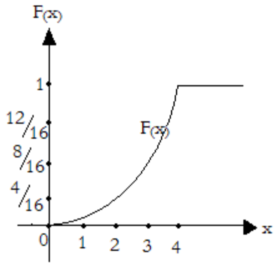
وهي نفس النتائج السابقة.

مثال (2-7): في مثال (2-4) أوجد *F*(x) ثم استخدمها لحساب (i) , (ii) .

الحل: $\because F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \Rightarrow F(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{8}t\,dt \quad =\frac{1}{8}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{16}$

ويمكن أن نكتبها كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^2}{16}, & 0\le x<4 \\ 1, & 4\le x \end{cases}$$



$$i)\quad P(X\le 1)=F(1)=\frac{1^2}{16}=\frac{1}{16}$$

$$ii)\quad P(1<X\le 3)=F(3)-F(1)$$

$$=\frac{3^2}{16}-\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

وهو ماتوصلنا إليه بإستخدام f(x) في مثال (2-4)

مثال (2-8): لديك دالة التوزيع التراكمي التالية:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \\ \frac{x}{1+x}, & x\ge 0 \end{cases}$$

1) بين نوع المتغير العشوائي X.

2) أوجد دالة التوزيع الاحتمالي f(x) وتحقق منها ثم مثلها بيانياً.

3) أوجد قيمة a إذا كان $P(X\le a)=\frac{1}{2}$.

الحل:

1) بما أن أحد قيم F(x) أعلاه $\left(\frac{x}{1+x}\right)$ تعتمد على x (دالة في x)

إذاً F(x) ليست متقطعة ، وبالتالي X ليس متقطعاً.

إذاً هل X مستمر؟ نبحث عن ذلك كما يلي: نعلم أنه إذا كان X مستمراً فإن:

$$f(x) = P(X = x) = 0 \qquad \forall x$$
$$\therefore f(0) = F(0) - F(0^-) = \qquad 0 - 0 = 0$$
$$f(2) = F(2) - F(2^-) = \qquad \frac{2}{1+2} - \frac{2}{1+2} = 0$$

$\therefore$ X متغير مستمر.

(2

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} \end{cases}$$

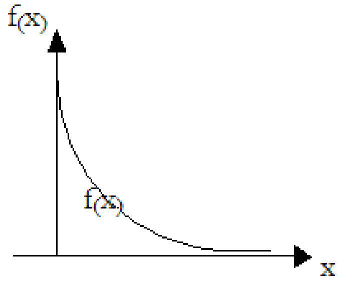
أي أن:

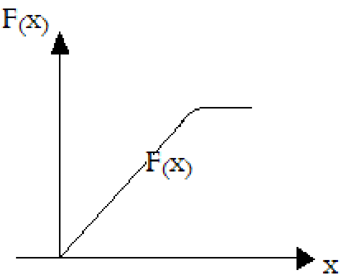
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

وللتحقق واضح أن شرطي دالة الكثافة: $(i) \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x$ متحقق من التعريف

$$(ii) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$
$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2}dy \qquad , \quad y = 1 + x$$
$$= -1\left[y^{-1}\right]_1^{\infty} = -1[0-1] = 1$$

$\therefore$ f(x) دالة كثافة إحتمالية.





(3

$$\because P(X \le a) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X \le a) = F(a) = \frac{a}{1+a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow 2a = 1 + a \quad \Rightarrow a = 1$$

<u>مثال (2-9):</u>

بين لماذا لا تمثل كل من الدالتين التاليتين دالة توزيع تراكمي:

$$a) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x, & -1 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases} \quad , \quad b) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3/4, & 0 \le x < 1 \\ x/2, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

<u>الحل:</u>

a) نعلم أن $0 \le F(x) \le 1$ لكن F(x) أعلاه عند x=-1 نجد أن: F(-1) = -1

أي أنها ليست موجبة (غير سالبة) عند كل النقاط.

b) نعلم أن F(x) غير تناقصية (تزايدية)، لكن F(x) أعلاه تناقصية وذلك لأن:

$$F(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad F(1^-) = \frac{3}{4}$$

أي أن: $F(1^-) = \frac{3}{4} > F(1) = \frac{1}{2}$.

مثال (2-10):

إذا كانت دالـة التوزيـع التراكميـة $F(x)$ للمتغيـر العشـوائي المنفصـل X علـى الصـورة التالية

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<-2\\ 0.2\ , & -2\le x<2\\ 0.5\ , & 2\le x<3\\ c\ , & 3\le x<5\\ 1\ , & x\ge 5\end{cases}$$

(1) احسب قيمة الثابت c إذا علمت ان $f(3)=0.25$.

(2) احسب التوقع والتباين للمتغير العشوائي X .

3. احسب الاحتمالات التالية:

$P(X=4)$　　$P(X>1.5)$,　　$P(1<X\le 2)$,

الحل:

(أ) قيمة الثابت c : نعلم ان

$$f(x)=F(x)-F(x^-)$$
$$\therefore\ f(3)=F(3)-F(3^-)$$
$$0.25=c-0.5 \quad \Rightarrow c=0.75$$

(ب) نحسب التوقع والتباين ودالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X كما في جدول التوزيع الإحتمالي للمتغيرX التالي:

x	-2	2	3	5	Σ
$f(x)$	0.2	0.3	0.25	0.25	1
$x\,f(x)$	-0.4	0.6	0.75	1.25	2.2

$$\because E(X)=\Sigma x f(x)$$
$$\therefore E(X)=2.2$$

$x^2 f(x)$	0.8	1.2	2.25	6.25	10.5

$E(X^2)=10.5$

$$\because V(X)=E(X^2)-E(X) \Rightarrow V(X)=10.5-(2.2)^2=5.66$$

(1) احسب الاحتمالات التالية :

$$P(1<X\le 2)=F(2)-F(1)=0.5-0.2=0.3 \quad .$$

$$P(X>1.5)=1-P(X\le 1.5)=1-F(1.5)$$
$$=1-0.2=0.8 \quad .$$
$$P(X=4)=f(4)=0 \quad .$$

(2-6): العزوم (Moments)

(2-6-1) تعريف العزوم:

العزوم لمتغير عشوائي X (أو لتوزيعه) هي: القيم المتوقعة لدوال معينة في المتغير X .

والعزوم أنواع نذكر منها مايلي:

1) العزوم حول المتوسط μ (العزوم المركزية) (Central Moments):

تعريف:

تسمى القيمة $E((X-\mu)^r)$ بالعزم حول μ (العزم المركزي) من درجة r.

ويرمز له بالرمز μ_r . أي أن: r=0, 1, 2,.... $\boxed{\mu_r=E((X-\mu)^r)}$

ويتم حساب هذا العزم من العلاقة :

$$\boxed{\mu_r=E((X-\mu)^r)=\begin{cases}\sum (x-\mu)^r f(x) & \text{في حالة X منفصل}\\ \int (x-\mu)^r f(x)dx & \text{في حالة X متصل}\end{cases}}$$

لاحظ أن:

i) $\boxed{\mu_0 = 1}$

لأن:　$\mu_0 = E((X-\mu)^0) = E(1) = 1$

ii) $\boxed{\mu_1 = 0}$

لأن:　$\mu_1 = E((X-\mu)^1) = E(X-\mu) = \mu - \mu = 0$

iii) $\boxed{\mu_2 = \sigma^2}$

لأن:　$\mu_2 = E((X-\mu)^2) = \sigma^2$

أي أن العزم الثاني حول المتوسط هو التباين.

2) العزم حول نقطة الأصل (العزم حول الصفر):

(Moments about the origin):

تعريف:

تسمى القيمة $E(X^r)$ بالعزم حول نقطة الأصل من درجة r ويرمز له بالرمز μ'_r.

أي أن:　$\boxed{\mu'_r = E(X^r)}$ ويتم حساب هذا العزم كالتالي:

$$\boxed{\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum x^r f(x) & \text{في حالة X منفصل} \\ \int x^r f(x)dx & \text{في حالة X متصل} \end{cases}}$$

بشرط أن: $E(|X|^r) < \infty$ (المجموع أو التكامل تقاربي)

لاحظ أن:

i) $\boxed{\mu'_0 = 1}$

ii) $\boxed{\mu'_1 = E(X) = \mu}$

iii) $\boxed{\mu'_2 = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2} \Rightarrow \sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2$

العلاقة بين μ_r و μ'_r: يمكن استنتاج العلاقة بين العزمين μ_r و μ'_r ومنها:

1) $\boxed{\mu = \mu'_1}$

2) $\boxed{\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2 = \sigma^2}$

3) $\boxed{\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3}$

4) $\boxed{\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4}$

ملاحظة: إذا وجد العزم $E(X^r)$ فإن كل العزوم $E(X^k)$ موجودة إذا كان $k \le r$.

مثال (2-11):

إذا كان المتغير X متغيراً عشوائياً دالة كتلته الإحتمالية هي:

$$f(x) = \frac{x}{10} \quad , \quad x = 1,2,3,4.$$

فأوجد العزوم الثلاث الأولى حول نقطة الأصل. والعزم الثالث المركزي.

الحل:

$$\because \mu'_r = \sum x^r f(x)$$

$$\therefore \mu'_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = \frac{1}{10}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right] = \frac{30}{10} = 3$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 f(x_i) = \frac{1}{10}\left[1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3\right] = \frac{100}{10} = 10$$

$$\mu'_3 = E(X^3) = \sum_{i=1}^{4} x_i^3 f(x_i) = \frac{1}{10}\left[1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4\right] = \frac{354}{10} = 35.4$$

$$\because \mu_r = E((X-\mu)^r) = \sum (x-\mu)^r f(x)$$

$$\because \mu_3 = E((X-\mu)^3) = E(X^3) - 3(E(X).E(X^2) + 2(E(x))^3$$

$$= \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$$

$$\therefore \mu_3 = E((X-3)^3) = 35.4 - (3\times3\times10) + (2\times3^3) \quad = \quad 35.4 - 90 + 54 = -0.6$$

مثال (2-12):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الإحتمالية هي:

$$f(x) = 2x \quad , \quad 0 < x < 1$$

جد العزوم الثلاث الأولى حول نقطة الأصل والعزم الثالث المركزي.

الحل:

$$\because \mu_r' = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

$$\therefore \mu_1' = E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \int_0^1 2x^3dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu_3' = E(X^3) = \int_0^1 2x^4dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

ولإيجاد العزم الثالث حول المتوسط (أي العزم الثالث المركزي) يمكن إتباع إحدى طريقتين:

الطريقة الأولى (مباشرة):

من العلاقة:

$$\mu_r = E((X-\mu)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$$

$$\therefore \mu_3 = E((X-\mu)^3) = \int_0^1 (x - 2/3)^3\, 2x\,dx$$
$$= 2\int_0^1 x(x^3 - 3.\frac{2}{3}x^2 + 2.\left(\frac{2}{3}\right)^3)dx = 2\int_0^1 \left[x^4 - 2x^3 + \frac{16}{27}x\right]dx$$
$$= 2\left[\frac{x^5}{5} - 2\times\frac{x^4}{4} + \frac{16}{27}.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2.\left[\frac{-1}{270}\right] = \frac{-1}{135}$$

<u>الطريقة الثانية:</u>

من العلاقة:

$$\mu_3 = E((X-\mu)^3) = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$$
$$\therefore \mu_3 = E((X - 2/3)^3) = 2/5 - (3\times 2/3 \times 1/2) + 2(2/3)^3 = \frac{-1}{135}$$

(2-6-2) دالة توليد العزوم (Moment Generation Function):

عملية حساب العزوم للمتغيرات (أو لتوزيعاتها) تحتاج إلى عمليات جمع أو تكامل متكررة. وأحياناً يصعب حساب العزوم بالطرق العادية. إن معرفة الدالة المولدة لعزوم أي متغير تسهل هذه العمليات وتيسر الحصول على العزوم المطلوبة للمتغير.

(1) <u>تعريف:</u>

دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي X (أو لتوزيعه) هي القيمة المتوقعة للدالة الأسية e^{Xt}.

ويرمز لها بالرمز $M_X(t)$ أو $M(t)$. أي أن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ هي:

$$\boxed{M_X(t) = E(e^{Xt})} \qquad -\infty < t < \infty$$

ويتم حساب هذه الدالة كالتالي:

$$\boxed{M_X(t) = E(e^{Xt}) = \begin{cases} \sum e^{xt} f(x) & \text{في حالة X منفصل} \\ \int e^{xt} f(x)dx & \text{في حالة X متصل} \end{cases}}$$

(2) توليد العزوم:

يمكن الحصول على عزوم المتغير X (توليد عزومه حول الصفر) بإحدى طريقتين حسب السهولة والإمكانية كما يلي:

الطريقة الأولى (بالإشتقاق):

يمكن الحصول على العزوم بالإشتقاق المتتالي لدالة توليد العزوم بالنسبة لـ t ثم التعويض بـ t=0 لنحصل على العزم المطلوب، وذلك لأنه إذا كانت: $M_X(t)=E(e^{Xt})$ فإن:

$$\frac{d}{dt}M_X(t)=M'_X(t)=E(Xe^{Xt})$$
$$\therefore M'_X(0)=E(X)=\mu'_1$$

أي أن: $\boxed{M'_X(0)=\mu}$

وكذلك:

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)=M''_X(t)=E(X^2e^{Xt})$$

$$\boxed{\therefore M''_X(0)=E(X^2)=\mu'_2}$$

وكذلك:

$$M'''_X(t)=E(X^3e^{Xt})$$

$$\boxed{\therefore M'''_3(0)=\mu'_3}$$

وهكذا نجد أن: $M_X^{(r)}(t)=E(X^re^{Xt})$

$$\boxed{\therefore M_X^{(r)}(0)=\mu'_r}$$

وهذا يعني أن μ'_r هو المشتقة r لدالة توليد العزوم $M_X(t)$ بالنسبة لـ t عند النقطة t=0.

الطريقة الثانية (بإستخدام مفكوك $M_X(t)$):

نعلم أن: $e^{Xt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Xt)^k}{K!}$ أي أن:

$$e^{Xt}=1+\frac{Xt}{1!}+\frac{X^2t^2}{2!}+.......+\frac{X^rt^r}{r!}+..........$$

$$\therefore M_X(t)=E(e^{Xt})=E(1+\frac{Xt}{1!}+\frac{X^2t^2}{2!}+.......+\frac{X^rt^r}{r!}+..........)$$

$$=1+\frac{t}{1!}E(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+............+\frac{t^r}{r!}E(X^r)+........$$

$$=1+\frac{t}{1!}\mu_1'+\frac{t^2}{2!}\mu_2'+..............+\frac{t^r}{r!}\mu_r'+.........$$

وهذا يعني أن μ_r' هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك $M_X(t)$

(3) بعض خواص الدالة المولدة للعزوم:

توجد عدة خواص للدالة $M_X(t)$ نذكر منها ما يلي:

1) $\boxed{M_X(0)=1}$

2) $\boxed{M_X'(0)=E(X)}$

3) $\boxed{Var(X)=\sigma_X^2=M_X''(0)-(M_X'(0))^2}$

البرهان:

$$\because Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$\because M_X'(0)=E(X)$$
$$M_X''(t)=E(X^2e^{Xt})\Rightarrow M_X''(0)=E(X^2)$$
$$\therefore Var(X)=M_X''(0)-(M_X'(0))^2$$

وهو المطلوب .

4) $\boxed{M_X^{(r)}(0)=E(X^r)=\mu_r'}$

5) $\boxed{M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)}$ حيث b مقدار ثابت

البرهان:

$$M_{X+b}(t) = E(e^{(X+b)t}) = E(e^{Xt+bt})$$
$$= E(e^{Xt}.e^{bt}) = e^{bt}E(e^{Xt}) = e^{bt}M_X(t)$$

6) $\boxed{M_{aX}(t) = M_X(at)}$

البرهان:

$$M_{aX}(t) = E(e^{aXt}) = E(e^{X(at)}) = M_X(at)$$

حيث a مقدار ثابت . ومن (5) و (6) نجد أن:

7) $\boxed{M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)}$

(4) ملاحظات (للقراءة والإستفادة فقط):

عند حساب العزوم قد نحتاج إجراء بعض التفاضلات أو التكاملات الصعبة. وهنا بعض القواعد والدوال التي تساعدنا على ذلك، منها:

1) إذا كانت: $Y(x) = \frac{Y_1(x)}{Y_2(x)}$ فإن: $\boxed{\frac{d}{dx}Y(x) = Y' = \frac{Y_2Y_1' - Y_1Y_2'}{Y_2^2}}$

2) دالة جاما (Gamma Function):

هي دالة رياضية يرمز لها بالرمز $\Gamma(n)$ وتعرف كما يلي:

$$\boxed{\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx}$$

وإذا كانت n عدداً صحيحا موجبا فإن:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

$$i.e: \quad \Gamma(1)=1, \quad \Gamma(2)=1, \quad \Gamma(3)=2, \quad \Gamma(4)=3!=6, \quad ......$$

وباستخدام دالة جاما يمكن إثبات (تعميم جاما) التالي:

$$\boxed{\int_0^\infty x^{a-1}e^{-bx}dx=\frac{\Gamma(a)}{b^a}}$$

وأن: $\boxed{\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}}$

3) دالة بيتا (Beta Function):

هي دالة رياضية يرمز لها بالرمز B(a,b) وتعرف كما يلي:

$$\boxed{B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}$$

أمثلة:

$$i) \quad \int_0^1 x^3(1-x)^2dx=B(4,3)=\frac{\Gamma(4).\Gamma(3)}{\Gamma(7)}=\frac{3!.2!}{6!}=\frac{1}{60}$$

$$ii) \quad a\int_0^\infty x^r e^{-ax}dx=a.\frac{\Gamma(r+1)}{a^{r+1}}=\frac{r!}{a^r}$$

مثال (2-13):

X متغير عشوائي دالة كتلته الإحتمالية هي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x e^{-3}}{x!} & , \quad x=0,1,2,.... \\ 0 & o.w\end{cases}$$

أوجد:

(1) الدالة المولدة للعزم X ثم استخدمها لإيجاد المتوسط والتباين.

(2)الدالة المولدة لعزم Y حيث أن: Y=2-3X .   (3) التوقع والتباين للمتغير Y .

الحل: نفرض أن $M_X(t)$ موجودة، عندئذٍ:

$$1)\quad M_X(t) = E(e^{Xt})$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} \frac{3^x e^{-3}}{x!}$$
$$= e^{-3} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(3e^t)^x}{x!} = e^{-3}.e^{3e^t} = e^{3(e^t-1)}$$

$$\boxed{\therefore M_X(t) = e^{3(e^t-1)}}$$

$$\because M'_X(0) = E(X) \qquad \therefore M'_X(t) = e^{3(e^t-1)}.3e^t$$
$$\therefore M'_X(0) = 1\times 3\times 1 = 3$$

$$\boxed{\therefore E(X) = 3}$$

$$\because M''_X(t) = \frac{d}{dt}(M'_X(t))$$
$$= \frac{d}{dt}\left[e^{3(e^t-1)}.3e^t\right] = \frac{d}{dt}\left[3e^{3(e^t-1)+t}\right]$$
$$= 3e^{3(e^t-1)+t}.(3e^t+1)$$
$$\therefore M''_X(0) = 3\times 1\times(3+1) = 12$$
$$\because Var(X) = \sigma_X^2 = M''_X(0) - (M'_X(0))^2$$
$$= 12 - 3^2 = 3$$

$$\boxed{\therefore Var(X) = 3}$$

لاحظ أن: $\boxed{E(X) = \sigma_X^2 = 3}$

$$2)\quad M_Y(t) = E(e^{Yt})$$
$$= E(e^{(2-3X)t})$$
$$= E(e^{2t}.e^{X(-3t)}) = e^{2t}E(e^{X(-3t)})$$
$$= e^{2t}M_X(-3t) = e^{2t}.e^{3(e^{-3t}-1)}$$

$$\boxed{\therefore M_Y(t) = e^{3(e^{-3t}-1)+2t}}$$

3 . يمكن أن نحسب التوقع والتباين للمتغير Y باستخدام الدالة $M_Y(t)$ كما في الفقرة (1) أعلاه ، أوباستخدام خواص التوقع والتباين كما يلي :

$$E(Y)=E(2-3X)=2-3E(X)=2-3(3)=-7$$
$$\therefore E(Y)=-7 \quad ,$$

$$V(Y)=V(2-3X)=V(-3X)=(-3)^2V(X)=9(3)=27$$
$$\therefore V(Y)=27 .$$

مثال (2-14):

X متغير عشوائي دالة كثافته الإحتمالية هي:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , \quad x\ge 0, \quad \lambda>0: const.\\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

أوجد:

(1)الصيغة العامة لعزوم X حول نقطة الأصل بإستخدام f(x).

(2)الصيغة العامة لعزوم X حول نقطة الأصل بإستخدام $M_X(t)$.

الحل: 1) بإستخدام دالة الكثافة f(x):

$$\begin{aligned}\because \mu_r' &= E(X^r)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx\\ &=\int_0^{\infty} x^r.\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{\infty}x^r e^{-\lambda x}dx\\ &=\frac{\lambda\Gamma(r+1)}{\lambda^{r+1}}\\ &=\frac{r!}{\lambda^r}\end{aligned}$$

من دالة جاما أعلاه ويمكن استخدام التعويض $y=\lambda x$

$$\boxed{\therefore \mu_r'=\frac{r!}{\lambda^r}}$$

ومنه فإن:

$$\mu_1' = E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mu_2' = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}, \quad \mu_3' = \frac{6}{\lambda^3}$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

2) بإستخدام الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$:

$$\because M_X(t) = E(e^{Xt})$$

$$\therefore M_X(t) = \int_0^\infty e^{xt}.f(x)dx = \int_0^\infty e^{xt}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda\int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)}dx = \lambda\left[\frac{-e^{-x(\lambda-t)}}{\lambda-t}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda-t} = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$\boxed{\therefore M_X(t) = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}}$$

$$\therefore M_X'(t) = -1(1-\frac{t}{\lambda})^{-2}.(\frac{-1}{\lambda})$$

$$\therefore \mu_1' = M_X'(0) = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\because M_X''(t) = \frac{1}{\lambda}.-2(1-\frac{t}{\lambda})^{-3}.(\frac{-1}{\lambda})$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}(1-\frac{t}{\lambda})^{-3} = \frac{2!}{\lambda^2}(1-\frac{t}{\lambda})^{-3}$$

$$\therefore M_X''(0) = \frac{2!}{\lambda^2} \Rightarrow \mu_2' = \frac{2!}{\lambda^2}$$

$$, M_X^{(3)}(t) = \frac{2!}{\lambda^2}.-3(1-\frac{t}{\lambda})^{-4}.(\frac{-1}{\lambda}) = \frac{3!}{\lambda^3}(1-\frac{t}{\lambda})^{-4}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{M_X^{(r)}(t) = \frac{r!}{\lambda^r}(1-\frac{t}{\lambda})^{-(r+1)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_r' = \frac{r!}{\lambda^r}}$$

لاحظ أن:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{2!}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

حل آخر لفقرة (2): نعلم أن مفكوك $M_X(t)$ هو:

$$M_X(t) = (1-\frac{t}{\lambda})^{-1} = 1+\frac{t}{\lambda}+\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2+.........+\left(\frac{t}{\lambda}\right)^r+......$$

وبما أن μ_r' هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في هذا المفكوك نجد أن الحد:

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)^r = \frac{t^r}{\lambda^r} = \frac{t^r}{r!}.\frac{r!}{\lambda^r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_r' = \frac{r!}{\lambda^r}}$$

وهو ما وجدناه سابقاً

مثال (2-15): X متغير عشوائي دالة كثافته الإحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \le x \le 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

أوجد دالة توليد العزوم ثم استنتج منها العزم μ_r'.

الحل:

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \int_0^1 e^{xt}1dx = \left[\frac{e^{xt}}{t}\right]_0^1$$

$$\boxed{\therefore M_X(t) = \frac{1}{t}\left[e^t - 1\right]}$$

ويمكن كتابة مفكوكها كما يلي:

$$M_X(t) = \frac{1}{t}\left[\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+.......+\frac{t^r}{r!}+....\right)-1\right]$$
$$= 1+\frac{t}{2!}+.........+\frac{t^{r-1}}{r!}+\frac{t^r}{(r+1)!}+........$$

وبما أن μ_r' هو معامل الحد $\frac{t^r}{r!}$ في هذا المفكوك نجد أن الحد:

$$\frac{t^r}{(r+1)!} = \frac{t^r}{r!}.\frac{r!}{(r+1)!} \Rightarrow \mu_r' = \frac{r!}{(r+1)!} = \boxed{\frac{1}{r+1}}$$

مثال (2-16):

إحسب العزوم المركزية الأربعة الأولى للمتغير X الذي يتبع التوزيع التالي:

x	0	1	2	3
f(x)	0.2	0.2	0.4	0.2

ثم احسب الدالة المولدة لعزومه .

الحل: يمكن تلخيص بعض الخطوات في الجدول التالي:

x	0	1	2	3	المجموع
f(x)	0.2	0.2	0.4	0.2	1
xf(x)	0	0.2	0.8	0.6	1.6= μ_1'
$x^2f(x)$	0	0.2	1.6	1.8	3.6= μ_2'
$x^3f(x)$	0	0.2	3.2	5.4	8.8= μ_3'
$x^4f(x)$	0	0.2	6.4	16.2	22.8= μ_4'

$$\therefore \mu_1' = E(X) = 1.6 = \mu$$

∴ العزم الأول حول μ (المركزي) يساوي صفر لأن:

$$\mu_1 = E((X-\mu)^1) = \mu - \mu = 0$$

والعزم المركزي الثاني (التباين) هو:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= E((X-\mu)^2) = \sigma^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 = \mu_2' - \mu^2 \\ &= 3.6 - (1.6)^2 = 1.04\end{aligned}$$

والعزم المركزي الثالث هو:

$$\mu_3 = E((X-\mu)^3)$$
$$= \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$$
$$= 8.3 - 3(1.6).(3.6) + 2(1.6)^3 = -0.788$$

أما العزم المركزي الرابع هو:

$$\mu_4 = E((X-\mu)^4)$$
$$= \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4$$
$$= 22.8 - 4(1.6)(8.8) + 6(1.6)^2(3.6) - 3(1.6)^4 = 2.1152$$

والدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \Sigma e^{xt} f(x)$$
$$= e^0(0.2) + e^t(0.2) + e^{2t}(0.4) + e^{3t}(0.2)$$
$$\therefore M_X(t) = 0.2 + 0.2e^t + 0.4e^{2t} + 0.2e^{3t} \quad .$$

مثال (2-17):

(أ) إذكر تعريف دالة التوزيع التراكمي F(x) ثم اذكر خواصها وبرهن واحدة.

(ب) إذا كان X متغيراً عشوائياً وصفه احتمالياً كما في الجدول المقابل، فالمطلوب هو:

x	1	2	3	4
f(x)	1/4	1/2	1/8	2/16

(1) التأكد من أن f(x) هي دالة الكتلة الإحتمالية. 2 . حساب دالة التوزيع F(x).

(3) حساب كلاً من: $P(1 < X \le 4),\quad P(X > 2),\quad M_X(t)$.

الحل:

أ) تعريف F(x) هو: $F(x) = P(X \le x), \quad x \in R$

وخواصها هي: 1. $F(-\infty)=0$ و $F(\infty)=1 \Leftarrow$ $0 \le F(x) \le 1$

2. F(x) غير تناقصية (تزايدية) أي أن:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) < F(x_2)$$

3. F(x) متصلة من اليمين.

ونبرهن الخاصية (2):

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن: $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$

$$\therefore P(X \le x_1) \le P(X \le x_2)$$ (نتيجة من مسلمات الإحتمال)

$$\therefore F(x_1) \le F(x_2)$$

ب) 1) نتأكد من تحقق الشرطين:

$$i) \quad f(x) \ge 0, \quad \forall x$$
$$ii) \quad \sum_x f(x) = 1$$

نلاحظ أن الشرط الأول محقق من الجدول أعلاه. أما الشرط الثاني فهو:

$$\sum_x f(x) = 1/4 + 1/2 + 1/8 + 2/16 = \frac{4+8+2+2}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$\therefore$ f(x) هي دالة الكتلة الإحتمالية لـ X.

2) نحسب الدالة من العلاقة : $F(x) = \sum_{k \le x} f(k)$

$$\therefore F(1) = f(1) = 1/4 \quad , \quad F(2) = f(1) + f(2) = 3/4$$
$$F(3) = f(1) + f(2) + f(3) = 3/4 + 1/8 = 7/8 \ ,$$
$$F(4) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 7/8 + 2/16 = 16/16 = 1$$

وعليه فإن دالة التوزيع التراكمي هو:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1/4, & 1\le x<2\\ 3/4, & 2\le x<3\\ 7/8, & 3\le x<4\\ 1, & 4\le x\end{cases}$$

(3

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(1<X\le 4)=F(4)-F(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

نحسب الدالة من العلاقة :

$$M_X(t)=\sum_{\forall x} e^{xt} f(x)$$

$$\therefore M_X(t)=(1/4)e^{t}+(1/2)e^{2t}+(1/8)e^{3t}+(2/16)e^{4t}\ .$$

مثال(2-18):

متغير عشوائي متصل Y له دالة كثافة إحتمالية $f(y)$ كما يلي:

$$f(y)=c_1+c_2y^2 \quad , \quad 0<y<1$$

حيث c_1,c_2 ثوابت. إذا كان معلوما أن $E(Y)=\frac{3}{4}$ فالمطلوب ما يلي:

(1) أذكر شرطي دالة الكثافة $f(y)$. 2. أحسب قيمتي الثابتين c_1 و c_2 .

3. أوجد دالة التوزيع التراكمي F(y) ومنها أحسب قيمة P(0.4 < Y <0.8).

الحل:

1) شرطي دالة الكثافة $f(y)$ هما: $i)\quad f(y)\ge 0 \quad , \quad ii)\quad \int_0^1 f(y)dy=1$

2) لحساب الثابتين:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = \int_0^1 (c_1 + c_2 y^2)dy = c_1 \int_0^1 dy + c_2 \int_0^1 y^2 dy = 1$$

$$\Rightarrow c_1 [y]_0^1 + c_2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 1 \qquad (1)$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy = \frac{3}{4} = \int_0^1 y(c_1 + c_2 y^2)dy$$

$$\Rightarrow \quad c_1 \int_0^1 ydy + c_2 \int_0^1 y^3 dy = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow c_1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + c_2 \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} \quad \Rightarrow \quad 2c_1 + c_2 = 3 \qquad (2)$$

وبطرح (1) من (2) بعد ضرب (1) في العدد 2 نجد أن:

$$\begin{array}{l} 2c_1 + \frac{2}{3}c_2 = 2 \\ \underline{2c_1 + c_2 \quad = 3} \\ \qquad \frac{1}{3}c_2 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow c_2 = 3 \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

وتصبح دالة الكثافة f(y) كما يلي:

$$f(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

3) دالة التوزيع التراكمي تحسب كما يلي:

$$F(y) = P(Y \le y) = \int_0^y f(t)dt = \int_0^y 3t^2 dt = 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y = y^3 ,$$

$$\therefore F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y^3, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

ومنها نحسب الإحتمال التالي:

$$P(0.4 < Y < 0.8) = F(0.8) - F(0.4) = (0.8)^3 - (0.4)^3$$
$$= 0.512 - 0.064 = 0.448$$

(2-7) تمارين على الفصل الثاني

1. صندوق به 4 كرات حمراء وكرتين خضراء . سحبت منه عينة عشوائية مكونة من كرتين. فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الحمراء في العينة .

فأوجد في كل من الحالات التالية : (أ) إذا تم السحب بإرجاع (ب) بدون إرجاع (ج) الكرتان سحبتا معاً . مع مقارنة النتائج لكل مما يلي:

1) التوزيع الإحتمالي للمتغير X ومنه إحسب $\mu = E(X)$ ؟

2) دالة التوزيع التراكمي F(X) ومثلها بيانياً؟

3) إحتمال أن تحتوي العينة على كرة حمراء واحدة على الأقل؟

4) الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ ومنها أحسب $\mu = E(X)$ ؟

2. رميت عملة غير متزنة ثلاث مرات، فإذا كان المتغير X يمثل عدد مرات ظهور H

وبفرض أن $P(\{H\}) = 3/5$, أوجد كل من:

أ) f(x) واستخدمها لحساب $M_X(t), \ \sigma_X, \ \sigma_X^2, \ \mu_X$

ب) F(x) واستخدمها لحساب $P(X \le 4)$ و $P(X > 3)$

ج) $M_Y(t)$ و $E(Y)$ و $Var(Y)$ حيث Y= 3X-2

د) استخدم $M_Y(t)$ لكتابة التوزيع الإحتمالي للمتغير Y

3. أعد حل السؤال (2) أعلاه بإذا كان P({H}) ضعف P({T})؟

4. إذا كان X يتبع التوزيع الإحتمالي التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} & , \quad x=1,2,3,..... \\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

فأوجد كل من: (أ) $E(X),\ \ V(X),\ \ M_X(t)$.

(ب) $E(Y),\ \ V(Y),\ \ M_Y(t)$ حيث Y=X+2

5. إذا كان X يتبع التوزيع الإحتمالي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & , \quad x=1,2,3 \\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

أوجد كل من: $E(Y),\ \ V(Y),\ \ M_Y(t)$ حيث أن: Y=2X-1 ؟ .

6. إذا كان X يتبع التوزيع الإحتمالي التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\binom{3}{x}\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{3-x} & , \quad x=0,1,2,3 \\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

أوجد كل من: (أ) $M_X(t)$, E(X) ثم أستخدمها لإيجاد E(X) . (ب) $M_Y(t)$, E(Y)
حيث أن: Y=3X-2

7. أُلقي حجرا نرد متزنان مرة واحدة فإذا كان:

أ) المتغير X يمثل مجموع العددين الظاهرين على السطح العلوي للنردين

فأحسب:" E(X) , f(x)

ب) المتغير Y يمثل العدد الأكبر أو المساوي في الرقمين الظاهرين على سطحي النردين فأحسب: $M_Y(t)$, E(Y) , f(y)

ج) إذا حدد فضاء العينة لرمي النردين أعلاه كما يلي:

$$\Omega = \{(a,b) : a \neq b, a = 1,2,...,6 \quad b = 1,2,....6\}$$

وكان المتغير Z يمثل أكبر العددين (a , b) فإحسب: f(z) و $M_Z(t)$

ومنها إحسب: Var(Z) , E(Z)؟

8. تحقق من أن الدالة:

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4$$

تمثل دالة كتلة إحتمالية للمتغير X ، ثم أحسب P(X > 2)؟

9. ألقي حجر نرد متزن مرة واحدة. فإذا كان المتغير X يمثل الرقم الظاهر على السطح العلوي للنرد. فأوجد: (أ) f(x) ، (ب) $M_X(t)$ ومنها إحسب E(X) و Var(X)؟ ،

10. إذا كان X متغيراً عشوائيا له دالة التوزيع التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 0.13 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0.27 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 0.53 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 0.84 & , \quad 3 \le x < 4 \\ 0.92 & , \quad 4 \le x < 5 \\ 1 & , \quad 5 \le x \end{cases}$$

(1) ما نوع هذا المتغير؟ (2) أوجد التوزيع الإحتمالي له؟

(3) أوجد قيم الإحتمالات التالية $P(X > 3)$ و $P(2 < X \le 4)$ ؟

(4) أوجد التوقع والتباين للمتغير X؟ (5) أوجد E(Y) حيث $Y = (X-1)^2$؟

11. إذا كان X متغيراً عشوائيا مجموعة قيمه هي {-1,0,1} فالمطلوب :

1) إذا كان $P(X=0)=\frac{1}{2}$ فأوجد $E(X^2)$؟

2) إذا كان $P(X=0)=\frac{1}{2}$ و $E(X)=\frac{1}{6}$ فأوجد $P(X=1)$ و $P(X=-1)$ ؟

12. إذا كانت سرعة الرياح X تتبع توزيعا إحتمالياً دالة كثافته هي:

$$f(x)=\frac{1}{10} \quad , \quad 0<x<10$$

وكان الضغط Y على جناح الطائرة معطى بالعلاقة: $Y=0.003X^2$ فأوجد:

1) متوسط الضغط على جناح الطائرة والإنحراف المعياري؟

2) دالة التوزيع التراكمي $F(x)$؟ 3) $E(X)$ و $Var(X)$؟

13. نريد إختيار عائلة لديها طفلين:

1) أكتب فضاء العينة الذي يبين جنس الطفل (الولد b والبنت g).

2) إذا كان X يمثل عدد الأولاد. فأوجد كل من:

$$i)\,f(x) \quad ii)\,F(x) \quad iii)\,E(X) \quad iv)\,Var(X)$$

3) إذا كان Y يمثل نسبة عدد البنات إلى عدد الأطفال في العائلة فأوجد:

$$i)\,f(y) \quad ii)\,F(y) \quad iii)\,E(Y) \quad iv)\,Var(Y)$$

4) إذا كان Z يمثل (عدد الأولاد – عدد البنات) فأوجد:

$$i)\,f(z) \quad ii)\,F(z) \quad iii)\,E(Z) \quad iv)\,Var(Z)$$

ماذا تلاحظ على هذه المتغيرات وتوزيعاتها؟

14. لاحظ بائع كتب أنه يكسب 40 ريالاً في اليوم الذي يفتح فيه محله مبكراً ، ويخسر 10 ريالات في اليوم الذي لايفتح فيه المحل مبكراً. فإذا كان معلوماً أن إحتمال فتح المحل مبكراً في يوم ما هو 0.6 فأوجد التوقع الرياضي لمكسب ذلك البائع في اليوم؟

15. إذا كان وقت الإنتظار لشخص ما داخل مكتب خدمات يمثل بمتغير عشوائي X له دالة التوزيع التالية: (القيم محسوبة بالدقائق):

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ x/2 & , \quad 0\le x<1 \\ 1/2 & , \quad 1\le x<2 \\ x/4 & , \quad 2\le x<4 \\ 1 & , \quad 4\le x \end{cases}$$

(1) ما نوع هذا المتغير؟ (2) إرسم الدالة F(x)؟ (3) إحسب f(x) ثم أرسمها؟

(4) إحسب E(X) و Var(X)؟ (5) إحسب الإحتمالات التالية:

$$(i)\ P(X>3), \quad (ii)\ P(X<3), \quad (iii)\ P(1<X<3)$$

16. أذكر نوع المتغير العشوائي الذي يمثله كل من التوزيع التالي:

$$F(l)=\begin{cases} 0 & ,l<0 \\ 0.20 & ,0\le l<1 \\ 0.35 & ,1\le l<2 \\ 0.75 & ,2\le l<3 \\ 1 & ,3\le l \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & ,0<x \\ 1-e^{-2x} & ,0\le x \end{cases}$$

$$F(z)=\begin{cases} 0 & ,z<-2 \\ 1/4 & ,-2\le z<-1 \\ 5/8 & ,-1\le z<0 \\ \dfrac{3z+5}{8} & ,0\le z<1 \\ 1 & ,1\le z \end{cases} \qquad F(y)=\begin{cases} 0 & ,y<0 \\ y/3 & ,0\le y<1/3 \\ y/2 & ,1/3\le y<1/2 \\ y & ,1/2\le y<1 \\ 1 & ,1\le y \end{cases}$$

ثم أحسب كل من f(.) , E(.) , Var(.) في حالة المتقطع والمستمر؟

17. (أ) أذكر خواص دالة التوزيع F(x) ثم أثبت أنها غير تناقصية؟،

(ب) متغير عشوائي X له التوزيع الإحتمالي التالي:

x	0	1	2	3	4
f(x)	$1/4$	$1/16$	$3/8$	$1/16$	$1/4$

(1) أوجد F(x)؟

(2) إحسب الإحتمالات التالية: $P(0<X<3),\quad P(X\geq 0),\quad P(2\leq X<4)$

(3) أكتب الحادثة التي لها الإحتمال: F(3) – F(1) ، (4) أحسب $M_X(t)$؟

18. (أ) عرف الدالة المولدة للعزوم؟، (ب) إذا كانت $M_X(t)$ دالة مولدة للعزوم للمتغير X فأثبت أن: $i)\quad E(X)=M'_X(0)\quad ,\quad ii)\quad \sigma_X^2=M''_X(0)-\{M'_X(0)\}^2$

19. أوجد الدالة المولدة للعزوم M(t) وأحسب كل من المتوسط والتباين وذلك لكل من التوزيعات التالية:

$$(i)\, f(x)=2e^{-2x}\quad ,x\geq 0\qquad (ii)\, f(y)=\lambda e^{-\lambda(y-c)}\quad ,y\geq c$$
$$(iii)\, f(z)=a\quad ,2<z<3$$

إحسب للتوزيع الأخير (iii) قيمة الثابت a ثم أوجد F(z)؟ .

20. إذا كان X متغير يتبع الدالة: $f(x)=pq^{x-1}\quad ,\quad x=1,2,3,......$

حيث أن p مقدار ثابت و $0\leq p\leq 1$ بحيث p+q=1 فالمطلوب:

أ) التأكد من أن f(x) هي دالة توزيع إحتمالي.

ب) إيجاد كل من: $i)F(x),\quad ii)E(X),\quad iii)\sigma_X,\quad v)M_X(t)$

21. لدينا تجربة عشوائية تقتضي: رمي حجر نرد متزن عدة مرات حتى الحصول على الرقم واحد لأول مرة. فإذا كان X يمثل عدد مرات الرمي اللازم لإنهاء هذا التجربة. فالمطلوب:

أ) كتابة فضاء العينة لهذه التجربة، بحيث نكتب 1 عند ظهور الواحد و $\bar{1}$ عند عدم ظهوره.

ب) إيجاد دالة الكتلة الإحتمالية f(x). ج) حساب E(X).

22. لديك دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad o \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & , \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

أحسب كل من :

$$(i)\ E(X) \quad , \quad (ii)\ F(1.5) \quad , \quad (iii)\ P(0.5 < X < 1.5)$$

23. ليكن X متغيراً متصلاً له الدالة التراكمية:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x < -1 \\ \dfrac{x+1}{12} & ; \quad -1 \le x < 2 \\ \dfrac{x}{4}+b & ; \quad 2 \le x < 5 \\ 1 & ; \quad 5 \le x \end{cases}$$

أحسب كل من :

$$(i)\ b \quad , \quad (ii)\ f(x) \quad , \quad (iii)\ P(X > 0)$$

24. **إذا علمت أن** $M_X(t)=\sum_{r\ge 0}\frac{t^r}{r!}E(X^r)$ **هو مفكوك الدالة المولدة للعزوم لأي متغير** X **، وإذا كان للدالة المولدة لعزوم المتغير** Y **المفكوك التالي:** $M_Y(t)=\sum_{r\ge 0}\frac{t^r}{3^r}$ **.**

فاحسب الشكل العام للعزم $E(Y^r)$ **واستنتج منها التوقع والتباين للمتغير** Y **.**

<u>**ملاحظة:**</u> (أ) عند حل المسألتين 20 و 21 أعلاه قد نحتاج إلى التالي:

إذا كان لدينا المتوالية الهندسية: $b<1 \quad , \quad 1+b+b^2+b^3+.........$

فإن:

$$(i)\quad \sum_{k=0}^{\infty} b^k=\frac{1}{1-b} \quad , \quad (ii)\ \sum_{k=0}^{n} b^k=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

$$(iii)\quad \sum_{k=1}^{\infty} kb^{k-1}=\frac{1}{(1-b)^2} \quad , \quad (v)\ \sum_{k=1}^{\infty} k^2b^{k-1}=\frac{(1+b)}{(1-b)^3}$$

(ب) مجموع الأعداد الطبيعية هو : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

الفصل الثالث

التوزيعات الإحتمالية المنفصلة

(Discrete Probability Distributions)

مقدمة

سندرس في هذا الفصل بعض التوزيعات المنفصلة التي لها تطبيقات كثيرة في الحياة العملية أو التي هي أساس لبعض التوزيعات. وتشمل هذه الدراسة معرفة شكل دالة كتلته الإحتمالية، و تحقيقها لشرطي دالة الكتلة. وكذلك F(x) وبعض خواص التوزيع والدالة المولدة للعزومه ما أمكن ذلك. ومن هذه التوزيعات ما يلي:

(1-3) توزيع (محاولة) بيرنولي

(Bernoulli Distribution)

(1) المقدمة:

يصف هذا التوزيع التجارب العشوائية التي لها أحد ناتجين فقط. الناتج الأول نسميه نجاحاً Success ونرمز له بـ "S" . والناتج الثاني نسميه فشلاً Failure ونرمز له بـ "F" (هذا الناتج هو عدم حدوث الناتج الأول). وعليه فإن فضاء العينة لمحاولة بيرنولي هو $\Omega = \{S, F\}$. فإذا عرفنا على هذا الفضاء متغيراً عشوائياً X يمثل عدد مرات النجاح فإن قيم X هي $\{1,0\}$ أي أن: $X : \{S, F\} \to \{1,0\}$.

و إذا فرضنا أن إحتمال النجاح هو p فإن احتمال الفشل هو (1- p) أي أن:

$$P(X = 1) = p \quad , \quad P(X = 0) = 1 - p \equiv q \quad , \quad p + q = 1$$

وعليه فإن :

(2) دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير X هي:

$$f(x)=\begin{cases} p\,, & x=1 \\ 1-p\,, & x=0 \\ 0\,, & o.w \end{cases}$$

والتي يمكن أن نكتبها كما يلي:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} \binom{1}{x}p^{x}.q^{1-x} & , \quad x=0,1 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}}$$

لاحظ أن p هي معلمة هذا التوزيع. لماذا؟ ،

تمرين: أثبت أن f(x) هي دالة كتلة إحتمالية؟

(3) دالة التوزيع التراكمي هي:

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ 1-p & , \quad 0\le x<1 \\ 1 & , \quad 1\le x \end{cases}}$$

(4) توقع هذا التوزيع هو:

$$\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{1}xf(x)=\sum_{x=0}^{1}x\binom{1}{x}p^{x}q^{1-x}$$
$$=0+1\times1\times p\times1=p$$

أي أن: $\boxed{\mu=E(X)=p}$ ، وهذا يعني أن توقع X هو إحتمال النجاح.

(5) تباين هذا التوزيع هو: $\boxed{Var(X)=\sigma_X^2=pq}$

البرهان:

$$\mu_2' = E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 \binom{1}{x} p^x q^{1-x} = p$$

$$\because \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

(6) الدالة المولدة لعزوم هذا التوزيع هي: $\boxed{M_X(t) = q + pe^t}$

البرهان:

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \sum_{x=0}^{1} e^{xt} \binom{1}{x} p^x q^{1-x}$$

$$= 1\times1\times1\times q + e^t \times 1 \times p \times 1 = q + pe^t$$

ويمكن إيجاد التوقع والتباين لتوزيع بيرنولي بإستخدام دالته المولدة للعزوم كالتالي:

$$\because M_X(t) = q + pe^t$$

$$\therefore M_X'(t) = pe^t \quad \Rightarrow \mu = E(X) = M_X'(0) = p$$

$$M_X''(t) = pe^t \quad \Rightarrow \mu_2' = E(X^2) = M_X''(0) = p$$

$$\therefore \sigma_X^2 = M_X''(0) - (M_X'(0))^2$$

$$= p - p^2 = pq$$

تمرين: أثبت أن : $\boxed{\mu_r' = E(X^r) = p}$

مثال (3-1-1):

المحاولة هي أن نختار عدداً صحيحاً من 0 إلى 8 ونقسمه على 2 ، وذلك بطريقة عشوائية.
ليكن X هو باقي القسمة.

(1)أوجد كل من:

$$(i)\ f(x), \quad (ii)\ F(x), \quad (iii)\ E(X), \quad (v)\ \sigma_X^2, \quad (vi)\ M_X(t)$$

(2)إذا كان Y= b + aX حيث b و $a \neq 0$ ثوابت, فأوجد كل من:

$$(i)\quad E(Y),\quad (ii)\ \sigma_Y^2,\quad (iii)\ M_Y(t),\quad (v)\ f(y)$$

الحل: بعد إختيار العدد وقسمته على 2 فإن الباقي سيكون أحد القيم التالية:

$$X(0)=0,\quad X(1)=1,\quad X(2)=0,\quad X(3)=1,\quad X(4)=0,$$
$$X(5)=1,\quad X(6)=0,\quad X(7)=1,\quad X(8)=0$$

لاحظ أن قيم X (باقي القسمة) هي $\{1,0\}$ وعليه فإن:

$$f(0)=P(X=0)=\frac{5}{9}\quad ,\quad f(1)=P(X=1)=\frac{4}{9}$$

أي أن التوزيع الإحتمالي للمتغير X هو:

x	0	1
f(x)	$5/9$	$4/9$

و إذا أعتبرنا أن النجاح هو الحصول على باقي قسمة غير الصفر فإن:

$$P(X=1)=\frac{4}{9}\equiv p$$

و عليه فإن: (1)

$$(i)\ f(x)=\binom{1}{x}\left(4/9\right)^x\left(5/9\right)^{1-x},\quad x=0,1.$$

$$(ii)\ F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0\\ 5/9 & ,\ 0\le x<1\\ 1 & ,\ 1\le x\end{cases}$$

$$(iii)\ E(X)=p=\frac{4}{9}$$

$$(v)\ Var(X)=\sigma_X^2=pq=\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{20}{81}$$

$$(vi)\ M_X(t)=q+pe^t=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}e^t$$

(2) باستخدام الخواص نجد أن :

$$(i)\ E(Y) = E(b+aX) = b + aE(X) = b + \frac{4}{9}a$$

$$(ii)\ \sigma_Y^2 = Var(Y) = Var(b+aX) = a^2 Var(X) = a^2 \times \frac{20}{81} = \frac{20a^2}{81}$$

$$(iii)\ M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E(e^{(b+aX)t})$$

$$= e^{bt} M_X(at) = e^{bt}\left(\tfrac{5}{9} + \tfrac{4}{9}e^{at}\right)$$

$$\therefore M_Y(t) = \frac{5}{9}e^{bt} + \frac{4}{9}e^{(a+b)t} \quad .$$

(v) من صيغة الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y يمكن معرفة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير والاحتمال المناظر لهذه القيم كالتالي :

y	b	$a+b$
$f(y)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

تمرين: أعد الفقرة (2) عندما يكون Y=2+3X .

(2-3) توزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي)

(Binomial Distribution)

(1) المقدمة:

يعتبر هذا التوزيع تعميماً لمحاولة بيرنولي حيث يصف هذا التوزيع المتغير X (عدد مرات النجاح) عند تكرار محاولة بيرنولي n من المرات بشرط أن تكون نتائج المحولات مستقلة (أي

لاتؤثر نتيجة محاولة على نتيجة محاولة أخرى). وأن يظل إحتمال النجاح p ثابتاً لكل المحاولات. وعليه فإن:

(2) دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير ذي الحدين تعرف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} & , \quad x=0,1,2,....n \\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

ومعلمتا هذا التوزيع هما n و p . ويرمز له أحياناً بالرمز b(x;n,p) .

(3) دالة توزيعه التراكمي هي:

$$F(x)=\sum_{r=0}^{x}\binom{n}{r}p^{r}q^{n-r} \quad , \quad r=0,1,2,3,........x$$

وتوجد جداول إحصائية تعطي قيمة هذا المجموع لقيم مختلفة لكل من n,p,x .

(4) توقع هذا التوزيع هو: $\boxed{\mu=E(X)=np}$

(5) تباين هذا التوزيع هو: $\boxed{Var(X)=\sigma_X^2=npq}$

ومنه فإن **الإنحراف المعياري** هو: $\boxed{\sigma_X=\sqrt{npq}}$

ملاحظة: لاحظ أنه في التوزيع الثنائي يكون: $\mu>\sigma_X^2$

(6) الدالة المولدة لعزوم هذا التوزيع هي: $\boxed{M_X(t)=(q+pe^t)^n}$

(7) أمثلة:

مثال (3- 2 - 1): إذا كان X متغيراً يتبع توزيع ذي الحدين ، فأجب على ما يلي:

(1)أثبت أن f(x) دالة كتلة إحتمالية.

(2)بإستخدام f(x) أثبت أن: $\mu=E(X)=np \quad , \quad Var(X)=\sigma_X^2=npq$

(3)أثبت أن الدالة المولدة لعزوم توزيع ذي الحدين هي: $M_X(t) = (q + pe^t)^n$

ثم بإستخدامها ، أثبت أن: $\mu = E(X) = np \quad , \quad Var(X) = \sigma_X^2 = npq$

الحل:

في حل هذا المثال سوف نستخدم المعلومات التالية:

أ) نظرية ذي الحدين: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}}$ حيث n عدد صحيح موجب.

ب) المتطابقة : $\boxed{r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}}$

والآن:

1) نتحقق من أن f(x) تحقق الشرطين: $(i) \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x, \quad (ii) \quad \sum_x f(x) = 1$

نلاحظ أن $f(x) \geq 0$ من تعريف دالة التوزيع الثنائي ، أما الشرط الثاني فهو :

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = (1)^n = 1$$

$\therefore$ f(x) تحقق الشرطين أعلاه فهي دالة كتلة إحتمالية.

2) التوقع هو:

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} n \binom{n-1}{x-1} p^x q^{n-x} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x}
\end{aligned}$$

بوضع y=x-1 و m=n-1 داخل $\sum$ نجد أن: $x = n \Rightarrow y = m \quad , \quad x = 1 \Rightarrow y = 0$

$$\mu = np\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p^y q^{m-y} = \quad np(p+q)^m = np\times 1 = np$$

ولإثبات التباين:

$$\because \sigma_X^2 = E(X^2)-(E(X)^2) = E(X^2)-n^2p^2$$

$$\because E(X^2)=\sum_x x^2 f(x) = \quad \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

نستطيع أن نكتب:

$$x^2 = x^2 - x + x = x(x-1)+x$$

$$\therefore E(X^2)=\sum_{x=0}^{n}\left[x(x-1)+x\right]\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x} + np$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}p^{x-2}q^{n-x} + np$$

وبوضع y=x-2 و m=n-2 داخل $\sum$ نجد أن:

$$E(X^2)=n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{m}\frac{m!}{y!(m-y)!}p^y q^{m-y} + np$$

$$= n(n-1)p^2\times 1 + np$$

$$\therefore \sigma_X^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

3) الدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_X(t)=E(e^{Xt})=\sum_{x=0}^{n}e^{Xt}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$= \quad \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x} = (q+pe^t)^n$$

$$M'_X(t)=\frac{d}{dt}M_X(t)=n(q+pe^t)^{n-1}.pe^t$$

وعليه فإن :
$$\therefore M'_X(0)=E(X)=n(q+pe^t)^n\times p\times 1$$
$$=n\times 1\times p=np$$

وكذلك:

$$M''_X(t)=n(q+pe^t)^{n-1}.pe^t+pe^t.n(n-1)(q+pe^t)^{n-2}.pe^t$$
$$\therefore M''_X(0)=n\times 1\times p+p\times n(n-1)\times 1\times p$$
$$=np+n(n-1)p^2$$
$$\therefore Var(X)=\sigma_X^2=M''_X(0)-(M'_X(0))^2$$
$$=np+n^2p^2-np^2-n^2p^2$$
$$=np(1-p)=npq$$

مثال (3-2-2):

في أحدى المدن كانت نسبة المصابين من كبار السن بمرض السكر هو 30%. فُحصت عينة مكونة من 5 أفراد من كبار السن من هذه المدينة للتأكد من إصابتهم بمرض السكر. وبفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد المصابين في هذه العينة:

(1) أكتب دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير X. (2) ماهو إحتمال وجود شخص واحد على الأقل مصاب. (3) ماهو العدد المتوقع للأشخاص المصابين في هذه العينة.
(4) أوجد قيمة الإنحراف المعياري. (5) أكتب الدالة المولدة لعزوم X.

الحل:

1) دالة الكتلة الإحتمالية لهذا المتغير هي:

$$f(x)=\binom{5}{x}(0.3)^x(0.7)^{5-x}\,,\qquad x=0,1,2,3,4,5$$

2) P(وجود شخص واحد على الأقل مصاب)= $P(X\ge 1)=1-P(X=0)$

$$=1-f(0)=1-(0.7)^5=0.8319$$

3) التوقع هو: $\mu=E(X)=np=(5)(0.3)=1.5$

4) الإنحراف المعياري: $\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{(5)(0.3)(0.7)} = \sqrt{1.05} = 1.025$

5) الدالة المولدة للعزوم: $M_X(t) = (0.7 + 0.3e^t)^5$

(8) تمارين (3 – 2):

(1) قذفت 400 قطعة عملة متزنة مرة واحدة. ماالقيمة المتوقعة والإنحراف المعياري لعدد القطع التي وجهها العلوي صورة (H) ؟.

(2) إذا كان X يتبع توزيع ذي الحدين بمتوسط 1 وتباين $2/3$ فأوجد $P(X \geq 1)$ ؟ .

(3) إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة توليد عزومه هي: $M_X(t) = \frac{1}{3^5}(2 + e^t)^5$

إذكر اسم توزيع X. وإحسب متوسطه وتباينه واكتب دالة توزيعه الاحتمالي؟

(4) إذا كان من المعلوم أن 80% من طلاب 111 إحص ينجحون. فإذا اختير بطريقة عشوائية 5 طلاب يدرسون هذا المقرر، فأوجد:

(1) احتمال أن لا ينجح أحد منهم؟ (2) احتمال أن ينجح طالبان؟ (3) احتمال أن لا ينجح طالبان؟ (4) احتمال أن ينجح طالب واحد على الأقل؟ (5) العدد المتوقع للطلبة الناجحين والانحراف المعياري لذلك؟ (6) الدالة المولدة لعزوم عدد الطلبة الناجحين؟

(5) إذا كانت نسبة إصابة الهدف لدى شخص ما هي 20% من رمياته. فإذا أُتيحت له فرصة الرماية في 10 محاولات فأوجد:

(1) احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل؟ (2) احتمال إصابة الهدف 4 مرات على الأكثر؟ (3) احتمال عدم اصابة الهدف في المحاولات العشر؟ (4) العدد المتوقع لمرات اصابة الهدف؟ ثم أوجد قيمة التباين؟ (5) الدالة المولدة للعزوم؟

(6)في تجربة إلقاء حجر نرد 360 مرة : أوجد μ و σ^2 لعدد مرات الحصول على الرقم 4؟

(7)ألقي حجر نرد 7 مرات. فإذا اعتبرنا أن النجاح هو الحصول على الرقم 1 أو 5 . فأوجد:

1. احتمال الحصول على 1 أو 5 ثلاث مرات بالضبط؟
2. احتمال الحصول على 1 أو 5 مرة واحدة على الأقل؟ (3) اكتب الدالة المولدة للعزوم؟

8. في اختبار متعدد الاجابات يتكون من 6 أسئلة وضع لكل سؤال منها 3 إجابات واحدة منها فقط صحيحة. إتخذ طالب السياسة التالية : يرمي حجر نرد متزن فإذا حصل على الرقم 1 أو 2 اختار الإجابة الأولى وإذا حصل على 3 أو 4 اختار الإجابة الثانية وخلاف ذلك يختار الإجابة الثالثة. إحسب احتمال حصول هذا الطالب :

(1) على ثلاث إجابات صحيحة فقط ؟ . (2) على إجابات كلها خطأ ؟ .

(3)على ثالث إجابة صحيحة عند السؤال السادس ؟ .

9. مصنع للآلات الحاسبة نسبة المعيب من إنتاجه هي 2%. أُرسل طرد إلى مشتري يحوي على 10000 آلة. أوجد μ و σ^2 و σ لعدد الآلات المعيبة الموجودة في الطرد؟ .

10. ألقي حجرا نرد (متزنين) معاً 40 مرة. أوجد احتمال الحصول على المجموع 5 عشر مرات فقط ؟

11. بفرض أن $X \sim b(x;n,p)$ وأن Y=n – X

1) أثبت أن $Y \sim b(y;n,q)$ ؟.

2) أوجد قيمة $\frac{E(X-E(X))^2}{n}$ ؟ .

(3-3) توزيع ذو الحدين السالب

(Negative Binomial Distribution)

(1) مقدمة:

يستخدم هذا التوزيع عندما يكون لدينا عدد من محاولات بيرنولي ونريد أن نحسب إحتمال وقوع حادثة النجاح رقم r في المحاولة رقم n. أي أننا نحدد عدد مرات النجاح الذي نريده وهو r ونود أن نعرف عدد المحاولات اللازمة للحصول على r نجاح. وهذا يعني أن عدد المحاولات اللازمة n متغير سنرمز له بالرمز X ويأخذ القيم .....,n = r, r+1,r+2 وسوف نشتق دالة كتلته الإحتمالية كما يلي:

بالرجوع مثلاً إلى تمرين 8 فقرة (3) في مجموعة تمارين (3 − 2) أعلاه ، نجد أن المطلوب هو إحتمال الحصول على ثالث إجابة صحيحة عند السؤال السادس، وهذا يعني أنه قد تم بالفعل حصول الطالب على إجابتين صحيحتين من خلال الخمسة أسئلة الأولى وذلك بإحتمال:

$$P(X=2)=\binom{5}{2}p^2q^{5-2}$$

ثم يحصل على إجابة واحدة عند السؤال السادس بإحتمال p . وحيث أن هاتين الحادثتين مستقلتان (حادثة حصول الطالب على إجابتين صحيحتين من بين الخمسة أسئلة الأولى وحادثة حصوله على إجابة صحيحة عند السؤال السادس) فإن إحتمال وقوع الحادثتين معاً (الاحتمال المطلوب) هو:

$$\begin{aligned}P(X=3)&=\binom{5}{2}p^2q^{5-2}.p\\&=\binom{5}{2}p^3q^{5-3}\end{aligned}$$

وهذا ليس توزيع ذي الحدين ! لماذا ؟ . ويمكن أن يعمم فيصبح:

$$P(X=r)=\binom{X-1}{r-1}p^rq^{X-r}$$

ومنه نحصل على التعريف التالي:

(2) تعريفه (دالة كتلته الإحتمالية):

دالة الكتلة الإحتمالية لتوزيع ذو الحدين السالب هي:

$$f(x)=\begin{cases}\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r} & , \quad x=r,r+1,r+2,.... \\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

حبث أن p و r هما معلمتا هذا التوزيع.

(3) توقعه هو:

$$\mu_X = E(X)=\frac{r}{p}$$

(4) تباينه هو:

$$\sigma_X^2=\frac{rq}{p^2}$$

(5) الدالة المولدة لعزومه هي:

$$M_X(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$$

(6) بعض العلاقات المفيدة:

في الحسابات والبراهين المتعلقة بهذا التوزيع قد نحتاج إلى هذه العلاقات:

صيغة مفكوك ذات الحدين السالب هي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-q)^r} &= (1-q)^{-r} \\ &= 1+rq+\frac{r(r+1)}{2!}q^2+........ \\ &= \sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}q^{x-r}\end{aligned}$$

(7) أمثلة:

مثال (3-3- 1):

1) أثبت أن صيغة f(x) تحقق شرطي دالة الكتلة الإحتمالية؟

2) أثبت أن متوسط توزيع ذات الحدين السالب هو $\mu_X = E(X) = \frac{r}{p}$ ؟

3) أثبت أن تباين توزيع ذات الحدين السالب هو $\sigma_X^2 = \frac{rq}{p^2}$ ؟

4) أثبت أن الدالة المولدة لعزومه هي $M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$ ؟

الحل:

(1)　f(x) تحقق شرطي دالة الكتلة الإحتمالية وذلك لأن: محقق من تعريف f(x)

$$(i) \quad f(x) \geq 0$$

$$(ii) \quad \sum_{x=r}^{\infty} f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r}$$

$$= p^r . \frac{1}{(1-q)^r} = \frac{p^r}{p^r} = 1$$

وهو المطلوب .

(2)　الإثبات:

$$E(X) = \sum x f(x)$$

$$= \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = \sum_{x=r}^{\infty} r \binom{x}{r} p^r q^{x-r} = rp^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{r} q^{x-r}$$

$$= rp^r \sum_{y=r_1}^{\infty} \binom{y-1}{r_1-1} q^{y-r_1} \qquad , \quad x = y-1, \quad r = r_1 - 1$$

$$= rp^r (1-q)^{-r_1} = \frac{rp^r}{p^{r_1}} = \frac{rp^r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p} \quad .$$

وهو المطلوب .

(3) بإستخدام الدالة المولدة للعزوم نعلم أنه:

$$\sigma_X^2 = M_X''(0) - (M_X'(0))^2$$

$$\because M_X(t) = \frac{p^r e^{rt}}{(1-qe^t)^r}$$

$$\therefore M_X'(t) = \frac{(1-qe^t)^r . p^r . re^{rt} - p^r e^{rt} . r(1-qe^t)^{r-1} . (-qe^t)}{(1-qe^t)^{2r}}$$

$$= \frac{re^{tr} p^r (1-qe^t)^{r-1}[1-qe^t - (-qe^t)]}{(1-qe^t)^{2r}}$$

$$\therefore M_X'(t) = \frac{rp^r e^{tr}}{(1-qe^t)^{2r-r+1}} = \frac{rp^r e^{tr}}{(1-qe^t)^{r+1}}$$

$$\therefore M_X''(t) = \frac{(1-qe^t)^{r+1} . rp^r e^{tr} . r - rp^r e^{tr}(r+1)(1-qe^t)^r . (-qe^t)}{(1-qe^t)^{2r+2}}$$

$$= \frac{r^2 p^r e^{tr} + rp^r e^{tr} . qe^t}{(1-qe^t)^{r+2}}$$

$$\therefore M_X'(0) = \frac{rp^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{rp^r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p} = E(X)$$

$$\therefore M_X''(0) = \frac{r^2 p^r + rp^r q}{(1-q)^{r+2}} = \frac{rp^r(r+q)}{p^{r+2}} = \frac{r^2 + pq}{p^2}$$

$$\because \sigma_X^2 = M_X''(0) - (M_X'(0))^2$$

$$\therefore \sigma_X^2 = \frac{r^2 + pq}{p^2} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2} \quad .$$

وهو المطلوب .

(4) الدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r = \frac{p^r e^{rt}}{(1-qe^t)^r}$$

البرهان:

$$M_X(t)=E(e^{Xt})=\sum e^{Xt}f(x)$$
$$=\sum_{x=r}^{\infty}e^{Xt}\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$$
$$=\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(qe^t)^x p^r q^{-r}$$
$$=p^r q^{-r}\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(qe^t)^{x-r}.(qe^t)^r$$
$$=p^r q^{-r}.q^r e^{tr}\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}(qe^t)^{x-r}$$
$$=p^r e^{rt}(1-qe^t)^{-r}=\frac{p^r e^{rt}}{(1-qe^t)^r}$$

وهو المطلوب .

ملاحظة:

في هذا التوزيع نجد أن العلاقة بين التوقع والتباين ممثلة فيما يلي:

$$\sigma_X^2=\frac{q}{p}E(X)\quad\Rightarrow\quad qE(X)=p\sigma_X^2$$

مثال(3-3- 2):

عند رمي 3 قطع من النقود المتزنة مااحتمال الحصول على حادثة أن كل القطع صور أو كلها كتابة للمرة الثانية في الرمية الخامسة؟ وما هو العدد المتوقع للرميات اللازمة والانحراف المعياري لذلك؟

الحل:

نفرض أن X يمثل عدد مرات رمي القطع حتى الحصول على نجاحين وأن r هو عدد مرات النجاح. إن النجاح هو ظهور الحادثة A حيث:

$$A=\{HHH\cup TTT\}$$
$$\therefore p=P(A)=\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}$$
$$\Rightarrow q=1-p=\tfrac{3}{4}$$
$$\because f(x)=P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$$
$$\because x=5,\quad r=2$$

$$\therefore f(5) = \binom{4}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \left(\tfrac{3}{4}\right)^3$$
$$= 0.1055$$
$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{2}{1/4} = 8 \quad \text{رميات}$$
$$\sigma_X^2 = \frac{rq}{p^2} = 2 \times 3/4 \times (4/1)^2 = 24$$
$$\sigma_X = \sqrt{24} = 4.90 \quad \text{رمية}$$

(3-4) التوزيع الهندسي

(Geometric Distribution)

(1) مقدمة:

يعتبر هذا التوزيع حالة خاصة لتوزيع ذي الحدين السالب وذلك عندما r=1 والذي يعني الحصول على أول نجاح (فحص إنتاج سلعة معينة حتى الحصول على أول سلعة تالفة،......إلخ).

وله تطبيقات في الإحصاء السكاني لدى دراسة معدلات نمو السكان ومعدلات الولادات والوفيات. وحيث أن هذا التوزيع يمثل حالة خاصة من توزيع ذي الحدين السالب لذا فإن خصائصه هي نفس خصائص توزيع ذي الحدين السالب وذلك بعد التعويض عن r=1 ، ماعدا دالة التوزيع التراكمي فلها صيغتها الخاصة، وعليه فإن:

(2) تعريفه (دالة الكتلة الإحتمالية)هي:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = pq^{x-1} \quad , \quad x = 1,2,...}$$

حيث أن $0 < p < 1$ هي معلمة هذا التوزيع والمتغير X يمثل عدد المحاولات حتى الحصول على أول نجاح.

(3) دالة التوزيع التراكمي هي:

$$\boxed{F(x) = 1 - q^x \quad , \quad x = 1,2,.....}$$

(4) توقعه هو:

$$\boxed{\mu = E(X) = \frac{1}{p}}$$

(5) تباينه هو:

$$\boxed{\sigma_X^2 = \frac{q}{p^2}}$$

(6) الدالة المولدة للعزوم هي:

$$\boxed{M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}}$$

(7) بعض المتطابقات المفيدة:

$$\sum_{x=0}^{\infty} q^x = 1 + q + q^2 + ... \quad , \quad q<1$$

$$i) \quad \sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q}$$

$$ii) \quad \sum_{x=0}^{n} q^x = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{ومنه} \quad \sum_{x=1}^{n} q^{x-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$iii) \quad \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$v) \quad \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^{x-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

(8) أمثلة:

مثال (3-4- 1):

(1) أثبت أن صيغة f(x) في التوزيع الهندسي تحقق شرطي دالة الكتلة الإحتمالية؟

(2) أثبت أن دالة التوزيع التراكمي هي: $F(x) = 1 - q^x$ ، ثم أوجد P(X>x)؟

(3) أثبت أن: $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$ ، ثم أستخدمها لإثبات أن:

$$\mu = 1/p \quad , \quad \sigma_X^2 = q/p^2$$

الحل:

1) $i) \quad f(x) \geq 0$ من التعريف

$$ii)\quad \sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = \quad p.\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

وهو المطلوب .

(2

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \le x) \\ &= \sum_{\forall x_i \le x} f(x_i) \\ &= \sum_{k=1}^{x} pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{x} q^{k-1} \\ &= p.\frac{1-q^x}{1-q} = 1-q^x \quad (\text{المطلوب} \qquad) \end{aligned}$$

$$\because P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1-(1-q^x) = q^x$$

(3

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{Xt}) = \sum e^{Xt} f(x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt} pq^{x-1} = pe^t \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt} e^{-t} q^{x-1} \\ &= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^{x-1} = pe^t.\frac{1}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{1-qe^t} \end{aligned}$$

ولإيجاد μ_X و σ_X^2 فإن:

$$M'_X(t) = \frac{(1-qe^t)pe^t - pe^t.(-qe^t)}{(1-qe^t)^2} = \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}$$

$$\therefore \mu_X = M'_X(0) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$M''_X(t) = \frac{(1-qe^t)^2 pe^t - pe^t.2(1-qe^t).(-qe^t)}{(1-qe^t)^4}$$

$$\therefore M''_X(0) = \frac{p^2.p + p.2p.q}{p^4} = \frac{p+2q}{p^2} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\because \sigma_X^2 = M''_X(0) - \left(M'_X(0)\right)^2$$
$$\therefore \sigma_X^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

مثال (3-4- 2):

إذا كان لديك الدوال التالية:

$$i) \quad f(x) = 2.(1/3)^x \quad , \quad x = 1,2,....$$
$$ii) \quad f(y) = 2/9 . (2/3)^{y-2} \quad , \quad y = 1,2,....$$

فأحسب كل من: $\mu_X, \sigma_X^2, M_X(t), \quad \mu_Y, \sigma_Y^2, M_Y(t)$

الحل:

$$i) \quad f(x) = 2.(1/3)^{x-1}.(1/3) \quad , \quad x = 1,2,....$$
$$= 2/3 .(1/3)^{x-1} \quad , \quad x = 1,2,.....$$

وهذا توزيع هندسي فيه:

$$p = 2/3 \quad , \quad q = 1/3$$
$$\therefore \mu_X = 1/p = 3/2 = 1.5$$
$$\sigma_X^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1}{3}.\frac{3^2}{2^2} = \frac{3}{4}$$
$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t} = \frac{2/3\, e^t}{1 - 1/3\, e^t} = \frac{2e^t}{3-e^t}$$

والفقرة (ii) تترك للطالب كتمرين.

(5-3) توزيع بواسون

(Poisson Distribution)

(1) المقدمة:

يعد توزيع بواسون أحد التوزيعات المتقطعة المهمة جداً في الكثير من التطبيقات الإحصائية. يستخدم هذا التوزيع لدراسة المتغيرات العشوائية التي تمثل عدد الحوادث النادرة الوقوع مثل عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة الواحدة في كتاب كبير أو عدد المكالمات التلفونية في الدقيقة الواحدة في إحدى كبائن الإتصال. أي أنه يصف عدد لانهائي قابل للعد من محاولات برنولي بإحتمال نجاح صغير.

(2) تعريفه (دالة الكتلة الإحتمالية):

يقال أن المتغير العشوائي X له توزيع بواسون إذا كانت دالة كتلته الإحتمالية f(x) والتي يرمز لها أحياناً بالرمز $P(x;\lambda)$ تعطى بالصورة:

$$\boxed{f(x) \equiv P(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & o.w \end{cases}}$$

حيث $0 < \lambda$ ثابت تمثل معلمة هذا التوزيع.

(3) دالة التوزيع التركمي هي:

$$\boxed{F(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

وتوجد جداول إحصائية تعطي قيمة هذا المجموع لقيم مختلفة لـ x و λ.

(4) توقع هذا التوزيع هو:

$$\boxed{\mu = E(X) = \lambda}$$

(5) تباين هذا التوزيع هو:

$$\boxed{Var(X) = \sigma_X^2 = \lambda}$$

لاحظ أنه في هذا التوزيع $\boxed{\mu = \sigma^2 = \lambda}$ وهي خاصية يتميز بها هذا التوزيع (المتوسط = التباين).

(6) الدالة المولدة لعزومه هي: $\boxed{M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}}$

(7) العلاقة بين توزيع بواسون والتوزع الثنائي:

يعتبر توزيع بواسون تقريب (أو نهاية) لتوزيع ذي الحدين عندما يكون عدد المحاولات n كبير جداً واحتمال النجاح p صغير جداً (نادر) بحيث يكون معدل وقوع الحوادث مقداراً ثابتاً هو $\boxed{\lambda = np}$.

أي أن $p = \frac{\lambda}{n}$. وعموماً يتحقق التقريب عندما تكون $p < 0.1$ و $n > 50$

وتزداد دقة التقريب عندما $p \to 0$ و $n \to \infty$.

(8) بعض المتطابقات المفيدة:

هذه بعض المتطابقات والعلاقات الرياضية التي تستخدم في الحسابات والبراهين المتعلقة بهذا التوزيع نذكرها هنا ليسهل الرجوع إليها:

1) $E(X^2) = E[X(X-1) + X)]$

2) $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{\lambda} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^x = 1 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x = 1$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)......(n-x+1)}{n^x} = 1$

(9) أمثلة: مثال (3-5- 1):

(1) أثبت أن f(x) تشكل دالة كتلة إحتمالية؟ (2) أثبت أن $\mu_X = \sigma_X^2$ ؟

(3) أثبت أن $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ ثم أستخدمها لحساب كلاً من μ و σ^2 ؟

(4) أثبت بطريقتين (بإستخدام f(x) و $M_X(t)$) أن التوزيع الثنائي يؤول إلى توزيع بواسون عندما تكون n كبيرة؟

الحل: (1) صيغة f(x) في هذا التوزيع تشكل توزيع إحتمالي وذلك لأن:

$i) \quad f(x) \geq 0$ (محققة من تعريف f(x))

$$ii) \quad \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \quad = \quad e^{-\lambda}.e^{\lambda} = 1$$

(2)

$$\begin{aligned}
\mu_X = E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x.f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x.\frac{\lambda^x}{x!}.e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \quad , \quad y = x-1 \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda \quad \Rightarrow \mu_X = \lambda \cdots\cdots(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\because Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \\
&\therefore E(X^2) = E[X(X-1) + X] = E[X(X-1) + E(X) \\
&\qquad = E(X(X-1)) + \lambda ....(2)
\end{aligned}$$

الحدود عندما x=0 و x=1 تساوي الصفر.

$$\therefore E[X(X-1)] = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1).\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1).\frac{\lambda^{x-2}}{x(x-1)(x-2)!}$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \quad , \quad y = x-2$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y}}{y!}$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda^2$$
$$\therefore E(X^2) = \lambda^2 + \lambda ....(2) \text{من}$$
$$\therefore \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad \Rightarrow \sigma_X^2 = \lambda \cdots\cdots (3)$$

ومن (1) و (3) نجد أن: $\mu_X = \sigma_X^2 = \lambda$ وهو المطلوب

(3) الدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_X(t) = E(e^{Xt})$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{Xt}.\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$
$$= e^{-\lambda}.e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

ولإيجاد μ و σ^2 بإستخدام $M_X(t)$ نجد أن:

$$M'_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.\lambda e^t$$
$$M''_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.\lambda e^t + \lambda e^t.e^{\lambda(e^t-1)}.\lambda e^t$$
$$= \lambda e^t.e^{\lambda(e^t-1)}[1+\lambda e^t]$$

$$\therefore \mu_X = E(X) = M'_X(0) = \lambda \Rightarrow \boxed{\mu_X = \lambda}$$

$$\mu'_X = E(X^2) = M''_X(0) = \lambda[1+\lambda] = \lambda + \lambda^2$$

$$\therefore \sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda \Rightarrow \boxed{\sigma_X^2 = \lambda}$$

(4) تقريب الثنائي إلى بواسون:

أولاً: بإستخدام دالة الكتلة الإحتمالية f(x):

$$f(x)=b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$$
$$=\frac{n(n-1).......(n-x+1)(n-x)!}{x!(n-x)!}.p^{x}\,\frac{q^{n}}{q^{x}}$$
$$=\frac{n(n-1)........(n-x+1)}{x!}.\frac{\lambda^{x}}{n^{x}}.\frac{\left(1-\lambda/n\right)^{n}}{\left(1-\lambda/n\right)^{x}}\quad,\quad\because p=\frac{\lambda}{n}\Rightarrow q=1-\frac{\lambda}{n}$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما $n\to\infty$ نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1).......(n-x+1)}{n^{x}}.\frac{\lambda^{x}}{x!}.\frac{\left(1-\lambda/n\right)^{n}}{\left(1-\lambda/n\right)^{x}}\right]$$
$$\therefore f(x)=1.\frac{\lambda^{x}}{x!}.\frac{e^{-\lambda}}{1}$$ (إنظر المتطابقات)
$$=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}=p(x,\lambda)$$

ثانياً: بإستخدام الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$:

نرمز هنا للدالة المولدة لعزوم الثنائي بالرمز $M_b(t)$ ولبواسون بالرمز $M_p(t)$

$$M_{b}(t)=(q+pe^{t})^{n}$$
$$=[q+p+pe^{t}-p]^{n}$$
$$=[1+p(e^{t}-1)]^{n}=[1+\frac{\lambda}{n}(e^{t}-1)]^{n}$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما $n\to\infty$ نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}M_{b}(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda(e^{t}-1)}{n}\right)^{n}$$
$$\therefore M_{b}(t)=e^{\lambda(e^{t}-1)}$$ من متطابقة (3)
$$=M_{p}(t)$$

مثال (3-5- 2):

مصنع للساعات 0.3% من إنتاجه معيب. إذا علم أنه يوجد صندوق يحوي على 350 ساعة من إنتاج هذا المصنع. أوجد:

(1) إحتمال أن لا يحتوي هذا الصندوق على ساعة معيبة.

(2) إحتمال وجود ساعة واحدة على الأقل معيبة في الصندوق.

(3) العدد المتوقع لعدد الساعات الميبة في الصندوق. (4) أكتب الدالة المولدة لعزوم عدد الساعات المعيبة.

الحل:

حالة الساعة من الصندوق تمثل حاولة من محاولات بيرنولي وحيث أن إحتمال الحصول عليها (إحتمال النجاح) هو: $p=\frac{0.3}{100}=0.003$ وهو عدد صغير. وحجم العينة هو n=350 وهو عدد كبير.

فإذا فرضنا أن المتغير X هو عدد الساعات المعيبة في الإنتاج.

فإن X يتبع توزيع بواسون بدالة كتلة إحتمالية هي: $x=0,1,2,......\quad,\quad f(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

حيث أن: $\lambda=np=(350).(0.003)=1.05$ وعليه فإن دالة الكتلة هنا هي:

$$f(x)=\frac{(1.05)^x}{x!}e^{-1.05}\quad,\quad x=0,1,2,\cdots$$

وعليه فإن:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad f(0)=\frac{(1.05)^0}{0!}e^{-1.05}=e^{-1.05}=0.35\\
&2)\quad P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.35=0.65\\
&3)\quad \mu_X=E(X)=\lambda=1.05\\
&4)\quad M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}=e^{1.05(e^t-1)}
\end{aligned}
$$

مثال(3-5- 3):

(1) إذا كان المعدل اليومي للحوادث المرورية في مدينة يساوي 24 حادثة، فما إحتمال وقوع حادثتين في الساعة القادمة، وكم نتوقع عدد الحوادث في تلك الساعة ؟ .

(2) في مدينة أُخرى ، بفرض أن احتمال وقوع سيارة بحادثة مرور هو 0.0005 . إستخدم التقريب لحساب إحتمال وقوع حادثتين مروريتين لـ 10000 سيارة ؟ .

الحل:

1) معدل الحوادث في الساعة هو: $\lambda = 24/24 = 1$

وبفرض أن X يمثل عدد الحوادث فإن:

$$f(x) = \frac{1^x}{x!} e^{-1}$$

$$\therefore P(X = 2) = f(2) = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0.184$$

والعدد المتوقع هو: $\mu_X = \lambda = 1$.

2) لدينا $\lambda = np = 5$, $p = 0.0005,$, $n = 10000$

$$\therefore f(x) = \binom{10000}{2} (0.0005)^2 (0.9995)^{9998} \approx \frac{5^2}{2!} e^{-5} = 0.0842$$

مثال (3-5- 4):

إذا كانت دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي X هي: $M_X(t) = e^{4(e^t - 1)}$

فما هو توزيع هذا المتغير وقيمة P(X=3) ؟ .

الحل: هذه الدالة هي دالة توليد العزوم لمتغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 4$:

$$\therefore f(x) = e^{-4} \frac{4^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,... \quad \Rightarrow \quad P(X = 3) = f(3) = \frac{e^{-4} 4^3}{3!} = 0.195$$

(10) تمارين (3-5):

(1) إذا كان X يتبع توزيع بواسون وكان $f(1) = 2f(2)$ فأحسب $f(4)$ وأكتب $M_X(t)$ ؟

(2) طُعم 2000 شخص بمصل ضد أحد الأمراض. فإذا كان إحتمال أن يعاني أي أحد منهم رد فعل سيء ضد التطعيم هو 0.001 ، فأوجد إحتمال أن يعاني رد فعل سيء في كل من حالتي تطعيم :

1) ثلاثة أشخاص. 2) شخصين فأكثر.

(3) في مجتمع ما وجد أن نسبة الذين يستخدمون يدهم اليسرى في الكتابة هي 1% فإذا تم إختيار 400 شخص بطريقة عشوائية من هذا المجمتمع فأوجد:

1) احتمال وجود 4 أشخاص على الأقل في العينة يستخدمون يدهم اليسرى.

2) العدد المتوقع من هؤلاء العُسَر في العينة.

(4) إذا كان إحتمال طباعة كلمة بشكل خاطيء هو 0.005 . فما هو إحتمال طباعة 5 كلمات على الأكثر بشكل خاطيء في مقالة بها 1000 كلمة ؟ .

(5) في إحدى المدن الأمريكية كان معدل الإصابة بمرض نقص المناعة هو حالتين لكل 1000. أخذت عينة حجمها 200 شخص من تلك المدينة. وبفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد المصابين بمرض نقص المناعة في هذه المدينة. أحسب:

1) دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير X؟ (2) إحتمال وجود شخصين على الأقل مصابين؟ 3) العدد المتوقع للأشخاص المصابين؟

(6) إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوي في أحد المدن هو 0.6 ، وبفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الزلازل في تلك الدولة، فأوجد:

1) دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير X؟ ، 2) إحتمال وقوع أكثر من 4 زلازل في السنة؟

3) التباين لعدد الزلازل؟

(7) إذا كان متوسط عدد الحوادث الأسبوعية على أحد الطرق في إحدى المدن هو 3 حوادث. وبفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الحوادث الأسبوعية في هذا الطريق. فأوجد:

1) إحتمال وقوع حادثتين في الأسبوع؟ 2) إحتمال وقوع حادثتين في اليوم؟

3) إحتمال وقوع حادثتين في الشهر؟ بإعتبار أن الشهر يضم أربعة أسابيع؟

4) إحتمال وقوع عشر حوادث في الشهر؟

(8) إذا كان هناك 300 خطأً مطبعياً موزعة عشوائياً على كتاب به 500 صفحة، فأوجد إحتمال أن يوجد بإحدى الصفحات ما يلي:

1) خطأن مطبعيان. 2) خطأن على الأكثر.

(9) تقع حوادث إصطدام في منطقة معينة بمعدل حادث واحد لكل يومين. بفرض أن المتغير X يمثل عدد الحوادث الأسبوعية. أوجد:

1) الإحتمالات المناظرة لقيم X التالية: {0,1,2,3,4,5,6}.

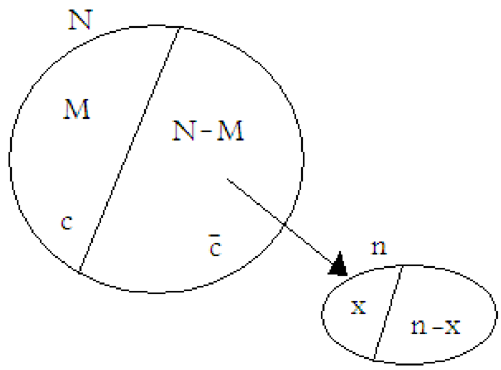
2) ما عدد الإصطدامات الأسبوعية الأكثر إحتمالاً. 3) كم يوماً في الأسبوع نتوقع أن يمر بدون إصطدامات.

(10) بفرض أن $X \sim P(x;\lambda)$ وأن P(X = 1) ضعف P(X = 2) أوجد قيمة λ ؟

(6-3) التوزيع فوق الهندسي (التوزيع الهندسي الزائدي)

(The Hypergeometric Distribution)

(1) مقدمة:



إذا كان لدينا مجتمع يحوي على عدد محدود من العناصر N، منها M من العناصر تحمل الصفة c والباقي N-M لايحمل الصفة c. وسحبت من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n، و إذا أعتبرنا أن الحصول على أي من عناصر M في العينة نجاحاً وبالتالي الحصول على أي من عناصر N-M فشلاً. وكان المتغير X يمثل عدد مرات النجاح (أي عدد عناصر M في العينة) فإننا أمام إحدى حالتين:

أ) الحالة الأولى : أن سحب العينة تم بإرجاع ، وفي هذه الحالة يكون إحتمال النجاح هو مقدار $p = \frac{M}{N}$

ثابت في جميع المحاولات وبالتالي تكون المحاولات مستقلة وهذا يعني أن X يتبع توزيع ذي الحدين الذي

سبق دراسته ومعالمه هي N و p .

ب) **الحالة الثانية** :أن سحب العينة تم بدون إرجاع ، في هذه الحالة إحتمال النجاح p ليس ثابتاً (لماذا؟)

والمحاولات غير مستقلة وبالتالي X لايتبع توزيع ذي الحدين ، وإنما توزيع آخر يسمى التوزيع فوق

الهندسي الذي سوف نشتق دالة كتلته الإحتمالية كما يلي:

(1) سحب العينة يمكن أن يتم بطرق عددها (عدد عناصر فضاء العينة) $\binom{N}{n}$

(2) والحصول على النجاح أي وقوع الحادثة {X=x} يمكن أن يتم بطرق عددها هو $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$ وبالتالي فإن:

$$P(\{X=x\}) = f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

(3) ومنه نحصل على التعريف التالي:

(2) <u>تعريفه (دالة الكتلة الإحتمالية):</u>

تعرف دالة التوزيع الإحتمالي فوق الهندسي (دالة الكتلة الإحتمالية) للمتغير X بالصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & ; \quad x = 0\ ?,1,2,......\min(M,n)(\text{لماذا} \qquad) \\ 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

ويرمز لها أحياناً بالرمز $H(x;N,M,n)$. حيث أن N و M و n أعداد صحيحة موجبة هي معالم لهذا التوزيع. ويمكن كتابة f(x) بدلالة إحتمال النجاح p وإحتمال الفشل q إذا لاحظنا أن:

$$p = \frac{M}{N} \Rightarrow \boxed{M = Np} \Rightarrow M = N(1-q) \Rightarrow \boxed{N - M = Nq}$$

وعليه فإن:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , \quad x = 0\ ?,1,2,......,\min(Np,n) \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

(3) توقعه هو:

$$\boxed{\mu = E(X) = \frac{nM}{N} = np}$$

(4) تباينه هو:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_X^2 &= Var(X) = n.\frac{M}{N}.\frac{N-M}{N}.\frac{N-n}{N-1} \\ &= npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \end{aligned}}$$

(5) ملاحظات مهمة:

(1) لاتوجد صيغة لدالة التوزيع التراكمي غير $F(x) = \sum f(x)$.

(2) يصعب إيجاد صيغة سهلة للدالة $M_X(t)$ لذا نكتفي هنا بمعرفة μ و σ^2 .

(3) يجب توخي الحذر عند إيجاد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير X (والذي يمثل عدد عناصر M في العينة) معرفة العلاقة بين n و N و M حيث أنه لايمكن أن يأخذ X قيمة أكبر من n ، إذا كانت M > n . ولايمكن أن يأخذ X قيمة أكبر من M إذا كانت n > M . أما أقل قيمة يمكن أن يأخذها X فهي max(0, n - N + M).

توضيح: قيم X عندما:

$$(i)\quad N=10,\quad M=5,\quad n=4 \Rightarrow x=0,1,2,3,4.$$
$$(ii)\quad N=10,\quad M=3,\quad n=4 \Rightarrow x=0,1,2,3.$$
$$(iii)\quad N=10,\quad M=7,\quad n=4 \Rightarrow x=1,2,3,4.$$

(4) نستخدم في الحسابات والبراهين المتعلقة بهذا التوزيع بعض العلاقات الرياضية منها:

$$(i)\quad r\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r-1}$$

$$(ii)\quad \sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}=\binom{a+b}{n}\quad ,\quad n<a+b$$

و a وb أعداد صحيحة موجبة. وبرهان هذه العلاقة كالتالي:

$$\because (1+X)^a(1+X)^b=(1+X)^{a+b}$$
$$\therefore \left(\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}x^i1^{a-i}\right).\left(\sum_{i=0}^{b}\binom{b}{i}x^i1^{b-i}\right)=\sum_{i=0}^{a+b}\binom{a+b}{i}x^i1^{a+b-i}$$
$$\Rightarrow\left[\binom{a}{0}x^0+\binom{a}{1}x^1+\binom{a}{2}x^2+.......\right]\left[\binom{b}{0}x^0+\binom{b}{1}x^1+\binom{b}{2}x^2+.......\right]$$
$$=\binom{a+b}{0}x^0+\binom{a+b}{1}x^1+\binom{a+b}{2}x^2+.........$$

وبمقارنة معامل X^n في الطرفين نجد أن:

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+.......+\binom{a}{n}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{n}$$
$$i.e\quad \sum_{i-0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}=\binom{a+b}{n}$$

(6) تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي:

نلاحظ أن متوسط التوزيع فوق الهندسي هو $\mu=np$ أي أنه يساوي متوسط الثنائي.

وعندما تكون N كبيرة و n صغيرة (يحدث هذا عادة عندما تكون النسبة $\frac{n}{N}$ أقل من 5%) نجد أن تباين التوزيع فوق الهندسي يؤول إلى تباين التوزيع الثنائي.

كما أنه في مثل هذه الحالة يكون السحب بدون إرجاع مساوياً للسحب بإرجاع تقريباً بمعنى أنه في مثل هذه الحالة يقترب التوزيع فوق الهندسي من التوزيع الثنائي، حيث نجد أن:

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_X^2 = \lim_{N\to\infty} npq\frac{N-n}{N-1}$$
$$\therefore \sigma_X^2 = npq\lim_{N\to\infty}\frac{1-{}^{n}\!/_{N}}{1-{}^{1}\!/_{N}}$$
$$= npq\times 1$$

وهو تباين التوزيع الثنائي.

وهذا يعني أن تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي يتم عندما يكون حجم المجتمع N كبير وحجم العينة n صغير (يحدث هذا عندما تكون النسبة $\frac{n}{N}$ أقل من 5%) .

(7) <u>أمثلة:</u>

<u>مثال (3-1-6):</u>

أ. أثبت أن صيغة f(x) تحقق شرطي دالة الكتلة الإحتمالية؟ ب. أثبت أن متوسط التوزيع فوق الهندسي هو $\mu = np$ ؟

<u>الحل:</u> (أ) من تعريف f(x) نجد أن $f(x)\ge o$. و الآن نبرهن أن $\sum f(x)=1$ كالتالي:

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=0}^{n}\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{N}{n} = 1$$

(ب)

$$\mu = E(X) = \sum xf(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x.\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=0}^{n} x.\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n} M.\binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}$$

$$= M.\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n}\binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}$$

$$= nM.\frac{1}{n\binom{N}{n}}.\binom{N-1}{n-1} = \frac{nM}{N}.\frac{1}{n\binom{N}{n}}.N\binom{N-1}{n-1}$$

$$= n.\frac{M}{N} = np$$

مثال (3-2-6):

أعلنت وزارة الصحة عن عزمها على إبتعاث ثلاثة أشخاص لدراسة طب الأسنان فتقدم للبعثة 6 أشخاص من مستشفيات الوزارة و 4 أشخاص من كلية طب الأسنان. وعندالاختيار وجد أنهم جميعا متساوون في المؤهل والخبرة فتم الاختيار بطريقة عشوائية. فإذا كان المتغير X يمثل عدد المتقدمين من كلية الطب في البعثة، فأوجد :

(1) دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير X ؟ (2) أحسب كل من σ_X^2 , $E(X)$.

(3) احتمال عدم وجود شخص من كلية الطب في البعثة؟

(4) احتمال وجود شخص واحد على الأقل من كلية الطب في البعثة؟

الحل: لدينا N=10, M=4, n=3 وعليه فإن :

(1) دالة الكتلة الإحتمالية هي :

$$f(x)=\frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}} \quad , \quad x=0,1,2,3$$

(2)

$$E(X)=n.\frac{M}{N}=3.\frac{4}{10}=1.2$$
$$\sigma_X^2=n.\frac{M}{N}.\left(1-\frac{M}{N}\right).\frac{N-n}{N-1}=3.\frac{4}{10}.\frac{6}{10}.\frac{7}{9}=\frac{56}{100}=0.56$$

(3) المطلوب هو P(X = 0):

$$P(X=0)=f(0)=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{6!}{3!.3!}\times\frac{3!.7!}{10!}=\frac{1}{6}$$

(4) المطلوب هو $P(X\geq 1)$:

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-f(0)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

مثال (3-6- 3):

تاجر يشتري مصابيح كهربائية معبأة في صناديق، يحتوي كل صندوق على 30 مصباحاً. وقبل أن يشتري أي صندوق يقوم بفحص 4 مصابيح يختارها بطريقة عشوائية من ذلك الصندوق فإذا وجد مصباحاً واحداً على الأقل معيباً رفض الصندوق. بفرض أن الصندوق به 3 مصابيح معيبة أحسب ما يلي:

1) إحتمال قبول الصندوق؟ 2) نسبة الصناديق التي يرفضها هذا التاجر؟

3) إحتمال الحصول على 4 مصابيح معيبة؟

الحل:

بفرض أن X يمثل عدد المصابيح المعيبة في العينة: $\therefore$ X له توزيع فوق هندسي معالمه هي $N = 30, \quad M = 3, \quad n = 4$ $\therefore$ دالة الكتلة الإحتمالية لـ X هي:

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{27}{4-x}}{\binom{30}{4}} \quad , \quad x = 0,1,2,3$$

1. المطلوب هو $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{27}{4}}{\binom{30}{4}} = \frac{130}{203} = 0.64$$

2. النسبة المطلوبة ما هي إلا إحتمال الرفض أي $P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.64 = 0.36$$

$\therefore$ النسبة المطلوبة هي 36%.

3. المتغير X لا يمكن أن يأخذ القيمة 4 (لماذا ؟) أي أن: $P(X = 4) = P(\phi) = 0$

(8) تمارين (3-6):

(1) يشتري شخص محولات كهربائية في علب يحتوي كلاً منها 20 محولاً، بشرط أن يفحص 4 محولات من كل علبة يختارها بشكل عشوائي. فإذا كانت جميع المحولات الأربع سليمة قبل العلبة وإلا فإنه يرفضها. فإذا افترضنا أن أي محول يكون معيباً بإحتمال 0.1 وبشكل مستقل عن بقية المحولات، فما هي نسبة العلب التي يتم رفضها من قبل هذا المشتري؟ وما العدد المتوقع للمحولات المعيبة في العينة التي يفحصها؟

(2) صندوق به 100 تفاحة منها 30 فاسدة، أختير أربع تفاحات من هذا الصندوق بطريقة عشوائية. فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد التفاحات الفاسدة في العينة. فأحسب $P(X = 2)$ بإستخدام التوزيع فوق الهندسي ثم بإستخدام التوزيع الثنائي وقارن بين الناتجين؟

(7-3) تمارين عامة على الفصل الثالث

1) تلقى زهرتا نرد متزنتان عدة مرات حتى يتم الحصول على المجموع 7، فإذا كان المتغير X يمثل عدد الرميات اللازمة. فأوجد: (1) إحتمال الحصول على المجموع 7 في رابع رمية. (2) إحتمال الحصول على المجموع 7 بعد أربع رميات على الأقل. (3) العدد المتوقع للرميات اللازمة حتى الحصول على المجموع 7. (4) الإنحراف المعياري للرميات اللازمة حتلا الحصول على المجموع 7. (5) الدالة المولدة لعوزم المتغير X (المطلوب كتابة الدالة فقط).

2) في السؤال السابق: إذا كان المتغير Y يمثل عدد مرات الحصول على مجموع يساوي 5 أو 6 ، فأوجد احتمال الحصول على هذا المجموع : (1) لأول مرة في الرمية الثالثة.

(2) ثلاث مرات خلال 6 رميات. (3) للمرة الثالثة في الرمية الخامسة.

3) (أ) نسبة القطع المعيبة في سلعة ما هي 10%. قررنا فحص كل قطعة فإذا كانت سليمة أدخلت إلى المخزن وإلا رفضناها. بفرض أن المتغير X يمثل عدد الفحوصات اللازمة لأول رفض، المطلوب:

1.إحسب قيمة $P(X = 4)$ و $P(X > 10)$،2. ما هو شكل الدالة المولدة لعزوم المتغير X.

(ب) لديك الدالة المولدة لعزوم المتغير Y: $M_Y(t) = \dfrac{4}{7e^{-t} - 3}$ ، إحسب $P(Y = 3)$.

4) يصوب شخص بندقيته على هدف معين ، إذا كان معلوم لدينا من خبرة سابقة أنه يصيب هدفه باحتمال 0.5 ، المطلوب :

(1)ما هو احتمال أن يصيب الهدف لأول مرة في المحاولة الخامسة ؟

(2)ما هو احتمال أن يصيب الهدف لثالث مرة في المحاولة الخامسة ؟

(3)ما هو العدد المتوقع والتباين لعد المحاولات اللازمة لإصابة الهدف في الحالتين السابقتين؟

5) اكتب دوال الكتلة الإحتمالية مع ذكر إسم التوزيع المقابل وتوقعه وتباينه (باستخدام المعالم) لما يلي :-

$$(i)\ M_X(t)=\frac{e^t}{4-3e^t}\qquad (ii)\ M_X(t)=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}(3e^t+1)^{10}\qquad (iii)\ M_X(t)=e^{-2(1-e^t)}$$

6) أ - يضمن أحد أصحاب مصنع قطع غيار معينة للسيارات ألا يحتوي أي صندوق من صناديق هذه القطع على أكثر من قطعتين معيبتين، وكان كل صندوق يحتوي على **10** قطع. كذلك دلت التجربة على أن طريقة التصنيع التي يتبعها المصنع تنشأ عنها نسبة من القطع المعيبة قدرها **2%** من القطع المصنعة. أوجد أن يحقق صندوق من إنتاج المصنع يتم اختياره بشكل عشوائي الضمان المذكور.

ب - إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي $M_X(t)=\frac{1}{27}(e^t+2)^3$ فاحسب الاحتمال $P(X>1)$.

7) أ- إذا كان عدد الجزيئات X المشعة من مصدر إشعاعي يتبع توزيع بواسون وكان $p(X=0)=\frac{1}{3}$ فما احتمال إشعاع جزئيين فأكثر .

ب- إذا كان احتمال إصابة الهدف بواسطة إحدى منصات إطلاق الصواريخ هو 0.9 . تم إطلاق عدة صواريخ من هذه المنصة ,أوجد :

❶ احتمال إصابة الهدف للمرة الأولى بالصاروخ الرابع. ❷ احتمال إصابة الهدف للمرة الثالثة بالصاروخ الخامس.

ج- قطفنا من مزرعة 20 ثمرة فكان من بينها ثمرتين غير ناضجتين . ملأنا عشوائياً من هذا الثمر صندوقاً يتسع لخمس ثمرات . ما احتمال أن يحوي هذا الصندوق ثمرة غير ناضجة ؟

الفصل الرابع

التوزيعات الإحتمالية المتصلة

(Continuous Probability Distributions)

(1-4) التوزيع المنتظم المستمر: Continuous Uniform Ditribution :

(1) تعريفه (دالة الكثافة الإحتمالية) هي:

يقال أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم على الفترة (a , b) إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية هي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & , \quad a\le X\le b\\[2ex] 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

حيث a < b عددان حقيقيان هما معلمتا هذا التوزيع.

ويسمى هذا التوزيع أحياناً بالتوزيع المستطيل Rectangular Distribution نظراً لأن مخطط دالة كثافته يأخذ الشكل المستطيل، وتتوزع قيم المتغير بشكل متساوٍ على الفترة

(a , b) . مما يجعل إحتمال وقوع X داخل أي فترة يتناسب مع طول هذه الفترة وكذلك يساوي إحتمال أي فترة أخرى مساوية لها في الطول. وأهم إستخداماته هي تكوين جداول الأعداد العشوائية.

(2) دالة توزيعه التراكمية هي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<a\\[1ex] \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a\le x<b\\[1ex] 1 & , \quad b\le x\end{cases}$$

(3) توقعه هو:

$$\boxed{\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

نلاحظ أن الوسيط يساوي المتوسط حيث أن $med = E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ الوسيط.

(4) تباينه هو:

$$\boxed{\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

(5) الدالة المولدة لعزومه هي:

$$\boxed{M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \quad , t > 0}$$

ولصعوبة التعامل مع هذه الدالة لوجود t في المقام فإنه كثيراً ما نستخدم العلاقة التالية لتوليد العزوم:

$$\boxed{\mu'_r = E(X^r) = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)(b-a)} \quad , \quad r = 1,2,....}$$

إن هذا التوزيع رغم بساطته إلا أنه مهم جداً في الإحصاء، حيث أن المتغير Y=F(x) يتبع توزيع منتظم على الفترة (0 , 1) لأي دالة توزيع F(x) إذا كان X متصلاً. وهذه الحقيقة تستخدم على نطاق واسع في الإحصاء وخاصة في توليد الأرقام العشوائية.

(6) أمثلة:

مثال (4-1-1):

(1) أثبت أن $\int_a^b f(x)dx = 1$. (2) استنتج صيغة F(x) .

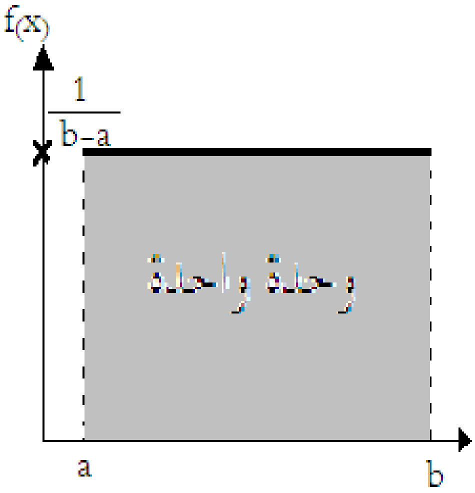
(3) أثبت أن $\mu_X = E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ وأن $\sigma_X^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

(4) استنتج صيغة $M_X(t)$ والصيغة الدورية لـ μ_r' .

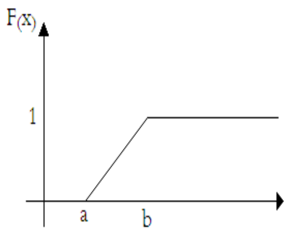
الحل:

1) الإثبات:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}[x]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$



(2



$$F(x) = P(X \le x)$$

$$= \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}[t]_a^x$$

$$= \frac{x-a}{b-a} \quad , a \le x \le b \quad .$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \le a < b \\ 1 & , b \le x \end{cases}$$

(3

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{3(b-a)}(b^3-a^3)$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\because \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\therefore \sigma_X^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad = \quad \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

لاحظ أن قيمة التباين تزداد كلما زادت قيمة b-a ، أي كلما كبرت الفترة (a , b).

4) الدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_X(t) = E(e^{Xt})$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{xt} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{xt}}{t}\right]_a^b = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

الصيغة الدورية لـ μ'_r :

$$\because \mu'_r = E(X^r)$$

$$\therefore E(X^r) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^r dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}$$

$$= \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \quad \Rightarrow \quad \mu'_r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(r+1)(b-a)}$$

مثال (4-2-1):

إذا كان X يتبع توزيعاً منتظماً مستمراً على الفترة (a , a-) حيث a > 0 ،

فأوجد قيمة a بحيث يكون: $P(X > 1) = 1/3$ ؟

الحل: واضح أن :

$$f(x) = \frac{1}{a-(-a)} = \frac{1}{2a} \quad , \quad -a < x < a$$

$$\therefore P(X > 1) = \int_1^a \frac{1}{2a}dx = \frac{1}{2a}[x]_1^a = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2a}(a-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a - 3 = 2a \Rightarrow a = 3$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{6} \quad , \quad -3 < x < 3$$

مثال (4—3-1):

متغير عشوائي X له دالة الكثافة الإحتمالية التالية: $f(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad -1 < x < 1$

(1) أكتب دالة التوزيع التراكمي ثم أرسمها؟.

(2) إحسب كلاً من μ_X و σ_X^2 بإستخدام صيغها؟

(3) أكتب الدالة المولدة للعزوم؟. (4) إستخدم صيغة $E(X^r)$ لإيجاد μ_X و σ_X^2؟

(5) قارن بين قيمتي الإحتمالين: $P(-3/4 < x < -1/2)$ & $P(0 < x < 1/4)$ ؟.

الحل: (1) لدينا b= 1 , a= -1

$$\because F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ \dfrac{x-(-1)}{2} & , \quad -1 \le x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \le x \end{cases}$$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-1 \\ \dfrac{x+1}{2} & , \quad -1\le x<1 \\ 1 & , \quad 1\le x \end{cases}$$

(2

$$\mu_X=\frac{a+b}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$$
$$\sigma_X^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(1-(-1))^2}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

3) الدالة المطلوبة هي:

$$M_X(t)=\frac{e^{tb}-e^{at}}{t(b-a)}=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2t}$$

(4

$$\mu_r'=E(X^r)=\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(r+1)(b-a)}=\frac{1-(-1)^{r+1}}{2(r+1)}$$
$$\therefore \mu_1'=E(X)=\frac{1-(-1)^2}{4}=\frac{1-1}{4}=\frac{0}{4}=0$$
$$\mu_2'=E(X^2)=\frac{1-(-1)^3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\therefore \sigma_X^2=E(X^2)-(E(X))^2=1/3-0=1/3$$

وهي نفس القيم التي توصلنا إليها سابقاً.

(5

$$P(0<x<1/4)=\int_0^{1/4} f(x)dx=\int_0^{1/4}\frac{1}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}[x]_0^{1/4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(-\tfrac{3}{4} < x < -\tfrac{1}{2}) = \int_{-3/4}^{-1/2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[x\right]_{-3/4}^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right] = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

نلاحظ أن القيمتين متساويتين. وذلك لأن كلا منها هو إحتمال حادثتين على فترتين لهما نفس الطول = ¼.

مثال (4—4-1):

محطة حافلات تصل إليها حافلة كل 15 دقيقة إبتداءاً من الساعة السابعة صباحاً. إذا وصل أحد الركاب إلى المحطة بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصف ، أوجد إحتمال أنه سينتظر:

(1) 5 دقائق فأقل قبل أن يركب الحافلة. (2) 10 دقائق فأكثر قبل أن يركب الحافلة.

(3) إحسب الوقت المتوقع للإنتظار قبل ركوب الحافلة.

الحل:

نفرض أن المتغير X يمثل زمن الإنتظار إبتداءاً من الصفر إلى 15 أو بين 15 إلى 30 . أي بين السابعة والسابعة والنصف صباحاً. أما حركة الحافلات فهي وصول الحافلة الأولى الساعة السابعة والتي تليها تصل الساعة 7:15 ثم 7:30 ...وهكذا.

1) لدينا فترتين الإحتمال فيها متساوية وهما:

$$a_1 = 0 \quad , \quad b_1 = 15 \quad \& \quad a_2 = 15 \ , \ b_2 = 30$$

ونأخذ الفترة الأولى للحل فيكون المطلوب هو: $P(X \le 5)$

$$\therefore P(X \le 5) = F(5) = \frac{5-0}{15-0} = \frac{1}{3}$$

2) المطلوب هو $P(X \ge 10)$:

$$\therefore P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 10) \quad = \quad 1 - \frac{10-0}{15-0} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

3) المطلوب E(X):

$$\therefore E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+15}{2} = 7.5$$

مثال (1-5-4):

إذا كان المتغير X يتبع التوزيع المنتظم المتصل على الفترة $\left({}^{1}\!/_{2}, {}^{3}\!/_{2}\right)$. فأحسب كلاً من:

$$f(x), \quad F(x), \quad M_X(t), \quad P(1 \leq X \leq 2)$$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{{}^{3}\!/_{2} - {}^{1}\!/_{2}} = 1 \quad , \quad {}^{1}\!/_{2} < x < {}^{3}\!/_{2}$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} = x - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < {}^{1}\!/_{2} \\ x - {}^{1}\!/_{2} & , \quad {}^{1}\!/_{2} \leq x \leq {}^{3}\!/_{2} \\ 1 & , \quad x \geq {}^{3}\!/_{2} \end{cases}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} = \frac{e^{{}^{3}\!/_{2}t} - e^{{}^{1}\!/_{2}t}}{t}$$

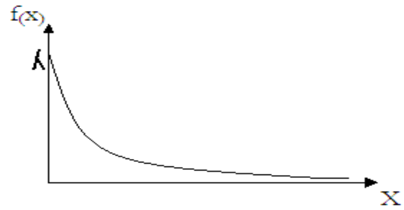
$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= F(2) - F(1) \\ &= 1 - (1 - {}^{1}\!/_{2}) = {}^{1}\!/_{2} \end{aligned}$$

لاحظ أن الإحتمال هنا لايمكن حسابه من العلاقة $\int_{1}^{2} f(x)dx$ (لماذا ؟)

(2-4) التوزيع الأُسِي: (Exponential Distribution)

(1) تعريفه (دالة كثافته الإحتمالية) هي:

نقول أن المتغير العشوائي المتصل X يتبع التوزيع الأسي إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية هي:



$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

حيث أن $\lambda>0$ وهو عدد حقيقي تعتبر معلمة هذا التوزيع.

يستخدم هذا التوزيع لوصف المتغيرات التي تمثل أعمار بعض السلع...... . أو الوقت اللازم من البداية حتى حدوث حادثة معينة (وقت الإنتظار) .

(2) دالة التوزيع التراكمي هي:

$$F(x)=P(X\le x)=1-e^{-\lambda x} \qquad , \quad x\ge 0$$

يمكن أن نكتبها كالتالي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & , \quad x\ge 0\end{cases}$$

والإحتمال المكمل $P(X > x)$ مهم ، وله تطبيقات كثيرة ويرمز له بالرمز $\overline{F}(x)$. أي أن:

$$\overline{F}(x)=P(X>x)=e^{-\lambda x}$$

ويعبر مثلاً عن إحتمال أن يبقى الجهاز يعمل لمدة أكبر من x . لذا يطلق عليه (توزيع الحياة).

(3) توقعه هو:

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

(4) تباينه هو:

$$\boxed{\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

(5) الدالة المولدة لعزومه هي:

$$\boxed{M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}} \quad , \quad t < \lambda$$

(6) خاصية نقص الذاكرة (Lack of memory):

خاصية فقدان الذاكرة يتميز بها التوزيع الأسي. ويعبر عن هذه الخاصية إحتمالياً بالصيغة التالية:

$$\boxed{P(X > x + y | X > x) = P(X > y)}$$

(7) ملاحظات مهمة:

(1)
$$\boxed{P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$$

(2) الدالة المولدة للعزوم:
$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad , \quad t < \lambda$$

ويمكن كتابتها كما يلي:
$$M_X(t) = \frac{1}{1 - t/\lambda} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \quad , \quad t/\lambda < 1$$

وهو عبارة عن مجموع متوالية هندسية لانهائية. أي أن:

$$M_X(t) = \left(1 - t/\lambda\right)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{\lambda^r}\cdot\frac{r!}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{r!}{\lambda^r}\cdot\frac{t^r}{r!}$$

ومنه نجد أن:
$$\boxed{\mu_r' = E(X^r) = \frac{r!}{\lambda^r}}$$

حيث أن μ_r' هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في مفكوك $M_X(t)$.

(3) في البراهين والحسابات الخاصة بهذا التوزيع قد تحتاج لبعض العلاقات الرياضية منها:

$$i) \quad \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a}$$ (تعميم دالة جاما)

$ii)\quad \int UdV = UV - \int VdU$ (التكامل بالتجزيئ)

(8) أمثلة:

مثال (4-1-2):

في التوزيع الأسي أثبت أن:

(1) $\int_0^\infty f(x) = dx = 1$ ، (2) $x \ge 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ،(3) $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$

(4) $\sigma_X^2 = 1/\lambda^2$ & $\mu_X = 1/\lambda$, (بإستخدام f(x) ثم بإستخدام $M_X(t)$).

(5) $M_X(t) = \lambda(\lambda - t)^{-1}$ ، (6) lack of memory ، (7) $F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

الحل:

$$1)\quad \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{-\lambda}{\lambda}(0-1) = 1$$

$$2)\quad F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)dt = \lambda\int_0^x e^{-\lambda t}dt$$

$$= \frac{-\lambda}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left[e^{-\lambda x} - 1\right] = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$3)\quad \bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

4) أولاً: إيجاد E(X) و σ_X^2 بإستخدام f(x):

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \lambda\frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx = \lambda.\frac{\Gamma(3)}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$$

ثانياً: إيجاد E(X) و σ_X^2 بإستخدام $M_X(t)$:

$$M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}=\lambda(\lambda-t)^{-1}$$
$$\therefore M'_X(t)=\lambda(-1)(\lambda-t)^{-2}(-1)=\lambda(\lambda-t)^{-2}$$
$$\therefore E(X)=M'_X(0)=\lambda.\lambda^{-2}=\lambda^{-1}=\frac{1}{\lambda}$$

$$M''_X(t)=\lambda.-2(\lambda-t)^{-3}.-1=2\lambda(\lambda-t)^{-3}$$
$$\therefore M''_X(0)=2\lambda\lambda^{-3}=\frac{2}{\lambda^2}$$
$$\because \sigma_X^2=M''_X(0)-(M'_X(0))^2$$
$$\therefore \sigma_X^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

5) $M_X(t)=E(e^{Xt})=\int_0^\infty e^{Xt}.\lambda e^{-\lambda x}dx$
$$=\lambda\int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)}dx=\lambda\frac{\Gamma(1)}{(\lambda-t)^1}=\frac{\lambda}{\lambda-t}=\lambda(\lambda-t)^{-1}$$

6) lack of memory (*)

$$P(X>x+y\mid X>x)=P(X>y)$$
$$L.H.S=P(X>x+y\mid X>x)=\frac{P(\{X>x+y\}\cap\{X>x\})}{P(X>x)}$$
$$=\frac{P(X>x+y)}{P(X>x)}=\frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}}=\frac{e^{-\lambda x}.e^{-\lambda y}}{e^{-\lambda x}}$$
$$=e^{-\lambda y}=P(X>y)=R.H.S$$

7) $\because P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$
$$\therefore F(b)-F(a)=(1-e^{-\lambda b})-(1-e^{-\lambda a})$$
$$=1-e^{-\lambda b}-1+e^{-\lambda a}=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}\ .$$

(*) يمكن تفسير خاصية فقدان الذاكرة للتوزيع الأسي كما يلي:

نفرض أن لدينا آلتين أحدهما جديدة (عمرها التشغيلي صفر) والأخرى قديمة (عمرها التشغيلي x) فإذا كان عمرها التشغيلي متغير عشوائي X يتبع التوزيع الأسي فإن إحتمال أن تظل الآلة القديمة تعمل لمدة أكبر من y بعد أن عملت لمدة x يتساوى مع إحتمال أن تعمل الآلة الجديدة لمدة أكبر من y.

مثال (4-2-2):

إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع تتبع توزيع أسي بمتوسط 1500 ساعة. وأخذ بطريقة عشوائية أحد المصابيح من إنتاج هذا المصنع فأوجد:

(1) إحتمال أن يعيش هذا المصباح أكثر من 3000 ساعة.

(2) إحتمال أن يحترق هذا المصباح خلال 150 ساعة من الإشتعال.

(3) إحتمال أن يعيش هذا المصباح 1200 ساعة أخرى بعد أن عاش أكثر من 300 ساعة.

(4) بفرض أن المتغير X يمثل عمر المصباح بالساعات من هذا الإنتاج فأوجد كل من $M_X(t) \quad \sigma_X^2, \quad E(X)$

الحل: لدينا:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = 1500 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1500}$$

$$\therefore\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{1500} e^{\frac{-x}{1500}} \quad , \quad x \geq 0$$

1) المطلوب هو P(X>3000):

$$\because P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

$$\therefore P(X > 3000) = e^{-\frac{3000}{1500}} = e^{-2} = 0.135$$

2) يحترق المصباح خلال 150 ساعة من استعماله، يعني أن عمره لا يزيد عن 150 ساعة فيكون المطلوب:

$$P(X \le 150) = F(150) = 1 - e^{-\frac{150}{1500}} \quad = \quad 1 - e^{-0.1} = 1 - 0.9 = 0.1$$

3) هذه تطبيق على خاصية نقص الذاكرة ، حيث أن المطلوب هو:

$$P(X > 300 + 1200 | X > 300)$$

$$\therefore P(X > 1500 | X > 300) = \frac{P(X > 1500)}{P(X > 300)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1500}{1500}}}{e^{-\frac{300}{1500}}} = \frac{e^{-1}}{e^{-0.2}} = e^{-0.8} = 0.45$$

ولتحقيق خاصية نقص الذاكرة نجد أن:

$$P(X > 1200) = e^{-\frac{1200}{1500}} = e^{-\frac{4}{5}} = e^{-0.8} = 0.45$$

أي أن: $P(X > 300 + 1200 | X > 300) = P(X > 1200)$

مثال (4-3-2):

إذا كان المتغير العشوائي X الذي يمثل طول الفترة التي تستغرقها مكالمة هاتفية مقدرة بالدقائق ، له دالة الكثافة الإحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-\frac{x}{5}} & , \quad x \ge 0, \quad \text{ثابت} \quad a \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

(1) أوجد قيمة الثابت a، (2) مااحتمال أن تستمر مكالمة هاتفية:

(أ) أقل من 5 دقائق ، (ب) أكثر من 10 دقائق ، (ج) بين 5 إلى 10 دقائق

(3) إحسب التوقع والإنحراف المعياري لطول المكالمة الهاتفية، (4) أكتب الدالة المولدة لعزوم X.

الحل:

1) من تعريف f(x) في المثال وبمقارنته مع دالة الكثافة الأسية نجد أن: $a = \lambda = \frac{1}{5}$

أو يمكن حسابه من حقيقية أن:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \int_0^{\infty} ae^{-\frac{x}{5}}dx = a\left[\frac{e^{-\frac{x}{5}}}{-\frac{1}{5}}\right]_0^{\infty} = -a5\left[e^{-\frac{x}{5}}\right]_0^{\infty} = -a5[0-1] = a5$$

$$\therefore a5 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

2) (أ) المطلوب P(X < 5):

$$P(X < 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{1}{5}(5)} = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632.$$

(ب) المطلوب P(X > 10):

$$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{5}(10)}) = e^{-2} = 0.135.$$

(ج) المطلوب P(5 < X < 10):

$$P(5 < X < 10) = F(10) - F(5) = e^{-1} - e^{-2} = 0.368 - 0.135 = 0.233.$$

(3

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow E(X) = 5 \quad , \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma_X^2 = 25 \Rightarrow \sigma_X = 5$$

4) الدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}\Rightarrow M_X(t)=\frac{1/5}{1/5-t}=\frac{1}{1-5t}\ .$$

لاحظ أن:

$$M'_X(t)=-1(1-5t)^{-2}(-5)$$
$$\therefore M'_X(0)=-1(-5)=5=E(X)$$

(3-4) التوزيع الطبيعي: (Normal Distribution)

(1) المقدمة:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الإحتمالية في علم الإحصاء وذلك لأن أغلب المتغيرات في الحياة العملية تتبع توزيعاً طبيعياً ، مثل الأطوال والأوزان والأعمار ودرجات الحرارة وغير ذلك. كما أن بعض المتغيرات التي لا ينطبق توزيعها تماماً على التوزيع الطبيعي يمكن تقريب توزيعها إلى التوزيع الطبيعي بدرجة معقولة من الدقة.

(2) تعريفه (دالة الكثافة الإحتمالية):

المتغير العشوائي المتصل X يكون له التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية على الصورة:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\qquad ,\quad -\infty<x<\infty}$$

حيث أن:

$$\pi=3.1416\quad ,\quad -\infty<x<\infty\quad ,\quad 0<\sigma<\infty$$

ولأن μ و σ هما معلمتا هذا التوزيع فإنه في كثير من الأحيان يستخدم الرمز $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ للدلالة على أن المتغير X له توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2. فمثلاً:

& $\sigma_X^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \sigma_X = 6$

$X \sim N(4,36) \quad \Rightarrow \quad \mu = E(X) = 4$

(3) دالة توزيعه التراكمي هي:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt}$$

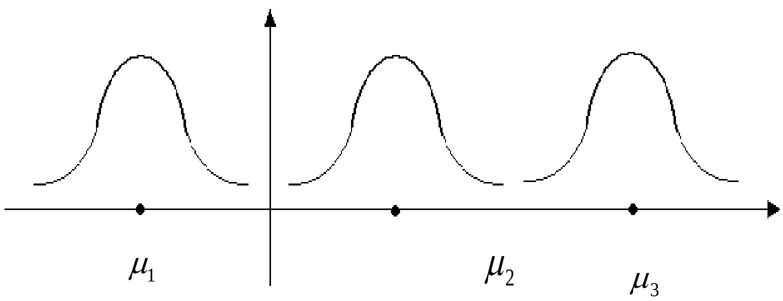
(4) دالة توليد عزومه هي:

$$\boxed{M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

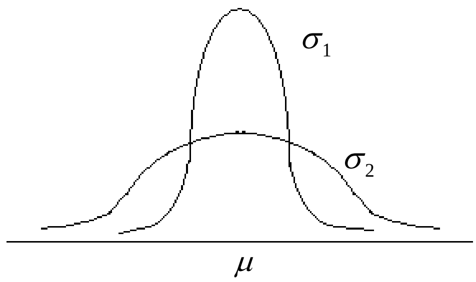
(5) بعض خواص التوزيع الطبيعي:

(1) توقعه هو : $E(X) = \mu$

وهو يحدد مكان التوزيع وذلك لأن التوزيع الطبيعي متناظر حول العمود على محور X المار من μ. لذا فإن لمنحنى هذا التوزيع قمة واحدة وهذا يعني أنه للتوزيع الطبيعي نجد أن : (المتوسط = المنوال = الوسيط).



(2) تباين هذا التوزيع هو σ^2 ويبين تشتت قيم X حول μ



(3) المساحة تحت المنحنى الطبيعي تساوي واحد. أي أن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(4) صيغة f(x) المذكورة في التعريف تمثل عدد لانهائي من المنحنيات الطبيعية حيث كل قيمة لـ μ و σ تعطي منحنياً واحداً للدالة f(x). (وهذه الخاصية موجودة لكل التوزيعات المتقطعة والمستمرة السابقة. لماذا؟).

(5) أي دالة خطية في متغير له توزيع طبيعي هي متغير له توزيع طبيعي أيضاً.

(6) أمثلة:

مثال (4-1-3): في التوزيع الطبيعي أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ؟

الحل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نضع $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\Rightarrow dz = \frac{dx}{\sigma} \quad \therefore I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{dx}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad , z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow dz = \frac{dx}{\sigma}$$

$$\therefore I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

(لأن $e^{-\frac{z^2}{2}}$ دالة زوجية أي متماثلة حول الصفر)

نضع الآن $N=\dfrac{z^2}{2}$:

$$\Rightarrow Z=\sqrt{2N} \qquad \Rightarrow \quad dz=\frac{1}{2}(2N)^{-\frac{1}{2}}2dN=\frac{dN}{\sqrt{2N}} \quad .$$

$$\therefore I=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\int_0^{\infty} N^{-\frac{1}{2}}e^{-N}dN \qquad (*)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(1/2)}{1^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=1$$

(*) إستخدمنا العلاقة:

$$\int_0^{\infty} y^{a-1}e^{-by}dy=\frac{\Gamma(a)}{b^a} \qquad , \quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

مثال (4-2-3):

بإستخدام $M_X(t)$ للمتغير الطبيعي أثبت أن: $Var(X)=\sigma_X^2 \quad , \quad E(X)=\mu$

الحل:

$$\because M_X(t)=e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad , \quad \therefore M'_X(t)=e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}.(\mu+\sigma^2 t)$$

$$M''_X(t)=e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}.(\sigma^2)+(\mu+\sigma^2 t).e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.(\mu+\sigma^2 t)$$

$$E(X)=M'_X(0)=1\times(\mu+0)=\mu \quad \Rightarrow E(X)=\mu$$

$$M''_X(0)=1\times\sigma^2+(\mu)\times 1\times(\mu)=\sigma_X^2+\mu^2$$

$$\because Var(X)=M''_X(0)-(M'_X(0))^2$$

$$=\sigma_X^2+\mu^2-\mu^2=\sigma_X^2 \qquad \therefore Var(X)=\sigma_X^2$$

مثال (4-3-3):

إذا كان $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ وكان Y = aX +b فأثبت أن $Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

الحل:

$$\because M_X(t) = e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$
$$\therefore M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$
$$= e^{bt}.e^{\mu at + \frac{a^2t^2\sigma^2}{2}} = e^{bt + \mu at + \frac{a^2t^2\sigma^2}{2}} = e^{(a\mu + b)t + \frac{a^2t^2\sigma^2}{2}}$$

وهذه دالة مولدة لعزوم متغير طبيعي متوسطه هو $a\mu + b$ (معامل t) وتباينه هو $a^2\sigma^2$ (معامل $\frac{t^2}{2}$) .

ملاحظة هامة :

من هذا المثال نجد أن أي دالة خطية Y = aX +b في متغير X له توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 لها توزيع طبيعي بمتوسط $a\mu + b$ وتباين $a^2\sigma^2$. (أي أن $(Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

(4-4) التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) :

(Standard Normal Distribution):

(1) المقدمة:

هذا التوزيع هو أحد أفراد عائلة التوزيعات الطبيعية. فيه $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ وله جداول إحصائية يمكن حساب الإحتمالات منها. كما يمكن تحويل جميع التوزيعات الطبيعية إليه وذلك بتحويل المتغير X إلى المتغير القياسي (المعياري) بإستخدام العلاقة:

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}}$$

حيث أن: $E(Z) = 0 \quad , \quad \sigma_Z^2 = 1$

(2) تعريفه (دالة الكثافة الإحتمالية):

بعد معايرة المتغير X نجد أن دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير الجديد Z تكون بالصيغة التالية:

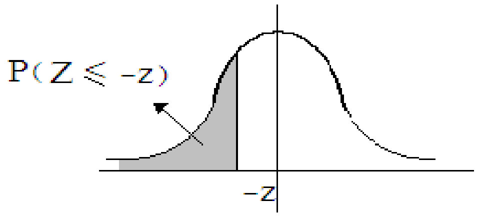
$$\boxed{f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad , \quad -\infty<z<\infty}$$

(3) دالة توزيعه التراكمية هي:

دالة التوزيع التراكمي للمتغير الطبيعي القياسي هي:

$$\boxed{F(z)=P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

وهذا الإحتمال يمثل المساحة تحت المنحنى الطبيعي القياسي من $-\infty$ إلى النقطة z وجداول التوزيع الطبيعي القياسي تحسب قيم هذا الإحتمال لقيم مختلفة لـ Z.



(4) الدالة المولدة لعزومه هي:

$$\boxed{M_Z(t)=e^{\frac{t^2}{2}}}$$

(5) تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع قياسي:

إذا كان المتغير $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن المتغير $Z=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ له التوزيع الطبيعي القياسي

ونكتب $Z\sim N(0,1)$ ، ونحسب الإحتمالات من الجداول في الحالات التالية كما يلي:

$$(i)\quad P(X\le x)=P\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\le\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)=P\left(Z\le\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)$$
$$(ii)\quad P(X\ge x)=1-P(X\le x)=1-P(Z\le z)$$
$$(iii)\quad P(a\le X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=P(Z\le z_1)-P(Z\le z_2)$$

حيث

$$z_1=\frac{b-\mu_x}{\sigma_x}\quad,\quad z_2=\frac{a-\mu_x}{\sigma_x}$$

(6) <u>أمثلة:</u>

<u>مثال (4- 1-4):</u>

أثبت أن الدالة المولدة لعزوم التوزيع الطبيعي القياسي هي: $M_Z(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$ ؟.

<u>الحل:</u>

$$M_Z(t)=E(e^{Zt})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{zt}.e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}[z^2-2zt+t^2-t^2]}dz$$
$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}e^{\frac{t^2}{2}}dz$$

نضع

$$y=z-t\Rightarrow dy=dz$$
$$=e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$
$$\therefore M_Z(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$$

<u>مثال (4-2-4):</u>

أثبت أن الدالة المولدة لعزوم التوزيع الطبيعي هي: $M_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ ؟.

<u>الحل:</u>

$$\because Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow X = \sigma Z + \mu$$
$$\because M_{aY+b}(t) = e^{tb} M_Y(at)$$
$$\therefore M_X(t) = e^{t\mu} M_Z(\sigma t)$$
$$= e^{t\mu} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

<u>مثال (4-3-4):</u>

(1) إذا كان $Z \sim N(0,1)$ فأحسب كلاً من:

$i)\quad P(Z<1.25) \qquad ii)\quad P(Z \le -1.25)$

$iii)\quad P(Z>1.67) \qquad iv)\quad P(-2<Z<-0.2)$

(2) إذا كان $X \sim N(2,25)$ فأحسب كلاً من: $i)\quad P(-8<X<1) \qquad ii)\quad P(0<X<10)$

إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ فإحسب: $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma)$

<u>الحل:</u>

1) $P(Z<1.25) = F(1.25)$

لإيجاد قيمة هذا الإحتمال من جدول التوزيع الطبيعي القياسي فإنه ندخل الجدول من السطر 1.2 ونقراء تقاطعه مع العمود 0.05 لنجد القراءة 0.8944

$(i)\quad P(Z<1.25) = 0.8944$

$(ii)\quad P(Z \le -1.25) = 0.1056$

$(iii)\quad P(Z>1.67) = 1 - P(Z \le 1.67)$
$= 1 - 0.9525 = 0.0475$

$(iv)\quad P(-2<Z<-0.2) = P(Z \le -0.2) - P(Z \le -2)$
$= 0.4207 - 0.0228 = 0.3979$

2) نعاير X حيث لدينا $\sigma_X = \sqrt{25} = 5$ و $\mu_X = 2$:

$$(i)\quad P(-8 < X < 1) = P(X < 1) - P(X < -8)$$
$$= P(Z < \frac{1-2}{5}) - P(Z < \frac{-8-2}{5})$$
$$= P(Z < -0.2) - P(Z < -2)$$
$$= 0.4207 - 0.0228 = 0.3979$$
$$(ii)\quad P(0 < X < 10) = P(X < 10) - P(X < 0)$$
$$= P(Z < \frac{10-2}{5}) - P(Z < \frac{0-2}{5})$$
$$= P(Z < 1.6) - P(Z < -0.4)$$
$$= 0.9452 - 0.3446 = 0.6006$$

3) نعاير X حيث لدينا $\sigma_X = \sigma$ و $\mu_X = \mu$:

$$\therefore P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$$
$$= P(X < \mu + 2\sigma) - P(X < \mu - 2\sigma)$$
$$= P(Z < \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}) - P(Z < \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma})$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < -2) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

مثال (4-4-4):

لديك الدالة المولدة للعزوم $M_Y(t) = e^{3t+8t^2}$ ، أوجد كلاً من:

$$\mu_Y,\quad \sigma_Y,\quad P(Y > 3),\quad P(-1 < Y < 5)$$

الحل:

هذا الدالة على صيغة $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ وهي دالة توليد عزوم متغير طبيعي وفيه:

$$\mu_Y = 3,\qquad 8 = \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow \sigma_Y^2 = 16 \Rightarrow \sigma_Y = 4$$

$$P(Y > 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Z < \frac{3-3}{4})$$
$$= 1 - P(Z < 0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$P(-1<Y<5)=P(Y<5)-P(Y<-1)$$
$$=P(Z<\frac{5-3}{4})-P(Z<\frac{-1-3}{4})$$
$$=P(Z<0.5)-P(Z<-1)=0.6915-0.1587=0.5328$$

مثال (4-5-4):

إذا كانت درجات حاصل الذكاء تتوزع طبيعياً بمتوسط 100 وإنحراف معياري يساوي 15 ، فما نسبة الناس ذوي درجة ذكاء: (1) أعلى من 125 ، (2) أقل من 80 , (3) بين 70 و 130 .

الحل:

لنرمز لدرجة حاصل الذكاء بالمتغير X ، ∴ لدينا المعلومات التالية:

$$\mu_X=100,\quad \sigma_X=15,\quad X\sim N(100,15^2)$$

1) المطلوب $P(X>125)$:

$$P(X>125)=1-P(X<125)$$
$$=\quad 1-P(Z<\frac{125-100}{15})=1-P(Z<1.67)=1-0.9525=0.0475$$

النسبة المطلوبة هي: $\boxed{0.0475(100)=4.75\%}$

2) المطلوب $P(X<80)$:

$$P(X<80)=P(Z<\frac{80-100}{15})=P(Z<-1.33)=0.0918$$

النسبة المطلوبة هي: $\boxed{9.18\%}$

3) المطلوب $P(70<X<130)$:

$$P(70<X<130)=P(X<130)-P(X<70)$$
$$=P(Z<\frac{130-100}{15})-P(Z<\frac{70-100}{15})$$
$$=P(Z<2)-P(Z<-2)=0.9772-0.0228=0.9544$$

النسبة المطلوبة هي: $\boxed{95.44\%}$

(5-4) توزيع جاما: Gamma Distribution

1 – تعريفه

يقال أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع جاما بالمعلمتين (n,λ) إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية

هي :-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x} & ; \quad x>0 \quad , \quad \lambda>0 \quad , \ n>0\\ 0 & ; \quad o.w\end{cases}$$

ملاحظة:-

اسم التوزيع مأخوذ من دالة جاما المعروفة رياضياً بالصيغة (تكامل جاما) :-

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

ويمكن حساب هذا التكامل باستخدام صيغة التكامل بالتجزيء وهي $\int udv=uv-\int vdu$

كما يلي: بوضع $u=x^{n-1} \quad \& \quad dv=e^{-x}dx$

نجد أن $v=-e^{-x} \quad \& \quad du=(n-1)x^{n-2}dx$ وعليه فإن:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx=[x^{n-1}.-e^{-x}]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-x})(n-1)x^{n-2}dx$$
$$=0+(n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx$$
$$=(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$=(n-1)(n-2)\cdots 3.2.\Gamma(1)$$

حيث $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^\infty=1$

وعليه إذا كان n عددا صحيحاً موجباً فإن $\Gamma(n)=(n-1)!$

كما أنه توجد نتائج مفيدة لتكامل جاما منها :- (أ) :-

1. $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2^n}.\sqrt{\pi}\quad,\quad n=1,2,3,\cdots$
2. $\Gamma(\frac{n+1}{2})=\frac{1.3.5.\cdots.(n-1)}{2^{\frac{n}{2}}}.\sqrt{\pi}\quad,\quad n=2,4,6,8,\cdots$
3. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

(ب) تعميم دالة جاما: $\int_0^\infty y^{a-1}e^{-by}dy=\frac{\Gamma(a)}{b^a}$

2 – دالة توزيعه التراكمية هى : $F(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^x t^{n-1}e^{-\lambda t}dt\quad,x\geq 0$

3 – الدالة المولدة لعزومه هي: $M(t)=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^n\quad;\quad\lambda>t$

4 – توقعه هو : $\mu=E(X)=\frac{n}{\lambda}$

5 – تباينه هو: $\sigma^2=V(X)=\frac{n}{\lambda^2}$

6 – <u>ملاحظات هامة:</u>

(أ) توجد صيغة تكرارية لتوليد عزومه هي : $\mu_r^{/} = E(X^r) = \dfrac{\Gamma(n+r)}{\lambda^r \Gamma(n)}$.

(ب) التوزيع الأسي يعتبر حالة خاصة من توزيع جاما عند n =1 .

<u>مثال (1-5-4):-</u> لتوزيع جاما أثبت أن:

(1) f(x) تمثل دالة كثافة احتمالية .

$$(2)\ \mu_r^{/} = \frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^r \Gamma(n)}, \quad (3)\ \mu = \frac{n}{\lambda}, \quad (4)\ \sigma^2 = \frac{n}{\lambda^2}, \quad (5)\ M(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^n, \quad (6)\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

الحل :-

(1) دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير X يتبع توزيع جاما بالمعلمتين (n,λ) هي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & ; \quad x \ge 0 \quad , \quad \lambda > 0 \quad , n > 0 \\ 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

نعلم أن أي دالة f(x) تمثل دالة كثافة احتمالية إذا حققت الشرطين التاليين :

$$(1)\ f(x) \ge 0 \quad \forall x, \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

واضح من تعريف الدالة أنها موجبة فالشرط الأول محقق . أما الشرط الثاني فهو:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \qquad (1-5)$$

بوضع $y = \lambda x$ في المعادلة (1-5) نجد أن حدود التكامل لم تتغير وأن $dy = \lambda dx$

وعليه فإن :

$$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{\lambda^{n-1}}e^{-y}\frac{1}{\lambda}dy=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)}=1$$

وهو المطلوب .

(2) نعلم أن

$$\mu_r^{/}=E(X^r)=\int x^r f(x)dx=$$
$$=\int_0^\infty x^r\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n+r-1}e^{-\lambda x}dx \qquad (2-5)$$

باستخدام تعميم دالة جاما بحيث $a=n+r\,,\quad b=\lambda$ في المعادلة (2-5) نجد أن :

$$\mu_r^{/}=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n+r-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^{n+r}}=\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^r\Gamma(n)}.$$ وهو المطلوب .

(3) بتطبيق العلاقة أعلاه نجد أن : $\mu_1^{/}=\frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^1\Gamma(n)}=\frac{n\Gamma(n)}{\lambda\Gamma(n)}=\frac{n}{\lambda}$ وهو المطلوب .

(4) كذلك نجد أن :

$$\mu_2^{/}=E(X^2)=\frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^2\Gamma(n)}=\frac{(n+1)n\Gamma(n)}{\lambda^2\Gamma(n)}=\frac{n^2+n}{\lambda^2}$$
$$\because \sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma^2=\frac{n^2+n}{\lambda^2}-\frac{n^2}{\lambda^2}=\frac{n}{\lambda^2}$$

وهو المطلوب .

(5)) باستخدام تعميم جاما نعلم أن:

$$M_x(t)=E(e^{xt})=\int_0^\infty e^{xt}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x(\lambda-t)}dx$$
$$\therefore\quad M_X(t)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n)}{(\lambda-t)^n}=\frac{\lambda^n}{(\lambda-t)^n}$$

وهو المطلوب .

(6) من تعريف دالة جاما يمكن أن نكتب:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \qquad (3-5)$$

بوضع $x = \frac{y^2}{2}$ في المعادلة (3-5) نجد أن حدود التكامل لم تتغير وأن $ydy = dx$

وعليه فإن :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{y^{-1}}{2^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2}} ydy = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \qquad (4-5)$$

نعلم من دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير الطبيعي القياسي Y أن :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1 \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} \;\Rightarrow\; \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

بالتعويض في المعادلة (5- 4) نجد أن :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi} .$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(4-5-2):-</u>

إذا كان المتغير X يمثل عمرنوع من المصابيح مقدر بالسنوات وكانت دالة كثافته الاحتمالية هي: $x \ge 0 \quad , \quad f(x) = cxe^{-2x}$ حيث c مقدار ثابت فأوجد :

(1) قيمة الثابت c ؟. (2) احسب كل من μ, σ^2 ؟ .

(3) احتمال أن يبقى مصباح (من هذا النوع اختير عشوائياً) سليماً لمدة أقل من ثلاثة أشهر ؟.

<u>الحل</u>

(1) واضح أن X يتبع توزيع جاما ولحساب المعلمتين بالمقارنة نجد أن :

$$\lambda = 2 \quad , \quad n-1=1 \Rightarrow n=2$$

وعليه نجد بالمقارنة أن $c=\dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}=\dfrac{2^2}{\Gamma(2)}=4$

<u>طريقة أخرى للحل :</u>

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \quad \Rightarrow \int_{0}^{\infty} cxe^{-2x}dx = c\frac{\Gamma(2)}{2^2}=c\frac{1}{4}=1 \quad \Rightarrow \quad c=4 \quad .$$

(2) من خواص التوزيع نجد أن

$$\because \mu=\frac{n}{\lambda} \Rightarrow \mu=1 \qquad \& \quad \because \sigma^2=\frac{n}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2=\frac{2}{4}=0.5 \quad .$$

(3) ثلاثة أشهر تساوي ربع سنة وعليه فإن المطلوب هو

$$P(X \le 0.25)=\int_{0}^{0.25} 4xe^{-2x}dx$$

ويمكن حساب هذا التكامل باستخدام صيغة التكامل بالتجزيء وهي $\int udv = uv - \int vdu$

كما يلي: بوضع $u=x \quad \& \quad dv=e^{-2x}dx$

نجد أن $v=-\dfrac{e^{-2x}}{2} \quad \& \quad du=dx$ وأن حدود التكامل لم تتغير وعليه فإن:

$$\begin{aligned}
P(X \le 0.25) &= \int_{0}^{0.25} 4xe^{-2x}dx = 4\int_{0}^{0.25} udv = 4\{[-u\frac{e^{-2u}}{2}]_0^{0.25} - \int_{0}^{0.25} -\frac{e^{-2u}}{2}du\} \\
&= 2[-ue^{-2u}]_0^{0.25} + 2\int_{0}^{0.25} e^{-2u}du = 2[-0.25e^{-0.5}] + 2\int_{0}^{0.25} e^{-2u}du \\
&= -0.5e^{-0.5} - [e^{-2u}]_0^{0.25} = -0.5e^{-0.5} - [e^{-0.5}-1] = 1-1.5e^{-0.5} \\
&= 0.09
\end{aligned}$$

(4 _6) توزيع مربع كاي: Chi-Square Distribution:

1 – تعريفه : يقال أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع مربع كاي (χ^2) بالمعلمة ν إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي :-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}x^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & ; \quad x>0\\ 0 & ; \quad o.w\end{cases}$$

حيث ν عدد صحيح موجب .

2 – توقعه هو : $\mu=E(X)=\nu$

3 – تباينه هو : $\sigma^2=V(X)=2\nu$

4 – الدالة المولدة لعزومه هي: $M(t)=(\dfrac{1}{1-2t})^{\frac{\nu}{2}} \quad ; \quad 0.5>t$

5 – ملاحظات هامة:

(أ) توزيع مربع كاي يعتبر حالة خاصة من توزيع جاما عند ما $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{\nu}{2}$.

(**ب**) عادة يكتب المتغير العشوائي X في هذا التوزيع بالصيغة χ_ν^2 ليعني ذلك أن المتغيريتبع

توزيع مربع كاي بدرجة حرية ν ويرمز لذلك بالرمز $X\sim\chi_\nu^2$.

مثال (4-6-1):-

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)=\dfrac{2}{16\Gamma(3)}x^2e^{-\frac{x}{2}}$, $x>0$

فالمطلوب هو حساب كل من توقع وتباين ودالة توليد عزوم المتغير X .

الحل :-

واضح أن $X \sim \chi_6^2$ وذلك لأن **f(x)** يمكن كتابتها بالشكل $f(x) = \frac{1}{2^3\Gamma(3)} x^2 e^{-\frac{x}{2}} \quad , x > 0$

وعليه فإنه بالمقارنة نجد أن :

$$\frac{\nu}{2} = 3 \Rightarrow \nu = 6$$
$$\therefore\ E(X) = \nu = 6 \qquad \& \qquad \sigma^2 = V(X) = 2\nu = 12 \quad ,$$
$$M(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{\nu}{2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^3 = (1-2t)^{-3}$$

(تمرين) حل المثال بطريقة التعاريف ؟

(4_ 7) توزيع بيتا: **Beta Distribution:**

1 – تعريفه

يقال أن المتغير العشوائي المستمر *X* يتبع توزيع بيتا بالمعلمتين (a,b) إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي :-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ;\ 0 \le x \le 1 \quad , \quad a > 0\,, b > 0 \\ 0 & ;\ o.w \end{cases}$$

ويمكن أن نكتب دالة الكثافة أعلاه بالصيغة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ;\ 0 \le x \le 1 \quad , \quad a > 0\,, b > 0 \\ 0 & ;\ o.w \end{cases}$$

حيث $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

ملاحظة:-

اسم التوزيع مأخوذ من دالة بيتا المعروفة رياضياً بالصيغة (تكامل بيتا) :-

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad a>0 \quad , \quad b>0 \, .$$

2 – الصيغة التكرارية المولدة لعزومه هي :

$$\mu_r^{/}=E(X^r)=\frac{\beta(a+r\,,b)}{\beta(a,b)}$$

3 – توقعه هو :

$$\mu=E(X)=\frac{a}{a+b}$$

4 – تباينه هو :

$$\sigma^2=V(X)=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

5 – ملاحظات هامة:

(أ) في حالة أن $a = b$ تكون $f(x)$ متماثلة حول $x = 0.5$.

(ب) في حالة أن $a = b = 1$ تكون $f(x)$ ممثلة لتوزيع منتظم على الفترة $(0\,,1)$.

(ج) منوال هذا التوزيع x_o : هو القيمة التي تحقق $f^{/}(x)=0$ وهي $x_o=\dfrac{a-1}{a+b-2}$.

(د) دالة توزيعه التراكمية هي :

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ \dfrac{1}{\beta(a,b)}\displaystyle\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt & , \quad 0<x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

وتسمى أيضا $F(x)$ دالة بيتا الناقصة (غير التامة) Incomplete beta function

ولها جداول خاصة بها تبين قيم X التي تعطي احتمالاً متراكماً حتى القيمة x .

مثال (4-7-1):- لتوزيع بيتا أثبت أن:

(1) $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية .

(2) $\mu_r' = \dfrac{\beta(a+r,b)}{\beta(a,b)} = \dfrac{\Gamma(a+r)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+r)}$, (3) $\mu = \dfrac{a}{a+b}$, (4) $\sigma^2 = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$.

الحل :-

(1) دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير *X* يتبع توزيع بيتا هي :-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ; \quad 0 \le x \le 1 \quad , \quad a>0\,, b>0 \\ 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

نعلم أن أي دالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية إذا حققت الشرطين التاليين :

$$(1)\ f(x) \ge 0 \quad \forall x\,, \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

واضح من تعريف الدالة أنها موجبة فالشرط الأول محقق . أما الشرط الثاني فهو

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{1}{\beta(a,b)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{1}{\beta(a,b)}\beta(a,b) = 1$$

وهو المطلوب .

(2) نعلم أن

$$\mu_r' = E(X^r) = \int x^r f(x)dx =$$

$$= \int_0^1 x^r \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{1}{\beta(a,b)}\int_0^1 x^{a+r-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$= \frac{\beta(a+r,b)}{\beta(a,b)} = \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(b)}{\Gamma(a+r+b)}\,\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+r)} \quad .$$

وهو المطلوب .

(3) بتطبيق العلاقة أعلاه نجد أن : $\mu_1' = \dfrac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+1)} = \dfrac{a!(a+b-1)!}{(a-1)!(a+b)!} = \dfrac{a}{a+b}$

وهو المطلوب .

(4) كذلك نجد أن :

$$\mu_2^/ = E(X^2) = \frac{a^2+a}{(a+b+1)(a+b)}$$
$$\because \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$\therefore \sigma^2 = \frac{a^2+a}{(a+b+1)(a+b)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{(a^2+a)(a+b)-a^2(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)^2}$$
$$= \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \quad .$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (4-7-2):-</u> إذا كان للمتغير العشوائي X دالة كثافة احتمالية

$$f(x) = c(x-x^2)^{0.5} \quad , 0 < x < 1$$

احسب قيمة كل من :

$$(1)\ c\ ,\ (2)\ \mu\ \ ,\ (3)\ \sigma^2\ ,\ (4)\quad x_o\ ,\ (5)\ \ P(X \le 0.5)$$

<u>الحل :-</u> يمكن أن نكتب $f(x)$ أعلاه بالصيغة :

$$f(x) = cx^{0.5}(1-x)^{0.5} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad .$$

وعليه فإن :

$$(1)\ c = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad , \quad a = b = 1.5$$
$$= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2!}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}).\frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2})} = \frac{2}{\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{\pi}, \Rightarrow c = \frac{8}{\pi} \quad .$$

$$(2) \because x_o = \frac{a-1}{a+b-2} \quad , \quad \Rightarrow x_o = \frac{1.5-1}{3-2} = 0.5 \ .$$

$$(3) \because \mu = E(X) = \frac{a}{a+b} \quad , \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1.5}{3} = 0.5 \ .$$

$$(4)\ \because \sigma^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \quad , \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{(1.5)(1.5)}{(4)(3)^2} = 0.0625 \quad .$$

$$(5)\ P(X \le 0.5) = 0.5 \quad .$$

وذلك من تماثل التوزيع حول x=0.5 .

(8-4) تمارين الفصل الرابع :

1. إذا كان X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الإحتمالية هي:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \ge 0, \quad \lambda > 0$$

أثبت أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير X هي: $M_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$

ثم إستخدمها لحساب كل من E(X) , Var(X) ؟.

2. إذا كان المتغير العشوائي Y له دالة مولدة للعزوم: $M_Y(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t/2)}$

فأوجد دالة الكثافة الإحتمالية f(y) ثم أحسب P(2 < Y < 3) ؟ .

3. أكتب الدالة المولدة للعزوم للمتغير Z حيث Z = 2Y (Y كما في السؤال السابق)؟

ثم أوجد كل من f(z) و F(z) للمتغير Z ؟.

4. عرف الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X ذو دالة كثافة إحتمالية f(x) حيث $-\infty < X < \infty$؟

5. الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي الطبيعي Y هي $M_Y(t) = e^{3t+8t^2}$ والمطلوب هو:

(1) إيجاد كل من التوقع والتباين والإنحراف المعياري للمتغير Y

(2) إحسب P(Y< 3) ، (3) إيجاد كل من f(z) و Mz(t) حيث أن: $Z = \frac{Y-3}{4}$

6. الدالة f(x) هي دالة كثافة إحتمالية لمتغير عشوائي X حيث:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad , \quad a\le X\le b$$

أثبت أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير X هي: $M_X(t)=\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$ ؟

7. (1) عبر عن خاصية فقدان (نقص) الذاكرة للمتغير الأسي إحتمالياً؟

(2) إذا كانت أعمار نوع من البطاريات التي ينتجها أحد المصانع تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 150 يوماً،

فأوجد: أ) إحتمال أن تعيش إحدى هذه البطاريات أكثر من 300 يوماً

ب) إحتمال أن تتلف إحدى هذه البطاريات خلال 15 يوماً من إستعمالها

ج) إحتمال أن تعيش إحدى هذه البطاريات 120 يوماً أخرى بعد أن عاشت أكثر من 30 يوماً .

8. لديك الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y : $M_Y(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}$ أثبت أن $E(Y)=\mu$ ؟

9. لديك الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)=e^{2t+4.5t^2}$ ما هي قيمة كل من:

$$\mu_X,\quad \sigma_X,\quad P(X>2)$$

10. لتوزيع جاما أثبت أن : (1) *f*(x) تمثل دالة كثافة احتمالية .

$$(2)\quad \mu_r'=\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^r\Gamma(n)},\quad (3)\quad \mu=\frac{n}{\lambda},\quad (4)\quad \sigma^2=\frac{n}{\lambda^2},\quad (5)\quad M(t)=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^n,\quad (6)\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}.$$

11. إذا كان المتغير X يمثل عمرنوع من المصابيح مقدر بالسنوات وكانت دالة

كثافته الاحتمالية هي $f(x)=cxe^{-2x} \quad , \quad x\ge 0$ حيث *c* مقدار ثابت فأوجد :

(1) قيمة الثابت *c* ؟. (2) احسب كل من μ,σ^2 ؟ .

(3) احتمال أن يبقى مصباح (من هذا النوع اختير عشوائياً) سليماً لمدة أقل من ثلاثة أشهر ؟.

12. إذا كان $X \sim \chi_n^2$ فاحسب للمتغير X كل من :

(أ) العزم الثاني (ب) العزم الثالث

13. لتوزيع بيتا أثبت أن : (1) $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية .

$$(2)\quad \mu_r^{/} = \frac{\beta(a+r,b)}{\beta(a,b)} = \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+r)},\quad (3)\quad \mu = \frac{a}{a+b},\quad (4)\quad \sigma^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}.$$

14. إذا كان للمتغير العشوائي X دالة كثافة احتمالية :

$f(x) = c(x - x^2)^{0.5} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad .$ احسب قيمة كل من :

$(1)\ c\ ,\quad (2)\ \mu\ ,\quad (3)\ \sigma^2\ ,\quad (4)\ x_o\ ,\quad (5)\ P(X \le 0.5)\ .$

15. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع مربع كاي بدالـــة كثـافـة إحتمالية :

$f(x) = \frac{1}{8c} x^7 e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x \ge 0.$ أوجـــد ما يلـي:

(1) قيمة الثــابت c . (2) التوقــع $E(X)$ والتبـايـن $V(X)$.(3) الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$.

16. إذا كان X متغــــيرا عشـــوائيـا لــه دالـــه الكثــافـه التـاليـه:

$f(x) = c\,x^2(1-x),\ 0 < x \le 1.$ أوجـــد ما يلـي:

(i) قيمـــه الثــابت c (ii) التوقـــع والتبـــايـن للمتغير العشوائي X .

الفصل الخامس

التوزيعات المشتركة Joint Distributions

5 – 1 مقدمة:-

التوزيع لمتغير عشوائي واحد (كل التوزيعات في الفصل السابق) يسمى التوزيع الأُحادي Univariate Distribution , ولأن الحاجة تستدعي في كثير من الدراسات الاحصائية تعريف أكثر من متغير واحد على فضاء عينة , فمثلاً لتكن الدراسة هي : جمع معلومات عن طلاب كلية العلوم . إن طلاب الكلية هم عناصر فضاء العينة , فإذا كانت المعلومات المراد جمعها مثلاً (طول ، وزن ، عمر ومستوى) الطالب فإن هذه متغيرات معرفة على فضاء عينة واحد يمكن أن نرمزلها بالرمز *(X,Y,Z ,L)* وبذلك يكون لدينا متجه من متغيرت هو: $U(X,Y,Z,L):\Omega \to \Re^4$ ولكل عنصر $w\in\Omega$ يوجد متجه من الأعداد الحقيقية هو: $U(w)=\{X(w),Y(w),Z(w),L(w)\}$ حيث *X(w)* يمثل طول الطالب *w* وهكذا.

إن لكل متغير من المتغيرات X,Y,Z,L توزيع احتمالي خاص به ,فإذا أُريد دراسة توزيع المتغيرات معاً فإننا نحصل على توزيعات جديدة تسمى توزيعات مشتركة والمتغيرات تسمى ذات التوزيع المشترك Joint Distributed Random Variables ويختلف اسم التوزيع المشترك باختلاف عدد متغيراته .

فيسمى التوزيع المشترك لمتغيرين بالتوزيع المشترك الثنائي Bivariate Distribution

ويسمى التوزيع المشترك لثلاث متغيرات بالتوزيع الثلاثي Trivariate Distribution
ويسمى التوزيع المشترك لعدة متغيرات بالتوزيع المتعدد Multivariate Distribution .

والمتغيرات قد تكون كلها متقطعة أوكلها مستمرة أو مختلفة (بعضها متقطع والآخر مستمر) .

سوف نقصر الدراسة في هذا المقررعلى التوزيع المشترك الثنائي والمتغيرين من نفس النوع.

5 – 2 التوزيع المشترك الثنائي Bivariate Distribution

لنفرض أن لدينا المتجه العشوائي *U=(X,Y)* هذا يعني أن $U(X,Y):\Omega \to \Re^2$.

سندرس لهذا المتجه وحسب نوع المتغيرين (X,Y) كل من الآتي :-

5 – 2-1 الدالة الاحتمالية المشتركة : Joint Probability Function

أ- إذا كان المتغيران (X,Y) متقطعين فإن دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة لهما (أو للمتجه (X,Y)) هي:

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

وبفرض أن قيم المتغيرين هي $X = x_1, x_2, \cdots, x_n \quad , Y = y_1, y_2, \cdots, y_m.$ فإن قيم الدالة $f(x,y)$ هي :

$f(x,y)$	y_1	y_2	$\cdots$		y_j	$\cdots$	$\cdots$	y_m	$\sum_y f(x,y)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_1,y_j)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_1,y_m)$	$f_x(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_2,y_j)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_2,y_m)$	$f_x(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i,y_1)$	$f(x_i,y_2)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_i,y_j)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_i,y_m)$	$f_x(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_n,y_j)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_n,y_m)$	$f_x(x_n)$
$\sum_x f(x,y)$	$f_y(y_1)$	$f_y(y_2)$	$\cdots$	$\cdots$	$f_y(y_j)$	$\cdots$	$\cdots$	$f_y(y_m)$	1

ويجب أن تحقق الدالة $f(x,y)$ شرطي دالة الكتلة الاحتمالية وهما

$$(i)\ f(x,y)\geq 0 \quad ,\forall x\,,\,\forall y \quad ,$$
$$(ii)\sum_{x}\ \sum_{y} f(x,y)=1$$

ب- إذا كان المتغيران (X,Y) متصلين فإن احتمال وقوعهما يمثل بمساحة تنتشر بكثافة معينة فوق المستوى $\Re^2$

فإذا وُجدت دالة $f(x,y)$ تحقق شرطي دالة الكثافة الاحتمالية وهما

$$(i)\ f(x,y)\geq 0 \quad ,\forall x\,,\,\forall y \quad ,$$
$$(ii)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx=1$$

فإن $f(x,y)$ تُسمى <u>دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة</u> للمتغيرين (X,Y).

5 – 2-2 <u>دالة التوزيع المشتركة :</u> <u>Joint Distribution Function</u>

أ- <u>تعريف</u>:

إذا كان (X,Y) متغيرين عشوائيين معرفين على فضاء عينة Ω فإن الدالة

$$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)$$

تُسمى دالة التوزيع المشترك للمتغيرين (X,Y).

وتُحسب قيمة $F(x,y)$ حسب نوع المتغيرين العشوائيين كما يلي :

$$F(x,y)=\begin{cases}\sum\limits_{-\infty}^{x}\ \sum\limits_{-\infty}^{y} f(u,v) \\ \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du\end{cases} \qquad (1-5)$$

ب- <u>بعض خواص *F(x,y)* :</u>

$$(1)\ F(x,-\infty)=0 \quad , \quad F(-\infty,y)=0 \quad \& \quad F(-\infty,-\infty)=0 \ .$$
$$(2)\ F(x,\infty)=F(x) \quad , \quad F(\infty,y)=F(y) \quad \& \quad F(\infty,\infty)=1 \ .$$
$$(3)\ x_1<x_2 \quad , \quad y_1<y_2 \ \Rightarrow\ F(x_1,y_1)\le F(x_2,y_2) \ .$$

وهذا يعني أن *F(x,y)* غير تناقصية .

$$(4)\ P(x_1<X\le x_2\ ,\ y_1<Y\le y_2)$$
$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1) \ .$$
$$(5)\ F(x^+,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(x+\varepsilon,y)=F(x,y) \quad \&$$
$$F(x,y^+)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(x,y+\varepsilon)=F(x,y) \, .$$

وهذا يعني أن *F(x,y)* دالة متصلة من اليمين .

5 – 2-3 <u>التوزيعات الجانبية (الهامشية):</u> <u>Marginal Distributions</u>

حيث أن لكل عنصرمن عناصر المتجه (X,Y) توزيع خاص به ، فإنه يمكن إيجاد هذا التوزيع (الذي

يُسمى في هذه الحالة بالجانبي أو الهامشي) من التوزيع المشترك كما يلي:

<u>**أولاً**</u> يمكن حساب قيمة الدالة *f(x)* (الهامشية) من الدالة *f(x,y)* حسب نوع المتغير من العلاقة التالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum\limits_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \end{cases} \qquad (2-5)$$

بالمثل نجد أن :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \end{cases}$$

<u>كذلك:</u> يمكن حساب قيمة الدالة *f(x)* والدالة f(y) من الدالة *F(x,y)* في حالة المتغير المتصل كالتالي:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F(\infty, y) \quad \text{و} \quad f_X(x) = \frac{d}{dx}F(x,\infty)$$

وذلك لأنه في حالة أن المتجه (X,Y) متصل نجد أن :

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x,y)$$

<u>ثانياً</u> يمكن حساب قيمة الدالة *F(x)* (الهامشية) من الدالة *F(x,y)* حسب نوع المتغير من العلاقة التالية :

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \begin{cases} \sum\limits_{t=-\infty}^{x} \sum\limits_{y=-\infty}^{\infty} f(t,y) \\ \int\limits_{t=-\infty}^{x} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} f(t,y)dydt \end{cases} \qquad (3-5)$$

بالمثل نجد أن :

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{y} f(x,t) \\ \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{y} f(x,t)dtdx \end{cases}$$

البرهان:

(أ)- في حالة أن المتجه (X,Y) منفصل:

في هذه الحالة يمكن حساب دالة التوزيع الهامشية للمتغير X من الدالة المشتركة باستخدام العلاقة (5-1) كما يلي :

$$F(x,\infty) = P(X \le x, Y \le \infty) = \sum_{t=-\infty}^{x} \sum_{-\infty}^{\infty} f(t,y)$$
$$= \sum_{t=-\infty}^{x} f(t) = F_X(x) \quad .$$

(ب)- في حالة أن المتجه (X,Y) متصل:

في هذه الحالة يمكن حساب دالة التوزيع الهامشية للمتغير X من الدالة المشتركة باستخدام العلاقة (5-1) كما يلي :

$$F(x,\infty) = P(X \le x, Y \le \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)dydt$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F_X(x) \quad .$$

5 –3 التوقع الرياضي المشترك : Joint Mathematical Expectation

إذا كانت $g(x,y)$ هي دالة في المتجه (X,Y) الذي دالته الاحتمالية هي $f(x,y)$ فإن التوقع الرياضي للدالة g يُعرف بأنه متوسط الدالة g في التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين (X,Y) ويتم حساب هذا التوقع حسب نوع المتغيرين كما يلي :

$$E(g(X,Y))=\begin{cases}\sum_x\sum_y g(x,y)\,f(x,y)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f(x,y)dydx\end{cases}\qquad(4-5)$$

بشرط أن يكون كل من المجموع والتكامل تقاربي .

بعض الحالات الخاصة للدالة *g(x,y)* :

1 – إذا كانت $g(X,Y)=X$ فحسب نوع المتغيرين نجد أن:

$$E(g(X,Y))=\begin{cases}\sum_x\sum_y xf(x,y)=\sum_x x\sum_y f(x,y)=\sum_x xf(x)=E(X)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty} x\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=E(X)\end{cases}$$

بشرط أن يكون كل من المجموع والتكامل تقاربي . يُسمى التوقع أعلاه بالتوقع الهامشي

للمتغير *X* (Marginal Expectation) . وبالمثل إذا كانت $g(X,Y)=Y$.

2 – إذا كانت $g(X,Y)=(X-\mu_x)^2$ فحسب نوع المتغيرين نجد أن:

$$E(g(X,Y))=\begin{cases}\sum_x\sum_y (x-\mu_x)^2 f(x,y)=\sum_x (x-\mu_x)^2\sum_y f(x,y)\\ \qquad=\sum_x (x-\mu_x)^2 f(x)=E(X-\mu_x)^2=\sigma_x^2\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx\\ \qquad=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x)dx=E(X-\mu_x)^2=\sigma_x^2\end{cases}$$

بشرط أن يكون كل من المجموع والتكامل تقاربي . يُسمى التوقع أعلاه بالتباين الهامشي

للمتغير *X* (Marginal Variance) . وبالمثل إذا كانت $g(X,Y)=(Y-\mu_y)^2$.

مثال (1-5) :

إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين (X , Y) هي كما في الجدول التالي :

$f(x,y)$		y		
		-2	0	5
x	1	0.15	0.25	0.2
	3	0.2	c	0.15

المطلوب : حساب قيمة كل من :

(1) الثابت c .

(2) الدوال الهامشية $f_X(x)\,,\ f_Y(y)$.

(3) $E(2X-3Y)$ (4) $V(X), V(Y)$

(5) $E(XY)$, (6) $F(1,0)$, (7) $P(X+Y\le 1)$

الحل :

نكتب الجدول التالي :

$f(x,y)$		y			f(x)
		-2	0	5	
X	1	0.15	0.25	0.2	0.6
	3	0.2	c	0.15	0.35+c
f(y)		0.35	0.25+c	0.35	1

ومنه نجد أن :

1. قيمة الثابت c هي

C = 1- 0.95 = 0.05

2. كذلك من الجدول أعلاه نجد أن دوال الاحتمال الهامشية كما في الجدولين أدناه :

x	1	3
f(x)	0.6	0.4

y	-2	0	5
f(y)	0.35	0.3	0.35

(3) المطلوب هو :

$$E(X)=\sum_x xf(x)=1\cdot(0.6)+3\cdot(0.4)=1.8$$
$$E(Y)=\sum_y yf(y)=-2\cdot(0.35)+0\cdot(0.3)+5\cdot(0.35)=1.05$$
$$\therefore E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)$$
$$=2(1.8)-3(1.05)=0.45$$

(4) المطلوب هو :

$$E(X^2)=\sum_x x^2 f(x)=1^2\cdot(0.6)+3^2\cdot(0.4)=4.2$$
$$\because \sigma_x^2=V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$\therefore V(X)=4.2-(1.8)^2=0.96 \quad .$$

بالمثل نجد أن : $\sigma_y^2=V(Y)=9.0475$

(5) المطلوب هو :

$$E(XY)=\sum_x\sum_y xyf(x,y)$$
$$=(1)(-2)f(1,-2)+(0)f(1,0)+(1)(5)f(1,5)$$
$$+(3)(-2)f(3,-2)+(0)f(3,0)+(3)(5)f(3,5)$$
$$=(-2)(0.15)+(5)(0.2)-(6)(0.2)+(15)(0.15)=1.75$$

(6) المطلوب هو :

$$F(1,0)=P(X\le 1,Y\le 0)$$
$$=f(1,-2)+f(1,0)=0.15+0.25=0.4$$

(7) المطلوب هو :

$$P(X+Y\le 1)=f(1,-2)+f(1,0)+f(3,-2)$$
$$=0.15+0.25+0.2=0.6$$

مثال (5-2) :

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y هي :

$$f(x,y)=c(x+y) \quad , \quad 0<x , y<2 \quad .$$

فاحسب كل من : (1) قيمة الثابت c . (2) دوال الاحتمال الهامشية للمتغيرين X , Y .

(3) $V(X)$, $V(Y)$. (4) $F(1,1)$.

الحل : (1) :

$$\because \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx=1$$

$$\therefore 1=\int_0^2\int_0^2 c(x+y)dydx=c\int_0^2[xy+\frac{y^2}{2}]_0^2 dx$$
$$=c\int_0^2[2x+2]dx=c[x^2+2x]_0^2=8c \Rightarrow 8c=1 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{1}{8} \quad .$$

$$\therefore \quad f(x,y)=\frac{x+y}{8} \quad , \quad 0<x , y<2 \quad .$$

(2) الدوال الهامشية كما يلي:

$$\because \quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$\therefore \quad f_X(x)=\int_0^2 \frac{x+y}{8}dy=\frac{1}{8}[xy+\frac{y^2}{2}]_0^2=\frac{1}{8}[2x+2]=\frac{x+1}{4}$$
$$\Rightarrow \quad f_X(x)=\frac{x+1}{4} \quad , \quad 0<x<2 \; .$$

بالمثل نجد أن :

$$f_Y(y)=\frac{y+1}{4} \quad , \quad 0<y<2 \ .$$

(3) نحسب تباين X كما يلي:

$$\because \quad \sigma_X^2=V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$\therefore \quad E(X)=\int_0^2 x\frac{x+1}{4}dx=\frac{1}{4}\int_0^2(x^2+x)dx=\frac{1}{4}[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}]_0^2=\frac{7}{6} \ .$$

$$\& \quad E(X^2)=\frac{5}{3} \qquad \Rightarrow \quad V(X)=\frac{11}{36} \quad .$$

بالمثل نجد أن : $\sigma_Y^2=V(Y)=\frac{11}{36}$

(4) نحسب المطلوب كما يلي :

$$\because \quad F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$$

$$\therefore \quad F(1,1)=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{8}dxdy=\frac{1}{8}\int_0^1[xy+\frac{y^2}{2}]_0^1dx$$

$$\therefore \quad F(1,1)=\frac{1}{8}\int_0^1(x+\frac{1}{2})dx=\frac{1}{8}[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}]_0^1=\frac{1}{8}(1-0)=\frac{1}{8}$$

4 – 5 التغاير: Covariance

أ – تعريف :

يُعرف التغاير بين متغيرين X , Y بأنه التباين المشترك لهما ، حيث يُعطي التغاير قياساً عددياً بين درجة الترافق بين المتغيرين من حيث إزديادهما أو تناقصهما معاً.

يرمز للتغاير بالرمز $Cov(X,Y)$ أو $\sigma_{X,Y}$. ويُعبر عن التغاير رياضياً : بأنه قيمة التوقع للدالة $g(x,y)$ حيث $g(x,y)=(X-E(X))(Y-E(Y))$ وعليه فإن التغاير هو:

$$\sigma_{X,Y} = Cov(X,Y) = E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\} \qquad (5-5)$$

ومنه نجد أن التغاير هو:

$$\sigma_{X,Y} = Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \qquad (6-5)$$

ب – بعض خواص التغاير :

$$\begin{aligned}&(1)\ Cov(X,Y) = Cov(Y,X)\,, \quad (2)\ Cov(X,X) = V(X)\,,\\ &(3)\ Cov(X,a) = 0\,, \quad (4)\ Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)\,,\\ &(5)\ Cov(X_1 + X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)\,.\end{aligned}$$

البرهان :

برهان 1،2، 3 و 4 سهل متروك للطالب , أما برهان 5 فهو :

$$\begin{aligned}LHS &= Cov(X_1 + X_2,Y) = E[(X_1 + X_2)Y] - E(X_1 + X_2)E(Y)\\ &= E(X_1Y) + E(X_2Y) - E(X_1)E(Y) - E(X_2)E(Y)\\ &= E(X_1Y) - E(X_1)E(Y) + E(X_2Y) - E(X_2)E(Y)\\ &= Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y) = RHS\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

يمكن تعميم الخاصية الخامسة لتكون كالتالي:

$$Cov(\sum_{i=1}^{n} X_1, \sum_{j=1}^{m} Y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i,Y_j)$$

فمثلاً نجد أن :

$$\begin{aligned}Cov(X_1 + X_2 + X_3,Y_1 + Y_2) &= Cov(X_1,Y_1) + Cov(X_1,Y_2)\\ &+ Cov(X_2,Y_1) + Cov(X_2,Y_2) + Cov(X_3,Y_1) + Cov(X_3,Y_2) \quad .\end{aligned}$$

$$(6)\ V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)\,.$$

تُسمى هذه الخاصية بتباين مجموع متغيرين . وتُعطي العلاقة بين التباين والتغاير .

البرهان :

$$\because \; V(X+Y) = E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2$$

$$\therefore LHS = V(X+Y) = E(X^2+Y^2+2XY) - (E(X)+E(Y))^2$$
$$= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X))^2 - (E(Y))^2 - 2E(X)E(Y)$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2\{E(XY) - E(X)E(Y)\}$$
$$= V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = RHS \; .$$

(7) $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X,Y)$.

تُسمى هذه الخاصية بتباين الفرق بين متغيرين .

البرهان: البرهان مماثل لبرهان الخاصية السادسة , متروك للطالب .

5 –5 <u>معامل الإرتباط:</u> <u>Correlation Coefficient</u>

<u>**أ – تعريف :**</u> إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين تباين كل منهما هو $V(X)$, $V(Y)$ ، فإن معامل الارتباط بينهما يرمز له بالرمز $Corr(X,Y)$ أو $\rho_{X,Y}$ ويُعرف رياضياً بالعلاقة التالية :

$$Corr(X,Y) = \rho_{X,Y} = \frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}$$
$$= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} \qquad (7-5)$$

يقيس معامل الارتباط $\rho_{X,Y}$: قوة الارتباط بين X , Y حيث يُبين هل هذا الارتباط طردي أو عكسي أو غير موجود .

<u>**ب – بعض خواص معامل الارتباط :**</u>

(1) $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$

وهذا يعني أن معامل الارتباط ρ_{XY} وحيد وإبدالي .

$(2)\ \rho_{X,X}=1,\quad (3)\ \rho_{X,-X}=-1\quad ,$

$(4)\ \ -1\le \rho_{X,Y}\le 1\ .$

البرهان :

برهان (1)،(2)، (3) سهل متروك للطالب , أما الخاصية (4) فتفيد أن قيمة معامل الارتباط العددية تقع في الفترة [1 ,1-] وهي تحدد مقدار الارتباط واتجاهه ، و نبرهان (4) كما يلي :

من المعلوم أن المتغير العشوائي المعياري Z يُعطى بالعلاقة $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma_X}$ وأن :

$E(Z)=0$, $V(Z)=1$ بفرض أن لدينا المتغيرين X و Y وأن :

$$Z_1=\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\quad ,\quad Z_2=\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}$$

فإن :

$$\begin{aligned}Cov(Z_1,Z_2)&=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)\cdot E(Z_2)=E(Z_1Z_2)-0\\&=E[(\frac{X-E(X)}{\sigma_X})(\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y})]\\&=\frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\sigma_X\sigma_Y}=\rho_{X,Y}\end{aligned}$$

$$\because\ \ V(Z_1+Z_2)=V(Z_1)+V(Z_2)+2Cov(Z_1,Z_2)\quad\Rightarrow$$
$$V(Z_1+Z_2)=1+1+2Cov(Z_1,Z_2)=2+2Cov(Z_1,Z_2)=2+2\rho_{X,Y}$$
$$\because\ \ V(Z_1+Z_2)\ge 0\quad\Rightarrow 2+2\rho_{X,Y}\ge 0\quad\Rightarrow\ 2\rho_{X,Y}\ge -2\quad\Rightarrow\ \rho_{X,Y}\ge -1$$

كذلك :

$$\because\ \ V(Z_1-Z_2)=V(Z_1)+V(Z_2)-2Cov(Z_1,Z_2)\quad\Rightarrow$$
$$V(Z_1-Z_2)=1+1-2Cov(Z_1,Z_2)=2-2Cov(Z_1,Z_2)=2-2\rho_{X,Y}$$
$$\because\ \ V(Z_1-Z_2)\ge 0\quad\Rightarrow 2-2\rho_{X,Y}\ge 0\quad\Rightarrow -2\rho_{X,Y}\ge -2$$
$$\Rightarrow 2\ \rho_{X,Y}\le 2\quad\Rightarrow\ \ \rho_{X,Y}\le 1$$

ومنه نجد أن $-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$ وهو المطلوب .

$$(5)\ \rho_{(aX\pm b),(cY\pm d)} = \rho_{X,Y} \quad .$$

الخاصية (5) تعني أن ρ لا يتأثر بالعمليات الرياضية الأربع المعروفة .

البرهان:

$$\begin{aligned}
LHS = \rho_{(aX\pm b),(cY\pm d)} &= \frac{Cov(aX\pm b, cY\pm d)}{\sqrt{V(aX\pm b)\cdot V(cY\pm d)}} \\
&= \frac{E[\{(aX\pm b)-E(aX\pm b)\}\{(cY\pm d)-E(cY\pm d)\}]}{\sqrt{V(aX)\cdot V(cY)}} \\
&= \frac{E[a\{X-E(X)\}c\{Y-E(Y)\}]}{\sqrt{a^2V(X)\cdot c^2V(Y)}} = \frac{acE[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}]}{ac\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} \\
&= \frac{E[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}]}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} = \rho_{X,Y} = RHS
\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

6-5 <u>الدالة المشتركة لتوليد العزوم :</u>

<u>Joint Moment Generating Function</u>

<u>أ – تعريف :</u>

تُعرف دالة توليد العزوم المشتركة للمتغيرين *X , Y* حول الصفر والتي يرمز لها

بالرمز $M(t_1,t_2)$ بالعلاقة التالية :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = M(t_1,t_2) = E(e^{Xt_1+Yt_2}) \quad , \quad -\infty < t_1,t_2 < \infty$$

ويتم حساب هذه الدالة حسب نوع المتغيرين كما يلي :

$$M(t_1,t_2)=E(e^{Xt_1+Yt_2})=\begin{cases}\sum\limits_x\sum\limits_y e^{xt_1+yt_2}f(x,y)\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{xt_1+yt_2}f(x,y)dydx\end{cases}\qquad(8-5)$$

بشرط أن يكون كل من المجموع والتكامل تقاربي .

ب - بعض خواص الدالة المشتركة لتوليد العزوم :

نذكر منها ما يلي :

$$(1)\ M_{X,Y}(0,0)=1,\quad (2)\ M_{X,Y}(t_1,0)=M_X(t_1),\quad (3)\ M_{X,Y}(0,t_2)=M_Y(t_2),$$

$$(4)\ \frac{\partial^{r_1}M(t_1,t_2)}{\partial t_1^{r_1}}\Big\downarrow_{t_1=t_2=0}=E(X^{r_1})$$

$$(5)\ \frac{\partial^{r_2}M(t_1,t_2)}{\partial t_2^{r_2}}\Big\downarrow_{t_1=t_2=0}=E(Y^{r_2})$$

$$(6)\ \frac{\partial^{r_1+r_2}M(t_1,t_2)}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}}\Big\downarrow_{t_1=t_2=0}=E(X^{r_1}Y^{r_2})$$

حيث r_1,r_2 عددين صحيحين . ويُسمى العزم في (6) بالعزم المشترك

ذو الرتبة r_1+r_2

حول نقطة الأصل (الصفر) للمتغيرين X, Y .

ج – طريقة توليد العزوم الحدية (الهامشية) والعزوم المشتركة :

بنفس الطريقة السابقة في التوزيعات ذات المتغير الواحد يمكن أن تُولد العزوم الحدية أو المشتركة بإحدى طريقتين هما :

أولاً باستخدام المشتقة :-

إذا كانت الدالة $M(t_1,t_2)$ موجودة وقابلة للاشتقاق فإن الخواص (4, 5, 6) أعلاه

تُعطي العزوم :

$$\mu'_{r_1}=E(X^{r_1})\,,\quad \mu'_{r_2}=E(Y^{r_2})\,,\quad \mu'_{r_1,r_2}=E(X^{r_1}Y^{r_2})$$

على الترتيب .

<u>ثانياً: باستخدام مفكوك مكلورين</u> وذلك كالتالي:

$$\because e^{Xt_1+Yt_2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xt_1+yt_2)^k}{k!}$$

$$\therefore M(t_1,t_2)=E(e^{Xt_1+Yt_2})=E[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xt_1+yt_2)^k}{k!}]$$

$$=E[1+(Xt_1+Yt_2)+\frac{(Xt_1+Yt_2)^2}{2!}+$$

$$\frac{(Xt_1+Yt_2)^3}{3!}+\cdots+\frac{(Xt_1+Yt_2)^r}{r!}+\cdots]$$

$$\therefore M(t_1,t_2)=1+t_1E(X)+t_2E(Y)+E[\frac{(Xt_1+Yt_2)^2}{2!}]$$

$$+E[\frac{(Xt_1+Yt_2)^3}{3!}]+\cdots+E[\frac{(Xt_1+Yt_2)^r}{r!}]+\cdots$$

$$\therefore M(t_1,t_2)=1+t_1E(X)+t_2E(Y)+\frac{t_1^2}{2!}E(X^2)+\frac{t_2^2}{2!}E(Y^2)$$

$$+\frac{2t_1t_2}{2!}E(XY)+\frac{t_1^3}{3!}E(X^3)+\frac{t_2^3}{3!}E(Y^3)+\frac{3t_1^2t_2}{3!}E(X^2Y)$$

$$+\frac{3t_1t_2^2}{3!}E(XY^2)+\cdots+E[\frac{(Xt_1+Yt_2)^r}{r!}]+\cdots$$

نلاحظ أن العزوم $\mu'_{r_1}=E(X^{r_1})\,,\quad \mu'_{r_2}=E(Y^{r_2})\,,\quad \mu'_{r_1,r_2}=E(X^{r_1}Y^{r_2})$

موجودة في المفكوك أعلاه .

مثال (5-3) :

لمثال (5- 1) احسب كل مما يلي:-

$$(1)\ V(X-Y)\ ,\quad (2)\ Cov(2X,3Y)\ ,\quad (3)\ \rho_{X,Y}\ ,\quad (4)\ \rho_{2X,3Y}\ ,\quad (5)\ M_{X,Y}(t_1,t_2)$$

ثم احسب منها *E(X)* .

الحل :

سوف نستفيد من الحسابات في مثال (5- 1) كما يلي:-

$$(1) \because V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y)$$
$$\because Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=1.75-(1.8)(1.05)=-0.14$$
$$\therefore V(X-Y)=0.96+9.0475-2(-0.14)=10.2875 \quad .$$

$$(2)\ Cov(2X,3Y)=(2)(3)Cov(X,Y)=6(-0.14)=-0.84\ .$$

$$(3)\ \rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-0.14}{(0.98)(3.01)}=-0.047 \quad .$$

$$(4)\ \rho_{2X,3Y}=\rho_{X,Y}=-0.047 \quad .$$

$$(5) \because M_{X,Y}(t_1,t_2)=\sum_x\sum_y e^{xt_1+yt_2}f(x,y)$$
$$=e^{t_1-2t_2}f(1,-2)+e^{t_1}f(1,0)+e^{t_1+5t_2}f(1,5)$$
$$+e^{3t_1-2t_2}f(3,-2)+e^{3t_1}f(3,0)+e^{3t_1+5t_2}f(3,5) \quad .$$

$$\therefore\ M_{X,Y}(t_1,t_2)=0.15e^{t_1-2t_2}+0.25e^{t_1}+0.2e^{t_1+5t_2}$$
$$+0.2e^{3t_1-2t_2}+0.05e^{3t_1}+0.15e^{3t_1+5t_2} \quad .$$

$$\because E(X)=\frac{\partial M(t_1,t_2)}{\partial t_1}\downarrow_{t_1=t_2=0}$$

$$\therefore\ E(X)=\{0.15e^{t_1-2t_2}(1)+0.25e^{t_1}(1)+0.2e^{t_1+5t_2}(1)$$
$$+0.2e^{3t_1-2t_2}(3)+0.05e^{3t_1}(3)+0.15e^{3t_1+5t_2}(3)\}\downarrow_{t_1=t_2=0}$$
$$=0.15+0.25+0.2+0.6+0.15+0.45=1.8\quad .$$

وهو ما تم الحصول عليه سابقاً من العلاقة $E(X)=\sum xf(x)$. لاحظ أن التغاير أعلاه سالب ؟

<u>مثال (4-5) :</u> لمثال (2-5) احسب كل مما يلي:-

$$(1)\ Cov(X,Y)\ ,\quad (2)\ V(X+Y)\ ,\quad (3)\ \rho_{X,Y}$$

<u>الحل :</u> سوف نستفيد من الحسابات في مثال (5- 2) كما يلي:-

$$(1)\ \because Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$\therefore E(XY)=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{8}xy(x+y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2(x^2y+xy^2)dydx=\quad .$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2[x^2\frac{y^2}{2}+x\frac{y^3}{3}]_0^2dx=\frac{1}{8}\int_0^2[x^2\frac{4}{2}+x\frac{8}{3}]dx=$$

$$=\frac{1}{8}[2\frac{x^3}{3}+\frac{8x^2}{(3)2}]_0^2=[\frac{2}{3}+\frac{2}{3}]=\frac{4}{3}=1.333$$

$$\therefore\quad Cov(X,Y)=\frac{4}{3}-(\frac{7}{6})(\frac{7}{6})=\frac{-1}{36}=-0.028\ .$$

$$(2)\ \because V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$\therefore V(X+Y)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2(\frac{-1}{36})=\frac{20}{36}=0.56$$

$$(3)\ \rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\frac{-1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}\frac{11}{36}}}=\frac{-1}{11}=-0.091\quad .$$

5 – 7 تمارين على الفصل الخامس :

(1) أثبت أن التغاير هو: $\sigma_{X,Y} = Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(2) أثبت العلاقة : $Cov(X,Y) = \frac{1}{2}\{V(X) + V(Y) - V(X-Y)\}$

(3) أثبت كل مما يلي : $(1)\ \rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}\ ,\ (2)\ \rho_{X,X} = 1\ ,\ (3)\rho_{X,-X} = -1$

(4) أثبت كل مما يلي :

$$(1)\ M_{X,Y}(0,0) = 1\ ,\ (2)\ M_{X,Y}(t_1,0) = M_X(t_1)\ ,\ (3)\ M_{X,Y}(0,t_2) = M_Y(t_2)$$

(5) احدى شعب مقررات الاحصاء بها عشرة طلاب ، ثلاثة منهم تخصص احصاء وثلاثة منهم تخصص رياضيات والباقي تخصص حاسب . أُختير اثنان من طلاب الشعبة بطريقة عشوائية فإذا عُرف المتغيران : $X=$ عدد من تخصصه احصاء في العينة و $Y=$ عدد من تخصصه حاسب في العينة . المطلوب هو:

(I) – إيجاد كل من:

(أ) مجموعة القيم الممكنة للمتغيرين (X,Y) . (ب) التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين (X,Y) . (ج) التوزيع الاحتمالي الهامشي كل من المتغيرين X,Y .

(II) حساب كل من :

$$(1)\ P(X+Y \le 1)\ ,\quad (2)\ F(0,3)\ ,\quad (3)\ Cov(X,Y)$$
$$(4)\ V(X+Y)\ ,\qquad (5)\ \rho_{X,Y}\ ,\qquad (6)\ M_{X,Y}(t_1,t_2)\ .$$

(6) (أ) برهن أن التغاير بين متغيرين عشوائيين aX, bY حيث a,b مقادير ثابتة يعطى بالعلاقة: $Cov(aX,bY) = ab\ \ Cov(X,Y)$

(ب) إذا كانت دالة الكثافة الإحتمالية المشتركة للمتغيرين *X,Y* هي

$$f(x,y)=\frac{x+y}{8} \quad , \quad 0\le x\,,y<2 \quad .$$

احسب ما يلي :

$$(1)\ f_X(x)\,,\ f_Y(y)\,,\quad (2)\ F(1,1)\,,\quad (3)\ Cov(X,Y)$$

$$(4)\ V(X+Y)\,,\quad (5)\ \rho_{X,Y}\ ,\quad (6)\ E(\frac{X}{X+Y})\,.$$

الفصل السادس

التوزيع الشرطي Conditional Distribution

6 – 1 مقدمة :

نعلم من مبدأ الاحتمال الشرطي أنه لأي حادثتين غير خاليتين *A* و *B* نجد أن :

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad , \quad (1-6)$$

وأن المتغيرات العشوائية تولد فضاء عينة وحوادث مثل :

$$A=\{X=x\}\,,\quad B=\{Y=y\}\,,\quad C=\{X\le x\}\,,\cdots$$

بالتعويض في العلاقة (1-6) أعلاه نجد أن :

$$P(X=x\,|\,Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} \quad , \quad (2-6)$$

وبفرض *f(*)* هي دالة احتمالية ، نجد أن العلاقة (2-6) يمكن أن تُكتب كالتالي :

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

6 – 2 الدالة الاحتمالية الشرطية Conditional Probability Function:

تعريف :

إذا كان للمتغيرين *X,Y* دالة الاحتمال المشتركة *f(x,y)* والدوال الهامشية *f(x)*

و *f(y)* فإن دالة الاحتمال الشرطية للمتغير *X* هي :

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}, \quad f(y) > 0 \qquad (3-6)$$

بشرط أن يتحقق الشرطان التاليان حسب نوع المتغيرين :

$$(i) \quad f(x \mid y) \geq 0\,, \quad \forall x, y\,. \quad (ii) \begin{cases} \sum_{x} f(x \mid y) = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid y)\,dx = 1 \end{cases}$$

مثال (6-1) :

إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين (*X* , *Y*) هي كما في الجدول التالي :

$f(x,y)$		y		
		2	3	4
	1	1/12	1/6	0
	2	1/6	0	1/3

المطلوب : حساب قيمة كل من :

(1) الدوال الهامشية $f_X(x)\,,\, f_Y(y)$.

(2) التوزيع الشرطي للمتغير *X* .

(3) $P(\{X = 2\} \cup \{Y = 4\})$

x	3	1/12	1/6	0

$P(X=1|Y<4)$ (4)

الحل :

(1) الدوال الهامشية $f_X(x)\,,\,f_Y(y)$ هما كما في الجدولين التاليين :

y	2	3	4
$f_Y(y)$	1/3	1/3	1/3

x	1	2	3
$f_X(x)$	1/4	1/2	1/4

(2) لكتابة التوزيع نحسب أولاً قيم الدالة الاحتمالية الشرطية كما يلي :

$$f_{X|Y}(1|2)=\frac{f(1,2)}{f(2)}=\frac{1/12}{1/3}=1/4 \quad , f(2|2)=\frac{f(2,2)}{f(2)}=\frac{1/6}{1/3}=1/2 \quad ,$$

$$f(3|2)=\frac{f(3,2)}{f(2)}=\frac{1/12}{1/3}=1/4 \quad , f(1|3)=\frac{f(1,3)}{f(3)}=\frac{1/6}{1/3}=1/2 \quad ,$$

$$f(2|3)=\frac{f(2,3)}{f(3)}=\frac{0}{1/3}=0 \quad , f(3|3)=\frac{f(3,3)}{f(3)}=\frac{1/6}{1/3}=1/2 \quad ,$$

$$f(1|4)=\frac{f(1,4)}{f(4)}=\frac{0}{1/3}=0 \quad , f(2|4)=\frac{f(2,4)}{f(4)}=\frac{1/3}{1/3}=1 \quad ,$$

$$f(3|4)=\frac{f(3,4)}{f(4)}=\frac{0}{1/3}=0 \quad .$$

وعليه فإن التوزيع الشرطي للمتغير X هو كما في الجدول أدناه :

$f_{X\|Y}(x\|y)$		y		
		2	3	4
	1	1/4	1/2	0

x	2	1/2	0	1
	3	1/4	1/2	0

لاحظ أن الدوال الشرطية الهامشية للمتغير X ($f_{X|Y}(x\,|\,y)$) هي كما في الجداول التالية :

x	1	2	3
$f_{X\|2}(x\,\|\,2)$	1/4	1/2	1/4

x	1	2	3
$f_{X\|3}(x\,\|\,3)$	1/2	0	1/2

x	1	2	3
$f_{X\|4}(x\,\|\,4)$	0	1	0

(3) المطلوب هو:

$$\because P(\{X=2\}\bigcup\{Y=4\}) = P(X=2)+P(Y=4)-P[\{X=2\}\bigcap\{Y=4\}]$$

$$\therefore P(\{X=2\}\bigcup\{Y=4\}) = f_X(2)+f_Y(4)-f_{X,Y}(2,4)$$

$$=(1/2)+(1/3)-(1/3)=1/2 \quad .$$

(4) المطلوب هو:

$$P(\{X=1\,|\,Y<4\}) = \frac{P(\{X=1\}\bigcap\{Y<4\})}{P(Y<4)}$$

$$=\frac{f_{X,Y}(1,2)+f_{X,Y}(1,3)}{f_Y(2)+f_Y(3)}=\frac{(1/12)+(1/6)}{(1/3)+(1/3)}=\frac{3}{8} \quad .$$

3 – 6 دالة التوزيع الشرطية : Conditional Distribution Function:

تعريف :

يرمز لدالة التوزيع الشرطية للمتغير X بالرمز $F(x\,|\,y)$ وتُعرف بالعلاقة التالية:

$$F(x\,|\,y) = P(X \le x\,|\,Y = y) \qquad (4-6)$$

وتُحسب حسب نوع المتغير X كما يلي :

$$F(x\,|\,y) = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{x} f(u\,|\,y) \\ \int\limits_{-\infty}^{x} f(u\,|\,y)du \end{cases}$$

ملاحظات :

(1) خواص $F(x|y)$ تطابق خواص $F(x,y)$ و$F(x)$.

(2) $\frac{\partial}{\partial x} F(x\,|\,y) = f(x\,|\,y)$

مثال (6-2) : إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة هي :

$$f(x,y) = 2 \quad , \quad 0 < x < y < 1 \quad .$$

فاحسب كل من :

(1) $f(x)$, (2) $f(y)$, (3) $F(x\,|\,y)$, (4) $F(y\,|\,x)$,
(5) $f(x\,|\,y)$, (6) $f(y\,|\,x)$.

الحل :

$$(1)\ f(x)=\int_x^1 f(x,y)dy = 2\int_x^1 dy = 2[y]_x^1 = 2(1-x)\,.$$

$$\therefore\ f_X(x)=2(1-x)\,,\quad 0<x<1\quad .$$

$$(2)\ f(y)=\int_0^y f(x,y)dx = 2\int_0^y dx = 2[x]_0^y = 2y\,.$$

$$\therefore\ f_Y(y)=2y\,,\quad 0<y<1\quad .$$

$$(3)\ F(x\,|\,y)\equiv P(X\le x\,|\,Y=y)$$

$$=\int_0^x f(u\,|\,y)du=\int_0^x \frac{f(u,y)}{f(y)}du=\frac{1}{2y}\int_0^x 2du=\frac{1}{y}[u]_0^x=\frac{x}{y}\,.$$

$$\therefore F(x\,|\,y)=\frac{x}{y}\ ,\quad 0<x<y<1\quad .$$

ويمكن أن نكتبها بالصيغة التالية :

$$F(x\,|\,y)=\begin{cases}0 & ,\quad x<0\\ \dfrac{x}{y} & ,\quad 0<x<y<1\\ 1 & ,\quad 1\le y\end{cases}$$

$$(4)\ F(y\,|\,x)=\int_x^y f(v\,|\,x)dv=\int_x^y \frac{f(x,v)}{f(x)}dv=\frac{1}{2(1-x)}\int_x^y 2dv=\frac{1}{1-x}[v]_x^y$$

$$=\frac{y-x}{1-x}\quad\Rightarrow\quad F(y\,|\,x)=\frac{y-x}{1-x}\ ,\quad 0<x<y<1\quad .$$

ويمكن أن نكتبها بالصيغة التالية :

$$F(y\,|\,x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ \dfrac{y-x}{1-x} & , \quad 0<x<y<1\\ 1 & , \quad 1\le y\end{cases}$$

(5) لإيجاد دالة الاحتمال الشرطي فإنه يمكننا استخدام تعريف الاحتمال الشرطي أو استخدام الاشتقاق كما في الملاحظة أعلاه كاتالي :

$$f(x\,|\,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{f(y)}=\dfrac{2}{2y}=\dfrac{1}{y} & , \quad 0<y<1 \quad .\\ \dfrac{\partial}{\partial x}F(x\,|\,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x}{y})=\dfrac{1}{y} & , \quad 0<y<1 \quad .\end{cases}$$

$$(6)\quad f(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{f(x)}=\dfrac{2}{2(1-x)}=\dfrac{1}{1-x} & , \quad 0<x<1 \quad .\\ \dfrac{\partial}{\partial y}F(y\,|\,x)=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{y-x}{1-x})=\dfrac{1}{1-x} & , \quad 0<x<1 \quad .\end{cases}$$

6– 4 التوقع الشرطي : Conditional Expectation

تعريف:

إذا كان المتغيران X,Y معرفين على نفس الفضاء الاحتمالي لهما توزيع احتمالي مشترك فإن التوقع الشرطي لدالة *g(x)* مشروطاً بقيمة *Y=y* يُعرف ويحسب (حسب نوع المتغيرين) بالعلاقة التالية :

$$E(g(X)\,|\,Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_{x} g(x)\,f(x\,|\,y)\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x\,|\,y)dx\end{cases} \qquad (5-6)$$

بشرط أن يكون كل من المجموع والتكامل تقاربي ، حيث $f(x\,|\,y)$ هي دالة الاحتمال الشرطي للمتغير X

<u>بعض الحالات الخاصة للدالة *g(x)* :</u>

1 – إذا كانت $g(X) = X$ فإن:

$$E(g(X)\,|\,Y = y) = E(X\,|\,Y = y) \equiv \mu_{X|Y}$$

وهوالتوقع الشرطي للمتغير X ، <u>يُعتبر هذا التوقع متغيراً في</u>Y ويرمز له أيضا بعدة رموز نذكر منها: $E_{X|Y}(X)$, $E(X\,|\,Y)$.

2 – إذا كانت $g(X) = (X - \mu_{X|y})^2$ فإن:

$$E(g(X)\,|\,Y = y) = E[(X - \mu_{X|Y})^2\,|\,Y = y] \equiv \sigma^2_{X|Y}$$

وهوالتباين الشرطي للمتغير X ، <u>يُعتبر هذا التباين متغيراً في</u>Y ويرمز له أيضا بعدة رموز نذكر منها: $V_{X|Y}(X)$, $V(X\,|\,Y)$.

ويمكن أن نكتب التباين الشرطي للمتغير X بالصيغة التالية :

$$V(X\,|\,Y) = E(X^2\,|\,Y) - (E(X\,|\,Y))^2 \quad .$$

3 – إذا كانت $g(X) = X^r$ فإن:

$$E(g(X)\,|\,Y = y) = E(X^r\,|\,Y = y) \equiv \mu'_{r(X|Y)}$$

وهوالعزم الشرطي حول نقطة الأصل ذو الرتبة r للمتغير X .

<u>نظرية (6-1-4) :</u>

إذا كان المتغيران X,Y لهما توزيع احتمالي مشترك فإن :

$$E[E(X\mid Y)]=E(X)$$

هذا يعني أن التوقع للمتغير $E(X\mid Y)$ (في Y) هو نفس التوقع الهامشي للمتغير X .

وبالمثل إذا كان المتغيران X,Y لهما توزيع احتمالي مشترك فإن :

$$E[E(Y\mid X)]=E(Y)$$

<u>البرهان:</u> سوف نبرهن النظرية في حالة أن المتغيرات مستمرة كما يلي :

$$\because E(X\mid Y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\mid Y=y)dx$$

$$\therefore LHS=E(E(X\mid Y=y))=\int_{-\infty}^{\infty}E(X\mid Y=y)f(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\mid Y=y)dxf(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{f(x,y)}{f(y)}dxf(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=E(X)=RHS.$$

<u>نظرية (4-2-6) :</u>

إذا كان المتغيران X,Y لهما توزيع احتمالي مشترك فإن :

$$V(X)=E_Y[V(X\mid Y)]+V_Y[E(X\mid Y)]$$

هذا يعني أن التباين الهامشي للمتغير X هو مجموع : متوسط التباين الشرطي $V(X|Y)$ وتباين التوقع الشرطي $E(X\mid Y)$ ، وبالمثل إذا كان المتغيران X,Y لهما توزيع احتمالي مشترك فإن :

$$V(Y)=E_X[V(Y\mid X)]+V_X[E(Y\mid X)]$$

مثال (3-6) : إذا كان لدينا دالة الاحتمال الشرطي :

$$f(x\mid y)=\frac{1}{y} \quad , \quad 0<x<y<1 \quad .$$

فاحسب كل من :

$$(1)\, E(X\mid Y=y)\,, \qquad (2)\, V(X\mid Y=y)$$

الحل :

$$(1)\, E(X\mid Y=y)=\int_0^y xf(x\mid y)dx=\frac{1}{y}\int_0^y xdx=\frac{1}{2y}[x^2]_0^y=\frac{y}{2}\,,$$

$$\therefore E(X\mid Y=y)=\frac{Y}{2}, \quad 0<y<1 \quad .$$

$$(2)\ \because E(X^2\mid Y=y)=\int_0^y x^2 f(x\mid y)dx=\frac{1}{y}\int_0^y x^2dx=\frac{1}{3y}[x^3]_0^y=\frac{y^2}{3}\,.$$

$$\therefore V(X\mid Y=y)=E(X^2\mid Y=y)-(E(X\mid Y=y))^2$$

$$=\frac{y^2}{3}-(\frac{y}{2})^2=\frac{y^2}{12} \quad ,$$

$$\therefore V(X\mid Y=y)=\frac{Y^2}{12} \quad , \quad 0<y<1 \quad .$$

6– 5 الدالة المولدة للعزوم الشرطية :

Moment Generating Function for Conditional Distributions :

تعريف:

إذا كان للمتغيرين X,Y توزيع احتمالي مشترك و $f(x|y)$ هي دالة الاحتمال الشرطي للمتغير X فإن الدالة المولدة لعزوم التوزيع الشرطي (إذا كانت موجودة) تُعرف وتحسب (حسب نوع المتغيرين) بالعلاقة التالية :

$$M_{X|Y}(t) \equiv E(e^{Xt} \mid Y=y) = \begin{cases} \sum_x e^{xt} f(x \mid Y=y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x \mid Y=y)dx \end{cases}$$

بشرط أن يكون كل من المجموع والتكامل تقاربي ،

بعض الخواص :

(1) $M_{X|Y}(0)=1$.

(2) $\frac{\partial^r}{\partial t^r} M_{X|Y}(t)\downarrow_{t=0} = M_{X|Y}^{(r)}(0) = E(X^r \mid Y=y) = \mu'_{r(X|Y)}$

وهو العزم الشرطي ذو الرتبة r حول نقطة الأصل للمتغير X مُعطى $Y=y$.

مثال (6-4) : إذا كان لدينا دالة الاحتمال الشرطي:

$$f(x|y) = \frac{1}{y} \quad , \quad 0<x<y<1$$

فإحسب $M_{X|Y}(t)$ ثم احسب منها كل من :

$$(1)\ E(X \mid Y=y)\,, \qquad (2)\ V(X \mid Y=y) \quad .$$

<u>الحل :</u>

$$M_{X|Y}(t) = E(e^{xt} \mid Y=y) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x \mid y)dx = \frac{1}{y}\int_{0}^{y} e^{xt}dx = \frac{1}{y}[\frac{e^{xt}}{t}]_0^y = \frac{e^{yt}-1}{yt} .$$

$$\therefore M_{X|Y}(t) = \frac{e^{yt}-1}{yt} \quad .$$

$$\Rightarrow M_{X|Y}(t) = (\frac{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(yt)^r}{r!}-1}{yt})$$

$$= \frac{1}{yt}[(1+\frac{yt}{1!}+\frac{(yt)^2}{2!}+\cdots+\frac{(yt)^r}{r!}+\cdots)-1]$$

$$= \frac{1}{yt}[\frac{yt}{1!}+\frac{(yt)^2}{2!}+\cdots+\frac{(yt)^r}{r!}+\cdots]$$

$$= 1+\frac{yt}{2!}+\frac{(yt)^2}{3!}+\cdots+\frac{(yt)^r}{(r+1)!}+\cdots$$

$$\because \quad \frac{(yt)^r}{(r+1)!} = \frac{y^r}{r+1}\,\frac{t^r}{r!} \quad \Rightarrow \quad \mu'_{r(X|Y)} = \frac{y^r}{r+1} \quad \Rightarrow$$

$$(1)\; E(X\,|Y=y) = \frac{y}{2}, \quad 0<y<1 \quad .$$

$$(2)\; V(X\,|Y=y) = E(X^2\,|Y=y) - (E(X\,|Y=y))^2$$

$$= \frac{y^2}{3} - (\frac{y}{2})^2 = \frac{y^2}{12}$$

$$\therefore \quad V(X\,|Y=y) = \frac{y^2}{12} \quad , \quad 0<y<1 \quad .$$

وهذه النتائج هي نفسها التي توصلنا إليها أثناء حل مثال (6-3) .

6 – 6 تمارين على الفصل السادس :

(1) أثبت أن دالة الاحتمال الشرطية $f(x\,|\,y)$ تُحقق الشرطين التاليين حسب نوع المتغيرين :

$$(i) \quad f(x\,|\,y) \ge 0\,, \quad \forall x, y\,. \quad (ii) \begin{cases} \sum_x f(x\,|\,y) = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,|\,y)dx = 1 \end{cases}$$

(2) لمثال (6-1) احسب التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغير Y ثم احسب $f_{Y|X}(y\,|1)$.

(3) باعتبار أن المتغيرين متقطعان أثبت أن : $E[E(Y\,|\,X)] = E(Y)$.

(4) أثبت أن : $M_{X|Y}(0) = 1$.

(5) لتكن دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X, Y هي كما في الجدول أدناه :

$f(x,y)$		Y	
		-2	2
x	1	0	0.2
	2	0.3	0
	3	0.1	0.4

والمطلوب إيجاد كل من :-

(1) دالة الكتلة الاحتمالية الشرطية *f(x|y)*

(2) *f(x|y=2)* , (3) *F(x|y=2)*

(4) *E(X|Y=2)* , (5) *V(X|Y=2)* , (6) $M_{X|2}(t)$

الفصل السابع

استقلال المتغيرات (الاستقلال التصادفى)

Independence of Variables (Stochastic Independence):-

7 – 1 مقدمة :

يمكن فهم الاستقلال التصادفي بين المتغيرات العشوائية من مفهوم الاستقلال الاحتمالي بين الحوادث .

حيث يُقال عن حادثتين غير خاليتين A و B أنهما مستقلتان إذا تحقق لهما أحد شروط الاستقلال التالية :

$$(1)\ P(A\cap B)=P(A)P(B)\,,\quad (2)\ P(A\,|\,B)=P(A)\,,\quad (3)\ P(B\,|\,A)=P(B)\,.$$

لذلك فإنه بفرض الحوادث التالية : $A\equiv\{X\le x\},\quad B\equiv\{Y\le y\}$

نستطيع أن نكتب شروط الاستقلال السابقة كالتالي :

$$\begin{aligned}
&(1)\ P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}) = P(\{X \le x\}) \cdot P(\{Y \le y\}) , \\
&(2)\ P(\{X \le x\} \mid \{Y \le y\}) = P(\{X \le x\}) , \\
&(3)\ P(\{Y \le y\} \mid \{X \le x\}) = P(\{Y \le y\}) .
\end{aligned}$$

ومنه نكتب التعريف التالي :

7 – 2 تعريف :

إذا كان لدينا المتغيران العشوائيان X , Y دالة توزيعهما المشتركة ودوالهما الهامشية هي $F(x,y) , \quad F(x) , \quad F(y)$ فيُقال أنهما مستقلان (تصادفياً) إذا تحقق لهما أحد شروط الاستقلال التالية :

$$\begin{aligned}
&(1)\ F(x,y) = F(x) \cdot F(y) , \qquad (1-7) \\
&(2)\ F(x \mid y) = F(x) , \\
&(3)\ F(y \mid x) = F(y) .
\end{aligned}$$

7 – 3 نتائج مهمة من استقلال المتغيرات :

7-3 -1 الدوال الاحتمالية المشتركة :-

إذا كان المتغيران العشوائيان X , Y مستقلين فإن النتائج التالية محققة والعكس صحيح دائماً:-

$$\begin{aligned}
&(1)\ f(x,y) = f(x) \cdot f(y) , \qquad (2-7) \\
&(2)\ f(x \mid y) = f(x) , \quad (3)\ f(y \mid x) = f(y) .
\end{aligned}$$

البرهان:

(1) بفرض الحوادث المستقلة التالية : $B \equiv \{Y = y\}$, $A \equiv \{X = x\}$ نجد أن :

$$P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=P(\{X=x\})\cdot P(\{Y=y\})$$
$$\therefore\ f(x,y)=f(x)\cdot f(y)\,.$$

وهو المطلوب .

ويُمكن أيضا (بوُجود المشتقات) أن نكتب من العلاقة (7-1) التالي :

$$\because F(x,y)=F(x)\cdot F(y)$$
$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}F(x)\cdot\frac{\partial}{\partial y}F(y)$$
$$\Rightarrow\quad f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$$

وهو المطلوب .

$$(2)\ LHS=f(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{f(x)\cdot f(y)}{f(y)}=f(x)=RHS.$$

وهو المطلوب .

(3) بالمثل , (متروك للطالب) .

3-7 -2 <u>التوقع المشترك :-</u>

إذا كان المتغيران العشوائيان $X\,,Y$ مستقلين فإن النتائج التالية محققة <u>والعكس صحيح دائماً:-</u>

$$(1)\ E(XY)=E(X)\cdot E(Y)\,,$$
$$(2)\ E(X\,|\,Y)=E(X)\,,\quad (3)\ E(Y\,|\,X)=E(Y)\,.$$

<u>**البرهان:**</u>

نبرهن النتيجة أعلاه في حالة أن المتغيرات المستقلة متصلة ونترك للطالب البرهان في الحالة المنفصلة :

$$(1)\ LHS = E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x)f(y)dydx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)E(Y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dxE(Y)$$
$$= E(X)\cdot E(Y) = RHS.$$
$$\therefore E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$$

وهو المطلوب .

$$(2)\ LHS = E(X\,|\,Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x\,|\,y)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = E(X) = RHS.$$
$$\therefore E(X\,|\,Y) = E(X).$$

وهو المطلوب .

(3) بالمثل , يترك للطالب .

3-7 -3 التباين المشترك (التغاير) :-

إذا كان المتغيران العشوائيان $X\,,\,Y$ مستقلين فإن النتائج التالية محققة لكن العكس ليس صحيحاً دائماً:-

$$(1)\ Cov(X,Y) = 0\,,$$
$$(2)\ V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)\,.$$

البرهان:

$$(1) \because Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$\therefore Cov(X,Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

$$(2) \because V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2Cov(X,Y),$$
$$\therefore V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2(0)$$
$$= V(X) + V(Y) \;.$$

وهو المطلوب .

مثال (1-7) :

إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين (X , Y) هي كما في الجدول التالي :

المطلوب :

(1) دراسة استقلال X , Y .

(2) حساب قيمة $Cov(X,Y)$.

$f(x,y)$		Y		
		-1	0	1
X	-1	1/16	3/16	1/16
	0	3/16	0	3/16
	1	1/16	3/16	1/16

الحل :

(1) لكي نحكم باستقلال (أو عدم استقلال) المتغيرين أعلاه يجب أن نتحقق من شروط الاستقلال . وعليه فإنه من الجدول أعلاه نجد أن الدوال الهامشية هي :

$$f_X(-1) = f_Y(-1) = \frac{5}{16} \quad , \quad f_X(0) = f_Y(0) = \frac{6}{16}$$
$$f_X(1) = f_Y(1) = \frac{5}{16} \quad .$$

وبدراسة أحد شروط الاستقلال وليكن مثلاً :

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \,, \forall x, y \,.$$

نجد مثلاً من الجدول أعلاه أن :

$$f(-1,-1) = \frac{1}{16} = 0.063 \neq f_X(-1) \cdot f_Y(-1) = \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{16} = 0.098 \quad .$$

إذن X,Y غير مستقلين .

<u>**ملاحظة**</u>: في هذا المثال وكل مثال فيه أحد قيم دالة الاحتمال المشتركة $f(x,y)$ يساوي الصفر نجد أن المتغيرين غير مستقلين لأن:

$$f(x,y) = 0 \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \;\; .$$

(2) لحساب قيمة *Cov(X,Y)* نجد أن :

$$\begin{aligned} E(Y) = E(X) &= (-1) f_X(-1) + (0) \; f_X(0) + (1) f_X(1) \\ &= (-1)\frac{5}{16} + (0) \; \frac{6}{16} + (1)\frac{5}{16} = 0 \end{aligned}$$

$$E(XY)=\sum_{x}\sum_{y}xyf(x,y)$$
$$=(-1)(-1)\frac{1}{16}+(-1)(0)\,\frac{3}{16}+(-1)(1)\frac{1}{16}$$
$$+(0)\,(-1)\frac{3}{16}+(0)(0)\cdot 0+(0)(1)\frac{3}{16}$$
$$+(1)\,(-1)\frac{1}{16}+(1)(0)\,\frac{3}{16}+(1)(1)\frac{1}{16}=0 \quad .$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0=0$$

مع أن المتغيرين غير مستقلين .

3-7 -4 معامل الارتباط :-

إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلين فإن النتيجة التالية محققة لكن العكس ليس صحيحاً دائماً:-

$$\rho_{X,Y}=0 .$$

البرهان:

$$\because Cov(X,Y)=0$$
$$\Rightarrow \rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=0 \quad .$$

وهو المطلوب .

3-7 -5 الدالة المشتركة لتوليد العزوم :-

إذا كان المتغيران العشوائيان X , Y مستقلين فإن النتيجة التالية محققة والعكس صحيح دائماً:-

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = M_X(t_1)\cdot M_Y(t_2)\,.$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
LHS = M_{X,Y}(t_1,t_2) &= E(e^{Xt_1+Yt_2}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt_1+yt_2} f(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt_1}e^{yt_2} f_X(x) f_Y(y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt_1} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{yt_2} f_Y(y)dy \\
&= M_X(t_1)\cdot M_Y(t_2) = RHS \quad .
\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (7-2) : ليكن X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين لهما التوزيعان التاليان :

x	1	2
$f(x)$	0.7	0.3

y	-2	5	8
$f(y)$	0.3	0.5	0.2

1 – أوجد التوزيع الاحتمالي المشترك . 2 – تحقق من أن $Cov(X,Y)=0$.

3 - احسب $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ بطريقتين: أ – باستخدام التعريف. ب – باستخدام الاستقلال .

الحل :-

1 – بما أن المتغيرين مستقلان ، إذن $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي المشترك لهما هو كما في الجدول التالي :

$f(x,y)$		y		
		-2	5	8
x	1	0.21	0.35	0.14
	2	0.09	0.15	0.06

2 – التحقق كما يلي :

$E(X) = 1(0.7)+2(0.3) = 1.3$

$E(Y) = (-2)(0.3)+5(0.5) +8(0.2)= 3.5$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xyf(x,y) \\ &= (1)(-2)(0.21)+(1)(5)(0.35)+(1)(8)(0.14) \\ &\quad +(2)(-2)(0.09)+(2)(5)(0.15)+(2)(8)(0.06) = 4.55 \end{aligned}$$

$$\because Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$
$$\therefore\ Cov(X,Y) = 4.55 - (1.3)(3.5) = 4.55 - 4.55 = 0$$

وهذا يحقق الاستقلال .

3 – حساب الدالة المشتركة لتوليد العزوم :

(أ) في أي حالة يمكن حساب الدالة المشتركة لتوليد العزوم باستخدام التعريف إذا كانت موجودة كالتالي :

$$\because M_{X,Y}(t_1,t_2) = E(e^{Xt_1+Yt_2})$$

$$\therefore M_{X,Y}(t_1,t_2)=E(e^{Xt_1+Yt_2})=0.21e^{t_1-2t_2}+0.35e^{t_1+5t_2}+0.14e^{t_1+8t_2}$$
$$+0.09e^{2t_1-2t_2}+0.15e^{2t_1+5t_2}+0.06e^{2t_1+8t_2}$$

ب – باستخدام الاستقلال من العلاقة :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=M_X(t_1)\cdot M_Y(t_2)$$

كالتالي :

$$\because M_X(t_1)=\sum_x e^{xt_1}f(x)$$
$$\therefore\quad M_X(t_1)=0.7e^{t_1}+0.3\mathrm{e}^{2t_1}$$
$$\&\ \ M_Y(t_2)=0.3e^{-2t_2}+0.5\mathrm{e}^{5t_2}+0.2e^{8t_2}\quad .$$

$$\therefore\ \ \mathrm{M}_{X,Y}(t_1,t_1)=(0.7e^{t_1}+0.3\mathrm{e}^{2t_1})\cdot(0.3e^{-2t_2}+0.5\mathrm{e}^{5t_2}+0.2e^{8t_2})$$
$$=0.21e^{t_1-2t_2}+0.35e^{t_1+5t_2}+0.14e^{t_1+8t_2}$$
$$+0.09e^{2t_1+2t_2}+0.15e^{2t_1+5t_2}+0.06e^{2t_1+8t_2}.$$

وهي نفس النتائج السابقة في (أ) .

4-7 تمارين على الفصل السابع :-

(1) إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلين ، فأثبت كل مما يلي :-

$$(1)\ \ f(y\,|\,x)=f(y)\,,\quad (2)\ E(Y\,|\,X)=E(Y)\,.$$

(2) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين لهما التوزيعان التاليان :

x	0	2	3
$f(x)$	0.25	0.5	0.25

y	-1	4	5
$f(y)$	0.333	0.5	0.167

المطلوب : 1 – أوجد التوزيع الاحتمالي المشترك . 2 – تحقق من أن $Cov(X, Y)=0$.

احسب $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ بطريقتين:أ – باستخدام التعريف. ب – باستخدام الاستقلال .

(3) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهما هي :

$$f(x,y) = xye^{-(x+y)} \;, \quad x>0 \;, \; y>0 \quad .$$

المطلوب : 1 – احسب كل من $f_X(x)\,,\; f_Y(y)$, 2 – أدرس استقلال المتغيرين Y, X ،

3 – احسب كل من $f(x\,|\,y)$, $P(X>2Y)$.

(4) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين دالة توليد العزوم المشتركة لهما هي :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{1}{1-at_1-bt_2+abt_1t_2} \;, \quad t_1<\frac{1}{a} \;, t_2<\frac{1}{b} \quad .$$

المطلوب :

1 - أوجد كل من $M_X(t_1)\,, \quad M_Y(t_2)$. 2 – أدرس استقلال المتغيرين X, Y .

الفصل الثامن

توزيعات دوال المتغيرات العشوائية (التحويلات):-

Distributions of Functions of Random Variables (Transformations):-

سنقوم بدراسة توزيعات دوال في متغيرات عشوائية من خلال عرض لأهم الأساليب المستخدمة في استنتاج توزيعات هذه الدوال . تُسمى هذه العملية أحياناً: **تحويلات المتغيرات** . تشمل الدراسة الحالات التالية :-

8 – 1 أولاً : المتغيرات المنفصلة :- Discrete Variables

8 – 1-1 التحويل في حالة متغير واحد:- The case of one variable

إذا كان *X* متغيراً دالة كتلته الاحتمالية وقيمه هي $f_X(x)\,,\quad x=x_1,x_2,\cdots.$ ،وكانت $Y\equiv g(X)$ دالة في *X* فإن *Y* متغير منفصل أيضاً وبفرض أن دالة كتلته الاحتمالية وقيمه هي $f_Y(y)\,,\quad y=g(x_1),g(x_2),\cdots.$ **ونكون عادة أمام إحدى حالتين هما :-**

(أ) الحالة الأولى :

أن تشكل الدالة $Y\equiv g(X)$ مع *X* تناظراً أُحادياً *one-to-one correspondence* الذي يعني وُجود قيمة واحدة فقط لـ X مقابل قيمة واحدة لـ *Y* وذلك لجميع قيم *Y* . عندها يمكن حساب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير *Y* كما يلي :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P(Y=y) \\ &= P(g(X)=y) \\ &= P(X=g^{-1}(y))\,,\quad g^{-1}(y)=x_1,x_2,\cdots. \\ &= f_X(g^{-1}(y))\,,\quad g^{-1}(y)=x=x_1,x_2,\cdots. \end{aligned}$$

أي أن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير *Y* هي :

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\,,\quad g^{-1}(y)=x=x_1,x_2,\cdots \qquad (1-8)$$

مثال (8-1):- إذا كان *X* متغيراً دالة كتلته الاحتمالية هي

$f_X(x)=\dfrac{x}{15}\,,\quad x=1,2,3,4,5.$ فأوجد : $f_Y(y)$ حيث *Y =X-3* .

الحل:- نتبع الخطوات التالية :

1 – نحسب قيم المتغير Y فنحصل على :

$$\because Y = X - 3\,, \quad x = 1,2,3,4,5. \quad \Rightarrow y = -2,-1,0,1,2.$$

2 – نحسب معكوس Y فنحصل على :

$$\because Y = X - 3\,, \quad \Rightarrow X = Y + 3. \quad \Rightarrow x = y + 3\,.$$

3 – نطبق العلاقة (8-1) فنحصل على المطلوب كالتالي :

$$\because\ f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))$$
$$\therefore\ f_Y(y) = f_X(y+3) = \frac{y+3}{15}\,,$$
$$\therefore\ f_Y(y) = \frac{y+3}{15}\,, \quad y = -2,-1,0,1,2.$$

وهو المطلوب .

ويمكن أن نقارن بين الدالتين بالجدول التالي :

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

y	-2	-1	0	1	2
$f_Y(y)$	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

(ب) **الحالة الثانية :**

أن لا تشكل الدالة $Y \equiv g(X)$ مع X تناظراً أُحادياً . وهذا يعني وُجود أكثر من قيمة واحدة لـ X مقابل قيمة واحدة لـ Y وذلك لجميع أو بعض قيم Y. فإذا كانت القيمة y_i مثلاً تناظرها القيم $x_{i1}, x_{i2}, \cdots x_{ir}$. عندها يمكن حساب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير Y كما يلي :

$$f_Y(y) = P(Y = y_i)$$
$$= f_X(x_{i1}) + f_X(x_{i2}) + \cdots + f_X(x_{ir}) , \qquad (2-8)$$

<u>مثال (8-2):-</u>

إذا كان X متغيراً دالة كتلته الاحتمالية هي $x = 0,1,2,3,4$. $f_X(x) = \frac{x+1}{15}$, ، فأوجد :

$f_Y(y)$ حيث $Y = (X-2)^2$.

<u>الحل:-</u> نتبع الخطوات التالية :

1 – نحسب قيم المتغير Y فنحصل على :

ماذا تلاحظ؟ . $\because Y = (X-2)^2 , \quad x = 0,1,2,3,4. \quad \Rightarrow y = 4,1,0,1,4.$

2 – نحسب معكوس Y فنحصل على :

$$\because Y = (X-2)^2 , \quad \Rightarrow \sqrt{Y} = \pm(X-2),$$
$$\Rightarrow \mp\sqrt{Y} = (X-2) , \quad \Rightarrow x = 2 \mp \sqrt{y} \quad .$$

3 – نطبق العلاقة (8-2) فنحصل على المطلوب كالتالي :

$$\because \ f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))$$
$$\therefore \ f_Y(y) = f_X(2+\sqrt{y}) + f_X(2-\sqrt{y}) \ , \quad y = 0,1,4.$$

وهو المطلوب . ونحصل على قيم الدالة كالتالي :

$$\because f_Y(y) = f_X(2+\sqrt{y}) + f_X(2-\sqrt{y}) \ , \quad y = 0,1,4.$$

$$\therefore f_Y(0) = f_X(2+\sqrt{0}) + f_X(2-\sqrt{0}) = f_X(2) = \frac{3}{15},$$

$$f_Y(1) = f_X(2+\sqrt{1}) + f_X(2-\sqrt{1}) = f_X(3) + f_X(1)$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} \quad ,$$

$$f_Y(4) = f_X(2+\sqrt{4}) + f_X(2-\sqrt{4}) = f_X(4) + f_X(0)$$

$$= \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15}.$$

ويمكن أن نقارن بين الدالتين بالجدول التالي :

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

y	0	1	4
$f_Y(y)$	3/15	6/15	6/15

<u>مثال (3-8):-</u>

إذا كان X متغيراً دالة كتلته الاحتمالية هي $f_X(x) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{x-1} \ , \quad x = 1,2,3,\cdots.$ فأوجد :

$f_Y(y)$ حيث $Y = X^2$

<u>الحل:-</u> نتبع الخطوات التالية :

1 – نحسب قيم المتغير Y فنحصل على :

ماذا تلاحظ ؟. $\because Y = X^2 \Rightarrow \quad x = 1,2,3,\cdots. \quad \Rightarrow y = 1,4,9,\cdots.$

2 – نحسب معكوس Y فنحصل على :

$$\because Y = X^2\ , \quad \Rightarrow \sqrt{Y} = \pm(X) = X,\ \Rightarrow \sqrt{y} = x \quad .$$

3 – نطبق العلاقة (8-1) فنحصل على المطلوب كالتالي :

$$\because\ f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))$$
$$\therefore\ f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})$$
$$= \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{\sqrt{y}-1} \quad , \quad y = 1,4,9,\cdots.$$

وهو المطلوب .

مثال (8-4) :

ليكن X متغيراً عشوائياً له التوزيع الاحتمالي التالي :

x	-2	-1	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.25	0.25	0.25

وليكن المتغير

$$Y = X^2$$

المطلوب :

(1) – احسب $f_Y(y)$. 　　(2) – ادرس استقلال X, Y .

(3) - احسب قيمة $Cov(X,Y)$. 　　(4) – احسب قيمة $V(X+Y)$.

الحل :- (1) – لحساب $f_Y(y)$ نتبع الخطوات التالية :

1 . نحسب قيم المتغير Y فنحصل على :

ماذا تلاحظ ؟. $\because Y = X^2 \Rightarrow x = -2,-1,1,2. \quad \Rightarrow y = 4,1,1,4.$

2 . نحسب معكوس Y فنحصل على :

$$\because Y = X^2 \ , \quad \Rightarrow \sqrt{Y} = \pm X \ , \ \Rightarrow \mp \sqrt{y} = x \quad .$$

3 . نطبق العلاقة (8-2) فنحصل على المطلوب كالتالي :

$$\because\ f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))$$
$$\therefore\ f_Y(y) = f_X(+\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \qquad , \quad y = 1,4.$$

وهو المطلوب . ونحصل على قيم الدالة كالتالي :

$$\because\ f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \ , \quad y = 1,4.$$
$$\therefore\ f_Y(1) = f_X(\sqrt{1}) + f_X(-\sqrt{1}) = f_X(1) + f_X(-1)$$
$$= 0.25 + 0.25 = 0.5 \,,$$
$$f_Y(4) = f_X(\sqrt{4}) + f_X(-\sqrt{4}) = f_X(2) + f_X(-2)$$
$$= 0.25 + 0.25 = 0.5 \quad .$$

y	1	4	ويمكن أن نكتب التوزيع كما في الجدول المقابل:
$f_Y(y)$	0.5	0.5	

(2) – لدراسة الاستقلال نحسب $f_{X,Y}(x,y)$ بواسطة تكافؤ الحوادث كما يلي :

$$\because Y = X^2 \ , x = -2,-1,1,2 \Rightarrow$$
$$\{X = -2, Y = 1\} = \phi \Rightarrow f_{X,Y}(-2,1) = 0 \,,$$
$$\{X = -2, Y = 4\} = \{X = -2\} \Rightarrow f_{X,Y}(-2,4) = f_X(-2) = 0.25 \,,$$
$$\{X = -1, Y = 1\} = \{X = -1\} \Rightarrow f_{X,Y}(-1,1) = f_X(-1) = 0.25 \,,$$
$$\{X = -1, Y = 4\} = \phi \Rightarrow f_{X,Y}(-1,4) = 0 \,,$$
$$\{X = 1, Y = 1\} = \{X = 1\} \Rightarrow f_{X,Y}(1,1) = f_X(1) = 0.25 \,,$$

$$\{X=1,Y=4\}=\phi \Rightarrow f_{X,Y}(1,4)=0\,,$$
$$\{X=2,Y=1\}=\phi \Rightarrow f_{X,Y}(2,1)=0\,,$$
$$\{X=2,Y=4\}=\{X=2\} \Rightarrow f_{X,Y}(2,4)=f_X(2)=0.25.$$

وعليه فإنه من القيم أعلاه نجد أنه مثلاً :

$$f_{X,Y}(-1,1) \neq f_X(-1)\cdot f_Y(1)$$
$$\ni \; 0.25 \neq (0.25)\cdot(0.5)$$

وهذا يعني أن $X\,,Y$ غير مستقلين . وهو المطلوب .

ويمكن أن نكتب التوزيع الاحتمالي المشترك لهما هو كما في الجدول التالي :

$f(x,y)$		y		$f_X(x)$
		1	4	
x	-2	0	0.25	0.25
	-1	0.25	0	0.25
	1	0.25	0	0.25
	2	0	0.25	0.25
$f_y(y)$		0.5	0. 5	1

(3) - لحساب قيمة $Cov(X,Y)$ نجد أنه :

$$\because E(XY)=\sum_x\sum_y xyf_{X,Y}(x,y)$$
$$=(0)+(-2)(4)(0.25)+-1(1)(0.25)+(0)$$
$$=(1)(1)(0.25)+0+0+(2)(4)(0.25)=0$$

$$\because E(X)=\sum_x xf_X(x)=-2(0.25)+(-1)(0.25)$$
$$+(1)(0.25)+(2)(0.25)=0$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=0-0\cdot E(Y)=0 \quad .$$

مع أن X,Y غير مستقلين , وهو المطلوب .

(4) - لحساب قيمة $V(X+Y)$ نجد أنه :

$$\because E(X^2)=\sum_x x^2 f_X(x)$$
$$=4(0.25)+(1)(0.25)+(1)(0.25)+(4)(0.25)=2.5$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=2.5-(0)^2=2.5 \quad .$$

$$E(Y)=\sum_y yf_Y(y)=(1)(0.5)+(4)(0.5)=2.5 \,.$$
$$E(Y^2)=\sum_y y^2 f_Y(y)=(1)^2(0.5)+(4)^2(0.5)=8.5$$
$$\therefore V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$$
$$=8.5-(2.5)^2=2.25 \quad .$$

$$\because V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$$
$$\therefore V(X+Y)=2.5+2.25+2(0)=4.75 \quad .$$

8 – 1-2 التحويل فى حالة متغيرين منفصلين:

The case of two variables:

بفرض أن X_1, X_2 متغيرين منفصلين دالة كتلتهما الاحتمالية المشتركة هي $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ وهما معرفان على فضاء عينة ثُنائي $\Omega_{X_1X_2}$ وبفرض أن الدالتين $Y_1 = g_1(x_1,x_2)\ , Y_2 = g_2(x_1,x_2)$ يمثل كل منهما تطبيقاً يطبق $\Omega_{X_1X_2}$ على $\Omega_{Y_1Y_2}$ بحيث أن لكل زوج (x_1,x_2) زوج واحد فقط (y_1,y_2) معرف في $\Omega_{Y_1Y_2}$ وبفرض أن معكوس المتغيرين g_1, g_2 بواسطة هذا التطبيق هما w_1, w_2 بحيث إن : $w_1(y_1,y_2) = x_1\ , w_2(y_1,y_2) = x_2$ فإن دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين Y_1, Y_2 تُحسب كالتالي :

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) \\ &= P(g_1(X_1,X_2) = y_1, g_2(X_1,X_2) = y_2) \\ &= P(X_1 = w_1(y_1,y_2), X_2 = w_2(y_1,y_2)) \\ &= f_{X_1,X_2}(w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)) \quad . \end{aligned}$$

أي أن دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين Y_1, Y_2 هي :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)) \quad . \quad (3-8)$$

وهذا يعني أننا نحصل على دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين Y_1, Y_2 بالتعويض بالمعكوس في دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 في مثل هذه الحالة .

مثال (8-5) :

إذا كان للمتغيرين X_1, X_2 دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة هي كما في الجدول أدناه :

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$		x_2			
		0	1	2	3
x_1	0	0.06	0.07	0.11	0.07
	1	0.08	0.09	0.12	0.09
	2	0.06	0.08	0.10	0.07

فإحسب التوزيع الاحتمالي للمتغير Y حيث :

$$Y = X_1 + X_2$$

<u>الحل :</u> قيم المتغيرات هي :

$$X_1(w) = \{0,1,2\} \text{ , } X_2(w) = \{0,1,2,3\} \Rightarrow Y(w) = \{0,1,2,3,4,5\}$$

نحسب قيم الدالة الاحتمالية $f_Y(y)$ للمتغير Y باستخدام تكافؤ الحوادث كما يلي:

$$\because\ f_Y(y) \equiv P(Y=y)$$

$$\therefore\ f_Y(0) = P(X_1=0, X_2=0) = f_{X_1,X_2}(0,0) = 0.06\,,$$

$$f_Y(1) = P(X_1=0, X_2=1) + P(X_1=1, X_2=0)$$
$$= f_{X_1,X_2}(0,1) + f_{X_1,X_2}(1,0) = 0.07 + 0.08 = 0.15\,,$$

$$f_Y(2) = f_{X_1,X_2}(0,2) + f_{X_1,X_2}(1,1) + f_{X_1,X_2}(2,0)$$
$$= 0.06 + 0.09 + 0.11 = 0.26\,,$$

$$f_Y(3) = f_{X_1,X_2}(0,3) + f_{X_1,X_2}(1,2) + f_{X_1,X_2}(2,1)$$
$$= 0.07 + 0.12 + 0.08 = 0.27\,,$$

$$f_Y(4) = f_{X_1,X_2}(1,3) + f_{X_1,X_2}(2,2) = 0.09 + 0.10 = 0.19\,,$$

$$f_Y(5) = f_{X_1,X_2}(2,3) = 0.07 \quad .$$

ومنه فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير Y هو كما في الجدول التالي :

y	0	1	2	3	4	5
$f_Y(y)$	0.06	0.15	0.26	0.27	0.19	0.07

و هو المطلوب .

8 – 1 -1-2 حالات الاستقلال :-

نظرية (8 - 1):

إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين منفصلين مستقلين دالة الكتلة الاحتمالية لكل منهما هي $f_{X_1}(x_1)\,,\ f_{X_2}(x_2)$ على التوالي ، فإن دالة الكتلة الاحتمالية لمجموعهما المتغير $Y = X_1 + X_2$ تُعطى بالعلاقة :

$$f_Y(y) = \sum_{x_1} f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(y - x_1)\,, \qquad (4-8)$$

البرهان:

$$LHS = f_Y(y) = P(Y=y) = P(X_1 + X_2 = y)$$
$$= P(X_2 = y - x_1) = f_{X_2}(y - x_1)$$

$$\because\ f_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2) = \sum_{x_1} f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)$$
$$\therefore\ f_Y(y) = f_{X_2}(y - x_1) = \sum_{x_1} f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(y - x_1) = RHS\ .$$

وهو المطلوب .

مثال (8 - 6): بفرض أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين منفصلين مستقلين لكل منهما توزيع بواسون بالمعالم $\lambda\ ,\theta$ على التوالي ، أوجد توزيع مجموعهما المتغير

$$Y = X_1 + X_2$$

الحل: من المعطيات نجد أن التوزيع الاحتمالي للمتغيرين X_1, X_2 هما :

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!}\quad ,\quad x_1 = 0,1,2,3,\cdots\quad ,$$
$$f_{X_2}(x_2) = \frac{\theta^{x_2} e^{-\theta}}{x_2!}\quad ,\quad x_2 = 0,1,2,3,\cdots\quad .$$

من النظرية (8-1) وبتطبيق العلاقة (8-4) نجد أن :

$$f_Y(y) = \sum_{x_1} f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(y - x_1)$$

ولحساب $f_Y(y)$ نحسب قيم المتغيرين $X_1, Y - X_1$ كالتالي :

$$f_{X_1}(x_1) > 0 \Rightarrow x_1 = 0,1,2,3,\cdots. \;,$$
$$f_{X_2}(x_2) = f_{X_2}(y - x_1) > 0 \Rightarrow y - x_1 = 0,1,2,\cdots \quad \Rightarrow x_1 = 0,1,2,\cdots,y\,.$$
$$\therefore f_{X_2}(x_2) = f_{X_2}(y - x_1) = \frac{\theta^{y-x_1}e^{-\theta}}{(y-x_1)!} \quad , x_1 = 0,1,2,\cdots,y\,.$$

وعليه فإن :

$$f_Y(y) = \sum_{x_1} f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(y - x_1)$$
$$= \sum_{x_1=0}^{y} \frac{\lambda^{x_1}e^{-\lambda}}{x_1!}\cdot\frac{\theta^{y-x_1}e^{-\theta}}{(y-x_1)!}\cdot\frac{y!}{y!}$$
$$= \frac{e^{-(\lambda+\theta)}}{y!}\sum_{x_1=0}^{y}\frac{\lambda^{x_1}\theta^{y-x_1}y!}{x_1!(y-x_1)!}$$
$$= \frac{e^{-(\lambda+\theta)}}{y!}\sum_{x_1=0}^{y}\frac{y!}{x_1!(y-x_1)!}\lambda^{x_1}\theta^{y-x_1} \quad , x_1 = 0,12,\cdots,y$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\theta)}}{y!}\sum_{x_1=0}^{y}\binom{y}{x_1}\lambda^{x_1}\theta^{y-x_1} \quad , x_1 = 0,12,\cdots,y$$
$$= \frac{e^{-(\lambda+\theta)}}{y!}(\lambda+\theta)^y \quad , y = 0,12,3,\cdots.$$
$$\therefore f_y(y) = \frac{(\lambda+\theta)^y}{y!}e^{-(\lambda+\theta)} \quad , \; y = 0,12,3,\cdots.$$

وهو المطلوب. وهو توزيع بواسون بالمعلمة $(\lambda+\theta)$.

<u>نتيجة مهمة :-</u>

من المثال أعلاه نستنتج أن التوزيع الاحتمالي لمجموع متغيرين عشوائيين مستقلين يتبع كل منهما توزيع بواسون ، هو توزيع بواسون أيضاً بمعلمة تساوي مجموع معلمتيهما . ويمكن التعميم لأكثر من متغيرين مستقلين .

8 – 2 ثانياً : المتغيرات المتصلة :- Continuous Variables

8 – 2-1 مقدمة :- من المفيد في هذا الصدد برهان النظريتين التاليتين :

الأولى: نظرية (8 - 2): باعتبار الدالة

$$G(y) = \int_a^y h(x)dx \ , \qquad (5-8)$$

حيث a مقدار ثابت ،

نجد أن مشتقة الدالة $G(y)$ هي :

$$\frac{d}{dy}G(y) \equiv G'(y) = h(y) \, , \qquad (6-8)$$

هذا يعني أن مشتقة دالة على صورة $G(y)$ بالنسبة لـ y تنتج بالتعويض بالحد الأعلى للتكامل y في الدالة $h(x)$.

البرهان:

$$\because G(y)=\int_a^y h(x)dx$$

$$\therefore G(y+\Delta y)=\int_a^{y+\Delta y} h(x)dx=\int_a^y h(x)dx+\int_y^{y+\Delta y} h(x)dx$$

$$=G(y)+\int_y^{y+\Delta y} h(x)dx$$

$$G(y+\Delta y)-G(y)=\int_y^{y+\Delta y} h(x)dx$$

$$\therefore \lim_{\Delta y\to 0}\frac{G(y+\Delta y)-G(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int_y^{y+\Delta y} h(x)dx}{\Delta y}$$

$$\therefore\ G^{/}(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{h(y+\theta\cdot\Delta y)\Delta y}{\Delta y}\quad,\quad 0<\theta<1$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0} h(y+\theta\cdot\Delta y)=h(y)$$

$$i.e\quad G^{/}(y)=h(y)\quad .$$

وهو المطلوب .

<u>الثانية: نظرية (8 - 3):</u> باعتبار الدالة

$$G(y)=\int_a^{\varepsilon(y)} h(x)dx\ ,\qquad (7-8)$$

حيث a مقدار ثابت و $\varepsilon(y)$ دالة مضطردة (Monotone) وقابلة للإشتقاق بالنسبة لـy .
نجد أن :

$$\frac{d}{dy}G(y)\equiv G^{/}(y)=h(\varepsilon(y))\frac{d\varepsilon(y)}{dy}\ ,\qquad (8-8)$$

هذا يعني أن مشتقة دالة على صورة $G(y)$ بالنسبة لـ y تنتج بالتعويض بالحد الأعلى للتكامل في الدالة $h(x)$ مضروباً في مشتقة الحد الأعلى للتكامل بالنسبة لـ y .

<u>البرهان:</u>

$$\because \frac{dG(y)}{dy} = \frac{dG(y)}{d\varepsilon(y)} \frac{d\varepsilon(y)}{dy} \qquad \Rightarrow \quad G^{/}(y) = h(\varepsilon(y)) \frac{d\varepsilon(y)}{dy} \quad .$$

وذلك من النظرية (8-2) . وهو المطلوب .

وحيث أن $\varepsilon(y)$ دالة مضطردة (Monotone) فقد تكون متناقصة ،في هذه الحالة يكون $\frac{d\varepsilon(y)}{dy} < 0$ (سالب) لذا نكتب العلاقة (8-8) كما يلي:

$$G^{/}(y) = h(\varepsilon(y)) \left| \frac{d\varepsilon(y)}{dy} \right| , \qquad (9-8)$$

بعض التعاريف المهمة:

1 – نقول عن دالة *Y=g(x)* أنها :**مضطردة (رتيبة) تزايدياً** **Monotonically increasing function** إذا كان

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \ \forall x_i \quad \ni Y = X^2 \quad .$$

2 - نقول عن دالة *Y=g(x)* أنها : **مضطردة تناقصياً** **Monotonically decreasing function** إذا كان

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \ \forall x_i \quad \ni Y = \frac{1}{X^2} \quad .$$

8 – 2-2 التحويل في حالة متغير واحد:- The case of one variable

إذا كان *X* متغيراً دالة كثافته الاحتمالية هي $f_X(x)$ ،وكانت $Y \equiv g(X)$ دالة في *X* تشكل تناظراً أُحادياً، فإنه يمكن حساب دالة الكثافة الاحتمالية $f_Y(y)$ للمتغير *Y* كما يلي:

$$\because F_Y(y) \equiv P(Y \le y)$$

$$\therefore F_Y(y) = P(g(X) \le y)$$

$$= P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$i.e. \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx$$

$$\therefore f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

$$i.e. \quad f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|, \qquad (10-8)$$

<u>مثال (8 – 7) :</u>

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X هي : $f_X(x) = 1 \quad , \quad 0 < x < 1$

فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y حيث $Y=3X+1$.

<u>الحل :</u> نتبع الخطوات التالية :-

1 – نحسب المشتقة وهي : $\frac{dy}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$

2 – نوجد حدود المتغير Y كما يلي :

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \;\&\; x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \quad 1 < y < 4 \quad .$$

3- نطبق العلاقة (8 – 10) فنحصل على : $f_Y(y) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad , \quad 1 < y < 4$

وهو المطلوب .

<u>مثال (8 – 8) :</u>

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X هي : $f_X(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad , \quad x \geq 1$

فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y حيث هي : $Y = e^{-x}$.

<u>الحل :</u> نتبع الخطوات التالية **:-**

1 – نحسب المشتقة وهي :

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{e^{-x}} \cdots \Rightarrow \left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{-1}{e^{-x}}\right| = \frac{1}{y}$$

2 – نوجد حدود المتغير Y كما يلي :

$$x = 1 \Rightarrow y = e^{-1} \;\&\; x = \infty \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \quad 0 < y < e^{-1} \quad .$$

3- نطبق العلاقة (8 – 10) فنحصل على :

$$y = e^{-x} \Rightarrow -x = \ln y \Rightarrow x = -\ln y$$

$$f_Y(y) = f_X(-\ln y)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{(-\ln y)^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \frac{1}{y(\ln y)^2} \qquad , \quad 0 < y < e^{-1}$$

وهو المطلوب .

<u>حل آخر :</u> باستخدام دالة التوزيع التراكمية **:-**

$$\because F_Y(y)=P(Y\le y)$$
$$\therefore F_Y(y)=P(e^{-X}\le y)=P(-X\le \ln y)=P(X\ge -\ln y)$$
$$=1-P(X\le -\ln y)=1-\int_1^{-\ln y}\frac{1}{x^2}\,dx=1+\left[x^{-1}\right]_1^{-\ln y}$$
$$=1+[(-\ln y)^{-1}-1]=(-\ln y)^{-1}\ ,\quad 0<y<e^{-1}\quad .$$
$$\therefore\ f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}(-\ln y)^{-1}=-1(-\ln y)^{-2}(\frac{-1}{y})$$
$$=\frac{1}{y(\ln y)^2}\ ,\quad 0<y<e^{-1}\quad .$$

وهو ماتوصلنا إليه سابقاً ، وهو المطلوب .

8 – 2-3 التحويل في حالة متغيرين متصلين: The case of two variables

نظرية (8 – 4) :

إذا كان المتجه (X_1,X_2) متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية هي $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$

وبفرض الدالتين $Y_1=g_1(x_1,x_2)\,,\,Y_2=g_2(x_1,x_2)$ بحيث أن g_2 و g_1 تحققان ما يلي :

1 – المعادلتان $Y_1=g_1(x_1,x_2)\,,\,Y_2=g_2(x_1,x_2)$ لكل منهما حل وحيد (المعكوس) هو:

$$w_1(y_1,y_2)=x_1\ ,\ w_2(y_1,y_2)=x_2$$

2 – المشتقات الجزئية موجودة ومتصلة وهي :

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,,\,\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\,,\,\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\,,\,\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\,.$$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتجه (Y_1,Y_2) تُعطى بالعلاقة التالية :-

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(w_1(y_1,y_2),w_2(y_1,y_2))\cdot|J|\quad(11-8)$$

حيث :

$$J=\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1}\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_2}-\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}$$

حيث $|J|$ يُسمى محدد جاكوبيان أو معامل التحويل Jacobian of the transformation

<u>مثال (8-9)</u> : إذا كان للمتجه (X_1,X_2) دالة الكثافة الاحتمالية :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=e^{-(x_1+x_2)}\ ,\quad 0<x_1,x_2<\infty$$

(أ) احسب للمتجه (Y_1,Y_2) دالة كثافته الاحتمالية $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ ،حيث

$$Y_1=X_1+X_2\qquad ,\qquad Y_2=\frac{X_1}{X_1+X_2}$$

(ب) احسب الدوال الهامشية $f_{Y_2}(y_2)$ و $f_{Y_1}(y_1)$.

<u>الحل:</u>

(أ) نتبع الخطوات التالية :

1 – نحدد نطاق تغير كل من Y_1,Y_2 وذلك من نطاق تغير X_1,X_2 كالتالي :

من تعريف Y_1 نجد أن $0<y_1<\infty$ ، ومن تعريف Y_2 نجد أن أقل قيمة له هي $Y_2=0$ وذلك عند ما تكون $X_1=0$ ، وأكبر قيمة لـ Y_2 هي $Y_2=1$ وذلك عند ما تكون $X_2=0$ ، وهذا يعني أن $0<Y_2<1$.

2 – نحسب المعكوس كما يلي :

$$\because Y_1 = X_1 + X_2 \ , \ Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

$$\therefore Y_2 = \frac{X_1}{Y_1} \Rightarrow X_1 = Y_1 Y_2 \quad .$$

$$\because X_2 = Y_1 - X_1 \Rightarrow X_2 = Y_1 - Y_1 Y_2 = Y_1(1 - Y_2) \ .$$

3 – نحسب المشتقات الجزئية وهي :

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = y_2 \ , \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = y_1 \ , \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = 1 - y_2 \ , \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = -y_1 \ .$$

4 – نحسب المحدد :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & 1 - y_2 \\ y_1 & -y_1 \end{vmatrix}$$

$$= -y_1 y_2 - y_1(1 - y_2) = -y_1 \Rightarrow |J| = y_1$$

5 – نطبق العلاقة (8 – 11) فنحصل على :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = e^{-(y_1 y_2 + y_1 - y_1 y_2)} \cdot y_1 = y_1 e^{-y_1} \quad , 0 < y_1 < \infty \ .$$

وهو المطلوب .

(ب) الدوال الهامشية هي :

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^1 f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_2$$
$$= \int_0^1 y_1 e^{-y_1} dy_2 = y_1 e^{-y_1}[y_2]_0^1 = y_1 e^{-y_1}$$
$$i.e \quad f_{Y_1}(y_1) = y_1 e^{-y_1} \quad , 0 < y_1 < \infty .$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^\infty f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_1 = \int_0^\infty y_1 e^{-y_1} dy_1 = \Gamma(2) = 1$$
$$i.e \quad f_{Y_2}(y_2) = 1 \quad , 0 < y_2 < 1 \ .$$

وهو المطلوب .

8 –2-3 – 1 حالات الاستقلال :-

1 - إذا كان X_1, X_2 مستقلين دوالهما الهامشية هي $f_{X_2}(x_2)$ و $f_{X_1}(x_1)$

فإن العلاقة (8- 11) تُصبح :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1}(w_1(y_1, y_2)) \cdot f_{X_2}(w_2(y_1, y_2)) \cdot |J| \qquad (12-8)$$

2 - إذا كان X_1, X_2 مستقلين دوالهما الهامشية هي $f_{X_2}(x_2)$ و $f_{X_1}(x_1)$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية لمجموعهما المتغير $Y = X_1 + X_2$ يًعطى بالعلاقة :

$$f_Y(y) = \int f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(y - x_1)dx_1 \qquad (13-8)$$

مثال (8-10) :

إذا كان X_1, X_2 مستقلين يتبع كل منهما توزيع أُسي بمعالم λ_2 و λ_1 على الترتيب .

فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية لمجموعهما المتغير $Y = X_1 + X_2$.

الحل :

دالتا الكثافة الاحتمالية لكل من X_1, X_2 هما :

$$f_{X_1}(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \quad , x_1 \geq 0 \, , \lambda_1 > 0 \, .$$

$$f_{X_2}(x_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \quad , x_2 \geq 0 \, , \lambda_2 > 0 \, .$$

ولتطبيق العلاقة (13-8) نحسب حدود التكامل فيها كما يلي :

$$\because Y = X_1 + X_2 \Rightarrow y - x_1 = x_2$$
$$\therefore x_2 \geq 0 \Rightarrow y - x_1 \geq 0 \Rightarrow y \geq x_1$$
$$\therefore \quad 0 \leq x_1 \leq y \, .$$

من العلاقة (13-8) نجد أن :

$$f_Y(y) = \int f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(y - x_1) dx_1$$
$$= \int_0^y \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y - x_1)} dx_1 = \int_0^y \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \, e^{\lambda_2 x_1} dx_1$$
$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x_1} dx_1 \qquad (14-8)$$

هنا يُوجد حالتان هما :

<u>**الأولى**</u> عند ما $\lambda_1 \neq \lambda_2$ نجد أن (14-8) هي :

$$f_Y(y)=\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\int_0^y e^{(\lambda_2-\lambda_1)x_1}dx_1$$

$$=\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x_1}}{\lambda_2-\lambda_1}]_0^y=\frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2-\lambda_1}[e^{(\lambda_2-\lambda_1)y}-1]$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}[e^{-\lambda_1 y}-e^{-\lambda_2 y}1]\quad ,y\ge 0\,.$$

<u>الثانية</u> عند ما $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ نجد أن (14-8) هي :

$$f_Y(y)=\lambda^2 e^{-\lambda y}\int_0^y dx_1$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda y}[x_1]_0^y=\lambda^2 y e^{-\lambda y}\ ,\ y\ge 0\,.\qquad i.e\ \ Y\sim G(2,\lambda)\,.$$

وهو المطلوب .

8-3 <u>تمارين على الفصل الثامن :-</u>

1. أثبت أنه إذا كان X_1,X_2 مستقلين دوالهما الهامشية هي $f_{X_2}(x_2)$ و $f_{X_1}(x_1)$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية لمجموعهما المتغير $Y=X_1+X_2$ يًعطى بالعلاقة :

$$f_Y(y)=\int f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(y-x_1)dx_1$$

2. إذا كان X_1,X_2 مستقلين وكان $X_1\sim N(1,4)$ و $X_2\sim N(2,3)$ فأوجد كل من :

$E(Y)$ و $M_Y(t_1,t_2)$ حيث $Y=X_1X_2$

3. بفرض أن $X \sim N(0,1)$ ، أوجد $f_Y(y)$ حيث $Y = X^2$.

4. بفرض دالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x) = 2xe^{-x^2} \ , x > 0$ ، أوجد

$f_Y(y)$ حيث $Y = X^2$

5. بفرض أن لدينا قيم دالة الكتلة الاحتمالية :

$f_X(-1) = \dfrac{1}{3} \, , \, f_X(0) = \dfrac{1}{2} \, , \, f_X(1) = \dfrac{1}{6} .$ ، أوجد $f_Y(y)$ حيث

$$Y = X^2$$

6. بفرض أن دالة الكثافة الاحتمالية : $f_X(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|} \ , -\infty < x < \infty .$

أوجد $f_Y(y)$ حيث $Y = X^2$

7. بفرض أن دالة الكثافة الاحتمالية : $f_X(x) = e^{-x} \ , x \geq 0$. ، أوجد

$f_Y(y)$ حيث $(i) \ Y = X^2 \ , (ii) \ Y = \sqrt{X}$

8. بفرض أن دالة الكثافة الاحتمالية : $f_X(x) = \dfrac{1}{8} \ \ , \ -2 \leq x \leq 6$. ،

أوجد $f_Y(y)$ حيث $Y = X^2$

9. بفرض أن دالة الكثافة الاحتمالية : $f_X(x) = \dfrac{1}{2a} \ \ , \ -a \leq x \leq a$. ،

أوجد $f_Y(y)$ حيث : $(i) \ Y = \dfrac{X + a}{2a} , \quad (ii) \ Y = \dfrac{X + a}{X - a}$

10. بفرض أن دالة الكتلة الاحتمالية : $f_X(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \ \ , \ x = 0,1,2, \cdots$.

، أوجد $f_Y(y)$ حيث $Y = 3X$

11. بفرض أن دالة الكتلة الاحتمالية : . $x=1,2,3,\cdots$, $f_X(x)=(\frac{1}{2})^x$ ،

أوجد $f_Y(y)$ حيث $Y=X^2$

ملحق أسئلة امتحانات سابقة

المجموعة الأولى:

السؤال الأول:

إذا كانت الحادثتان A, B متنافيتين و كان $P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$ ، فإحسب كل من:

$P(A^c)$ ، $P(A\bigcup B)$ ، $A\bigcap B$ ، $P(A\bigcap B^c)$ ، $P(A^c\bigcap B^c)$.

السؤال الثاني:

(1) إذا كانت الحادثتان A,B مستقلتين و كان $P(A)=0.5$, $P(B)=0.5$، فإحسب كل من :

$P(A\bigcap B)$ ، $P(A\bigcup B)$ ، $P(A|B)$.

(2) إذا كان إحتمال نجاح محمد هو $\frac{1}{4}$ وإحتمال رسوب أحمد هو $\frac{1}{3}$ وإحتمال نجاح محمد وأحمد هو $\frac{1}{6}$. فأوجد: (أ) إحتمال نجاح محمد ورسوب أحمد (نجاح محمد فقط).

(ب) إحتمال نجاح أحدهما على الأقل.

(3) إذا كان $P(A)=0.3$ و $P(A\cup B)=0.8$ فأوجد $P(B)$ في كل من الحالات التالية:

أ- A و B حادثتان مستقلتان. **ب** _ A و B حادثتان متنافيتان. **ج** _ $A\subset B$.

(4) إذا كانت A_1,A_2,A_3 تشكل تجزيئاً لفضاء العينة Ω و كانت B حادثة من Ω بحيث تحصل على الجدول التالي: فالمطلوب:

أ. إكمال الجدول المقابل .

بـB إيجاد قيمة كل من $P(B)$ و $P(A_1|B)$.

	$P(A_i)$	$P(A_iB)$	$P(B\|A_i)$
A_1	0.2		0.35
A_2		0.15	0.45
A_3		0.35	

السؤال الرابع:

أ- متغير عشوائي متقطع له التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P(X=x)=\frac{c}{x+3} \quad , \quad x=0,1,2,3$$

(1) أوجد قيمة الثابت c . (2) احسب $M_X(t)$.

ب- في طريقه إلى عمله يمر موظف بإشارتي مرور (الإشارة تكون إما حمراء أو خضراء فقط). إذا كانت الإشارتان مستقلتين عن بعضها البعض واحتمال أن يواجه إشارة حمراء في أي منهما هو 0.7 , 0.6 على الترتيب، وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الإشارات الحمراء التي يواجهها الموظف في رحلته اليومية إلى مقر عمله . المطلوب

❶ أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X . ❷ أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير X .

ج- لديك دالة الكثافة التالية، حيث c مقدار ثابت :

$$f(y)=\begin{cases} cy^2 & , \ -1<y<1 \\ 0 & , \ otherwise \end{cases}$$

(1) أوجد قيمة الثابت c . (2) احسب $F(y)$

السؤال الخامس :

(1) إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي $M_X(t)=\frac{1}{27}(e^t+2)^3$ فاحسب الاحتمال $P(X>1)$.

(2) إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة توليد عزومه هي:

$$M_X(t) = \frac{1}{3^5}(2+e^t)^5$$

(أ) إذكر اسم توزيع X. (ب) إحسب متوسطه وتباينه . (ج) اكتب دالة توزيعه الاحتمالي.

(3) إذا كانت دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي X هي: $M_X(t) = e^{4(e^t-1)}$

فما هو توزيع هذا المتغير وقيمة P(X=3) ؟

(4) اكتب دوال الكثافة أو الكتلة الإحتمالية مع ذكر إسم التوزيع المقابل لما يلي :-

(i) $M_X(t) = e^{-2(1-e^t)}$, **(ii)** $M_X(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}(3e^t+1)^{10}$,

(iii) $M_X(t) = \frac{e^t}{4-3e^t}$,

السؤال السادس :

(1) إذا كان للمتغير العشوائي X العزم الرائي حول الصفر بالشكل التالي :

$$\mu_r' = E(X^r) = r!$$

(أ) اوجد التوقع والتباين للمتغير العشوائي X .

(ب) اوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X .

(2) إذا كانت $M_X(t)$ دالة مولدة للعزوم للمتغير X فأثبت أن:

$$\text{i)}\quad E(X) = M_X'(0) \quad , \quad \text{ii)}\quad \sigma_X^2 = M_X''(0) - \{M_X'(0)\}^2$$

(3) رميت عملة غير متزنة ثلاث مرات، فإذا كان المتغير X يمثل عدد مرات ظهور H وبفرض أن إحتمال ظهور H ضعف إحتمال ظهور T, أوجد كل من:

❶ f(x) واستخدمها لحساب μ_X, σ_X^2, $M_X(t)$,

❷ F(x) واستخدمها لحساب $P(X \le 4)$ و $P(X > 3)$ ❸ $M_Y(t)$ حيث Y= 3X-2

(4) إذا كانت نسبة إصابة الهدف لدى شخص ما هي 80% من رمياته. فإذا أُتيحت له فرصة الرماية في 5 محاولات فأوجد:

❶ احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل؟، ❷ احتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر؟

❸ احتمال عدم اصابة الهدف في المحاولات الخمس؟

❹ العدد المتوقع لمرات اصابة الهدف؟ ثم أوجد قيمة التباين؟، ❺ الدالة المولدة للعزوم؟

(5) تُلقى قطعة نقد متزنة حتى تظهر الصورة لأول مرة أو تظهر الكتابة خمس مرات متتالية . المطلوب : (أ) أكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

(ب) بفرض أن X متغير عشوائي معرف على هذا الفضاء ويمثل عدد المرات اللازمة لإلقاء هذه العملة :

1 - أكتب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X .

2 - احسب كل من توقع X والدالة المولدة لعزومه .

(6) لديك الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X: $M_x(t)=\frac{1}{8}e^{t}+\frac{2}{8}e^{2t}+\frac{5}{8}e^{5t}$

1 _ أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X . 2 _ باستخدام الدالة المولدة للعزوم احسب توقع وتباين المتغير X . 3 _ احسب توقع وتباين المتغير **$Y=3X-2$** .

(7) إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع التالية:

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<-1\\ \dfrac{x+1}{12} & , -1\le x<2\\ \dfrac{x+4b}{4} & , 2\le x<5\\ 1 & , 5\le x\end{cases}$$

أوجـــد ما يلي:

(i) قيمة الثابت b. (ii) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X . (iii) $P(X>0)$.

(8) إذا كانت الدالة المولدة للعزوم لمتغير Y ، هي $M_Y(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{3^r}$.

فاكتب الشكل العام للعزم $\mu_r^{/}=E(Y^r)$ واحسب منه التوقع والتباين للمتغير Y.

(9) أكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية التالية :

(أ) رمي قطعة عملة حتى الحصول على الناتج H ؟ . (ب) عدد مرات ثني سلك معدني حتى ينقطع ؟.

<u>السؤال السادس :</u>

(1) إذا كان $P(A)=0.45,\quad P(B)=0.35,\quad P(A|B)=0.57$ فأحسب كل من :-

$(i)\ P(A\cup B)$, $(ii)\ P(B|A)$, $(iii)\ P(B^c|A)$.

(2) إذا كان $P(A)=0.4,\quad P(B)=0.5,$ فأحسب كل من (حسب حالة A وB):

أ- بفرض أن B و A مستقلتان إحسب $P(B^c|A)$

ب - بفرض أن $A\subset B$ إحسب $P(B|A)$

(3) إذا كانت دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ للمتغير العشوائي المتصل X على الصورة التالية:

$$F(x)=\begin{cases}0 , & x<0\\ \dfrac{x^2}{16} , & 0\le x<4\\ 1 , & 4\le x\end{cases}$$

(أ) احسب كل من $(i)\ f(x),\quad (ii)\ E(X),\quad (iii)\ \sigma^2$

(ب) احسب الاحتمالات التالية:

$(i)\ P(1<X\le 3)$, $(ii)\ P(X>5)$, $(iii)\ P(X=1)$

(4) لديك الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X:

$$M_x(t) = 0.2e^{-t} + 0.3e^{t} + 0.4e^{2t} + 0.1e^{5t}$$

احسب كل من $(i)\ f(x),\quad (ii)\ F(x).$

(5) إذا كان المتغير العشوائي X له دالة الكتلة الاحتمالية:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{cx}{18} \quad , x = 1,2,3.$$

(أ) احسب قيمة الثابت c .
(ب) احسب دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ لهذا المتغير .
(ج) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_x(t)$.
(د) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_y(t)$ للمتغير العشوائي Y حيث $Y=2X-1$.

المجموعة الثانية:

السؤال الأول:

(أ) إذا كان X متغيرا عشـوائيا له دالة التوزيع التـاليـة:

$$f(x) = \mathbf{1} \quad , \mathbf{0} \le x \le \mathbf{1}$$

أوجـــــد ما يـلي:

(i) العزم r حول الصفر. (ii) الدالة المولدة للعزوم . (iii) $P(X \le \mathbf{0.5})$.

(ب) إذا كان المتغير العشوائي Y يتبع دالة الكثافة الاحتمالية $f(y) = \frac{1}{4} y e^{-\frac{y}{2}} \quad , y > 0$

فالمطلوب هو حساب كل من توقع وتباين ودالة توليد عزوم المتغير Y .

السؤال الثاني:

(أ) لتوزيع بيتا أثبت أن $\mu_r^{/} = \dfrac{\beta(a+r,b)}{\beta(a,b)}$.

(ب) إذا كان قطر سلك نحاس متغيراً عشوائياً Y دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(y) = 20y^3(1-y) \quad , 0 \le y \le 1$$

إحسب قيمة كل من :

$$(i)\ E(Y) \quad , \quad (ii)\ V(Y) \quad , \quad (iii)\ \mu_5^{/} .$$

السؤال الثالث:

(أ) برهن أن الدالة المولدة للعزوم المشتركة للمتغيرين العشوائيين X, Y تحقق الآتي:

$$M_{X,Y}(0,0) = 1 \quad .$$

(ب) ليكن X , Y متغيرين عشوائيين دالة توليد العزوم المشتركة لهما هي :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{1}{16}(1+2e^{t_1} + e^{t_2})^2 \quad , \quad -\infty < t_1 \ , t_2 < \infty \quad .$$

المطلوب : إيجاد كل من $M_X(t_1) , \quad M_Y(t_2)$.

السؤال الرابع :

ليكن X , Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع الاحتمالي المشترك التالي :

$f(x,y)$		y		
		2	3	4
x	1	0.06	0.15	0.09
	2	0.14	0.35	0.21

المطلوب : حساب قيمة كل من :

$(1)\ E(XY)\ , (2)\ V(X+Y)\ , (3)\ \rho_{X,Y}$.

$(\mathbf{4}) M_{X,Y}(t_1,t_2), \quad (\mathbf{5}) M_X(t_1)$

السؤال الخامس :

(1) لديك دوال مولدة للعزوم للمتغير العشوائي X:

$$(i) \quad M_x(t) = \frac{e^{3t} - e^{2t}}{t} \qquad , \qquad (ii) \; M_X(t) = \frac{e^t - 1}{t\, e^{-3t}}$$

احسب من كل دالة الآتي:

أ. توقع وتباين المتغير X ، ب. الدالة المولدة للعزوم للمتغير $Y=X-2$.

(2) إذا علمـــت أن X متغيـــر عشـــوائي لــــه الدالـــة المولـــدة للعـــزوم التاليـــة :

$$M_X(t) = e^{t(1+2t)}$$

أ. ما هو توزيع X وما قيمة توقعه الرياضي وتباينه؟

ب. ما هو توزيع $Y = 2X + 1$ وما قيمة توقعه وتباينه؟

ج. احسب قيمة a بحيث أن $P(X > a) = 0.5$.

جامعـــه الملك سعـــــــود الاختبار الفصلي الأول لمقرر215 احص (نظرية الإحتمال-

كليــــــــه العلــــــــــــوم للفصل الدراسي الثاني لعام 1431/1432 هـ

قسم الاحصاء وبحوث العمليات الزمن: 90 دقيقة

<u>السؤال الأول:</u>

(أ) إذا كان X متغـــيرا عشـــوائيـا يتبع توزيع مربع كاي بدالــة كثـافـة إحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{c} x^2 e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x \geq 0.$$

أوجـــد ما يلي:

(1) قيمـــه الثــابت c . (2) التوقـــع $E(X)$ والتبــايـن $V(X)$. (3) الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$.

(ب) إذا كان X متغـــيرا عشـــوائيـا لــه دالـــه الكثـافـه التـاليـه: $f(x) = k\,x^2(1-x) \;,\; 0 < x \leq 1.$

أوجـــد ما يلي: (i) قيمـــه الثــابت k (ii) التوقـــع والتبـــايـن للمتغير العشوائي X . (iii) $P(X \leq 0.4)$

<u>السؤال الثاني:</u>

(أ) برهن أن التغاير بين متغيرين عشوائيين **aX, bY** حيث **a,b** مقادير ثابتة يعطى بالعلاقة:

$$\operatorname{cov}(aX,bY) = ab\ \operatorname{cov}(X,Y).$$

(ب) إذا كانت دالة الكثافة الإحتمالية المشتركة للمتغيرين **X,Y** هي

$$f(x,y) = \frac{x+y}{8} \quad , \quad 0 \le x, y < 2 \quad .$$

احسب ما يلي :

(1) الدالة الهامشية لكل من X, Y . (2) قيمة الدالة $F(x,y)$ عند النقطة (1،1) . (3) التغاير بين X,Y .

(4) معامل الارتباط $corr(X,Y)$. (5) تباين المتغير $X+Y$.

كليـــــــه العلـــــــــــــوم **للفصل الدراسي الثاني لعام 1428/1429 هـ**

قسم الاحصاء وبحوث العمليات **مقرر 215 احص** **الزمن: ساعة ونصف**

أجـب عن جميـع الأسئله التـاليـه:

السؤال الأول: إذا كان X متغـــــيرا عشـــوائيـا لــه دالـــه الكثــافه التـاليـه:

$$f(x) = k\,x^2\,(1-x) \;\; , \;\; 0 < x \le 1.$$

أوجـــد ما يلي:

(i) قيمـــه الثـــابت k (ii) التوقــــع والتبـــايـن للمتغير العشوائي X . (iii) $P(X \le 0.4)$

السؤال الثاني:

(أ) برهن أن التغاير بين متغيرين عشوائيين X, Y يعطى بالعلاقة:

$$\sigma_{XY} = E[XY] - E[X]E[Y].$$

(ب) إذا كانت دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين X,Y هي

$$f(x,y) = 2 \qquad , \;\; 0 < x < y < 1$$

المطلوب : (i) أثبت أن *f(x,y)* تمثل دالة كثافة إحتمالية . (ii) حساب التغاير بين *X,Y* . (iii) حساب معامل الارتباط .

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان المتغير العشوائي *X* يتبع توزيع جاما بالمعلمتين (n,λ)

فأثبت أن : $M_x(t)=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^n$.

(ب) إذا كان الوقت (بالساعات) الذي يستغرقه إصلاح جهاز معين هو متغير عشوائي يتبع توزيع جاما بمتوسط يساوي 1 وتباين يساوي $\frac{1}{2}$. فما هو احتمال أن إصلاح جهاز من هذا النوع سيستغرق :

(1) على الأكثر ساعة واحدة ؟ . (2) على الأقل ساعتين ؟ .

السؤال الرابع :

ليكن *X , Y* متغيرين عشوائيين لهما التوزيع الاحتمالي المشترك التالي :

$f(x,y)$		y		
		-2	5	8
x	1	0.21	0.35	0.14
	2	c	0.15	0.06

المطلوب :

(1) حساب قيمة كل من : (i) الثابت C

$(ii)\ E(XY)\ ,\ (iii)\ V(X+Y)\ ,\ (iv)\ \rho_{X,Y}$.

(2) احسب كل من :

$(i)\ F(1,5)\ ,\ (ii)\ P(X+Y\le 1)\ ,\ (iii)\ M_{X,Y}(t_1,t_2)$.

كليـــــة العلـــــــــــوم للفصل الدراسي الثاني لعام **1433/1434**

مقرر 215 احص الزمن: ساعة ونصف

أجـب عن جميـع الأسئلة التـاليـة:

السؤال الأول:-

(أ) برهن أنه إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلين فإن $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

(ب) ليكن X,Y متغيرين عشوائيين مستقلين لكل منهما التوزيع الهامشي التالي على الترتيب : -

x	1	2
f(x)	0.7	0.3

y	-2	5	8
f(y)	0.3	0.5	0.2

إحسب كل من :-

$$(1)\ f_{X,Y}(x,y)\,, \quad (2)\ Cov(X,Y)\,, \quad (3)\ P(X=2 \mid Y=-2)\,, \quad (4)\ M_{X,Y}(t_1,t_2)$$

السؤال الثاني: -

(أ) برهن أنه إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلين فإن $f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x)$.

(ب) إذا علمت أن

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad 0 < x < y \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

(i) فاحسب كل من :-

$$(1)\ f_{X|Y}(x \mid y)\,, \quad (2)\ f_{X|Y}(x \mid 2)\,, \quad (3)\ P(0 \le X \le 1 \mid Y=2)\,, \quad (4)\ F_{X|Y}(x \mid y)$$

$$(5)\ M_{X|Y}(t)\ .$$

(ii) أُدرس إستقلال المتغيرين X و Y .

السؤال الثالث :

ليكن X , Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع الاحتمالي المشترك التالي :

المطلوب : حساب قيمة كل من :

	y

$f(x,y)$		-2	0	5
	1	0.15	0.25	0.20
x	3	0.20	0.05	0.15

(1) $E(XY)$, (2) $V(X+Y)$, (3) $\rho_{X,Y}$.
(4)$M_{X,Y}(t_1,t_2)$,   (5) $f(x|5)$

كليـــــة العلـــــــــــــوم   للفصل الدراسي الأول لعام 1434/1435 هـ

قسم الاحصاء وبحوث العمليات   مقرر 215 احص   الزمن: ساعة ونصف

أجـب عن جميـع الأسئلة التـاليـة:

السؤال الأول:-

(أ) برهن أنه إذا كان المتغيران العشوائيان *X, Y* مستقلين فإن $E(Y|X)=E(Y)$.

(ب) إذا علمت أن

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2}{y}; & 0<x<\frac{y}{2}\\ 0\ ; & o.w\end{cases}$$

فاحسب كل من :-

(1) $E(X\,|\,Y)$.   (2) $V(X\,|\,Y)$.   (3) $F(x\,|\,y)$.   (4) $M_{X|Y}(t)$.

السؤال الثانـي: -

(أ) برهن أن الدالة المولدة للعزوم المشتركة للمتغيرين العشوائيين *X, Y* تحقق الآتي:

$$M_{X,Y}(0,0)=1 \quad .$$

(ب) ليكن *X , Y* متغيرين عشوائيين دالة توليد العزوم المشتركة لهما هي :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\frac{1}{16}(1+2e^{t_1}+e^{t_2})^2 \quad , \quad -\infty<t_1 \quad , t_2<\infty \quad .$$

المطلوب : إيجاد كل من $M_X(t_1)\,, \quad M_Y(t_2)$.

السؤال الثالث:

(أ) ليكن *X,Y* متغيرين عشوائيين لهما

التوزيع المشترك التالي : ـ

إحسب كل من : ـ

$(1)\ E(X)\,,(2)\ \rho_{X,Y}$.

	f(x,y)	*y* = -1	0	1
x	-1	0.06	0.19	0.06
	0	0.19	0	0.19
	1	0.06	0.19	0.06

(ب) إذا علمت أن:

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y} & , \quad x,y\geq 0\\ 0 \quad , \quad o.w\end{cases}$$

وأن : . $F_X(x)=F_{X,Y}(x,\infty).$

فاحسب :1- كل من : $(1)\ F_X(x),\ (2)\ F_Y(y).$

2- هل X,Y مستقلان ؟ أذكر السبب.

(ج) – (1) إذا كان المتغير العشوائي X له توزيع جاما دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} \quad , x > 0 , \lambda > 0 \quad , n > 0.$$

أثبت أن : – $(i)\ \mu_r' = \dfrac{\Gamma(n+r)}{\lambda^r \Gamma(n)},\quad (ii)\ M_X(t) = (\dfrac{\lambda}{\lambda - t})^n .$

(2) إذا كان المتغير العشوائي Y له توزيع بيتا دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f_Y(y) = 60 y^2 (1-y)^3 \quad , 0 < y < 1.$$

إحسب كل من : – $(i)\ \mu = E(Y),\quad (ii)\ \sigma_Y^2 = V(Y).$

الامتحان الفصلي الثالث للفصل الدراسي الأول 1436/1437 هـ

استعن بالله ثم أجب جميــع الأسئلة التـاليـة في زمن قدره : 1.5

السؤال الأول:

ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك التالي : –

	f(x,y)	y = -2	y = 2
x	1	0	0.2
	2	0.3	0
	3	0.1	0.4

(أ) إحسب كل من : – (1) $f_{X|Y}(x \mid y)$

(2) $f_{X|2}(x \mid y=2)$

(3) $E(X \mid Y=2)$

(4) $M_{X|2}(t)$.

(ب) هل المتغيران X,Y مستقلان ؟. وضح

السؤال الثاني:

(أ) أكمل العبارة التالية : لأي متغيرين عشوائيين منفصلين X, Y نجد أن $E(X|Y) = \cdots$.

(ب) ليكن X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين لهما دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة التالي :

$$f_{X,Y}(x,y) = 4xy\,, \quad 0 \le x \le 1\,,\, 0 \le y \le 1 \quad .$$

فالمطلوب هو حساب كل من :

$(i)\ f_X(x)\,,\ (ii)\ f_{Y|X}(y\,|\,x), \quad (iii)\ E(X\,|\,Y)\,, \quad (iv)\ E(XY)$

(ج) ليكن X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين دالة توليد العزوم الهامشية لكل منهما هي :

$$M_X(t_1) = \frac{1}{1-t_1} \;\; , \quad M_Y(t_2) = \frac{1}{1-t_2} \quad , t_1, t_2 < 1 \quad .$$

المطلوب إيجاد كل من: $(i) M_{X,Y}(t_1,t_2)\,,\,(ii)\ \rho_{X,Y}$.

(د) برهن أنه إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلين فإن $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

السؤال الثالث:

ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك التالي : ـ

إحسب كل من : ـ

		y		
	f(x,y)	-3	2	4
x	1	0.10	0.20	0.20
	3	0.30	0.10	0.10

(1) $E(3X+Y)$, (2) $E(XY)$.

(3) $M_{X,Y}(t_1,t_2)$, (4) $Cov(X,Y)$

(5) $f_{X|Y}(1\,|\,4)$

(6) $F_{X|Y}(1\,|-3) = P(X \le 1\,|\,y=-3)$

(7) هل المتغيران X,Y مستقلان ؟ وضح السبب .

السؤال الرابع : -

أ - ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما الدالة الاحتمالية المشتركة التالية : ــ

$$f(x,y)=\frac{2(2x+3y)}{5} \quad ,0<x<1, \quad 0<y<1$$

إحسب كل من : ــ　$(1)\ f_X(x)\,,\quad (2)\ f_Y(y)\,,\quad (3)\ f_{X|Y}(x\mid y)$

ب - إذا علمت أنه لمتغيرين عشوائيين مستقلين X,Y نجد أن :

$$f_X(x)=e^{-x}\,,\quad x>0 \quad , \quad f_Y(y)=e^{-y}\,,\quad y>0$$

فإحسب : (1) دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهما $f_{X,Y}(x,y)$.

(2) بفرض أن المتغير $Z=X+Y$ إحسب $f_z(z)$

المجموعة الثالثة: (إختبارات نهائية)

قسم الإحصاء وبحوث العمليات　　***الفصل الدراس الأول***

المقرر / 215 إحص: احتمال – 1-　　***1434 – 1435 هـ***

الزمن ثلاث ساعات

أجــب عن الخمسة أسئلة التـاليـة: (لكل سؤال 10 درجات)

السؤال الأول :

أ ــ إذا كان المتغير العشـوائي المتقطع X له دالة الكتلة الاحتمالية:

$$\mathrm{f}(x)=P(\mathrm{X}=\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{c}} \quad ,\ x=\mathbf{2,3,5}.$$

(1) احسب قيمة الثابت c .
(2) احسب دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ لهذا المتغير .
(3) احسب الدالة المولدة للعزوم $\mathrm{M_x(t)}$.
(4) احسب الدالة المولدة للعزوم $\mathrm{M_y(t)}$ للمتغير العشوائي Y حيث Y=2X- 1 .
(5) احسب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير Y .

ب – إذا كان للمتغير العشوائي X العزم الرائي حول الصفر بالشكل التالي:

$\mu'_r = E(X^r) = \frac{r!}{2!}$ ، احسب التوقع والتباين للمتغير العشوائي X .

السؤال الثاني :

(أ) اكتب دالة الكثافة (أو الكتلة) الإحتمالية ثم احسب التوقع للمتغيرات التي دوال عزومها التالية :

$$(1)\ M_X(t) = \frac{e^{3t} - e^{2t}}{t}. \quad (2)\ M_X(t) = (1-2t)^{-8}. \quad (3)\ M_X(t) = \left(\frac{4}{4-t}\right)^2$$

$$(4)\ M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}. \quad (5)\ M_X(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}(3e^t + 1)^{10}$$

(ب) إذا كان المتغير X يتبع توزيع بواسون وكان $f(2) = f(1)$. **المطلوب :**

(1) احسب $f(3)$, **(2) أكتب** $M_X(t)$

السؤال الثالث : -

(أ) ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما دالة توليد العزوم المشتركة $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ ، أثبت أن:

$$M_{X,Y}(0,0) = 1$$

(ب) إذا كانت دالة توليد العزوم المشتركة للمتغيرين X,Y هي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)} \quad , t_1, t_2 \neq 1.$$

المطلوب :-

(1)حساب كل من :- $(i)\, M_X(t_1)\,, \quad (ii)\, M_Y(t_2).$

(2) هل المتغيران X,Y مستقلان ؟ وضح السبب .

(ج) ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما الدالة الاحتمالية المشتركة التالية : ـ

$$f(x,y)=4xy \quad , 0<x,y<1$$

إحسب كل من : ـ

$$(1)\ f_X(x),\quad (2)\ f_Y(y),\quad (3)\ E(X),\quad (4)\ E(Y),\quad (5)\ E(XY).$$

السؤال الرابع: ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك التالي : ـ

	f(x,y)	y = -2	0	5
x	1	0.15	0.25	0.2
	3	c	0.05	0.15

إحسب كل من : ـ

(1) قيمة الثابت c .

(2) $f_{X|Y}(1|0)$.

(3) $F_{X|Y}(1|5)=P(X\le 1|y=5)$

(4) احسب : $f_Z(z)$ حيث $Z=X+Y$.

(ب) إذا كان للمتجه (X_1,X_2) دالة الكثافة الاحتمالية :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=e^{-(x_1+x_2)} \quad , \qquad 0\le x_1,x_2\le\infty$$

(1) إحسب دالة الكثافة الاحتمالية للمتجه (Y_1,Y_2)

حيث $Y_2=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ ، $Y_1=X_1+X_2$

(2) احسب الدوال الهامشية : $f_{Y_1}(y_1)$ و $f_{Y_2}(y_2)$.

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المقرر / 215 إحص: احتمال – 1-

الإختبار النهائي
الفصل الدراس الثاني
1433 – 1434 هـ
الزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول :

أ — إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X له دالة الكتلة الاحتمالية:

X	-1	0	1	3
$f(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

(1) احسب دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ لهذا المتغير .
(2) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_x(t)$.
(3) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_y(t)$ للمتغير العشوائي Y حيث Y=2X+1 .

ب – (1) إذا كان للمتغير العشوائي X العزم الرائي حول الصفر بالشكل التالي:

$\mu'_r = E(X^r) = r!$ ، احسب التوقع والتباين للمتغير العشوائي X .

(2) إذا كان المتغير X يتبع توزيع بواسون وكان $f(1) = 2f(2)$. **المطلوب :**

(أ) أكتب $M_X(t)$, **(ب) احسب** $f(3)$

السؤال الثاني :

أ - يصوب أحد الرماة على هدف معين ، إذا كان معلوم لدينا من خبرة سابقة أنه يصيب هدفه باحتمال 0.8 ، فأوجد ما يلي :

(أ) احتمال أن لا يصيب الهدف في خمس محاولات ؟
(ب) احتمال أن يصيب الهدف لثالث مرة في المحاولة الخامسة ؟

(ج) احتمال أن يصيب الهدف لأول مرة في المحاولة الخامسة ؟

ب - اكتب دالة الكثافة (أو الكتلة) الإحتمالية مع ذكر إسم التوزيع المقابل ومعالمه لكل من

دوال العزوم التالية :

$$(1)\ M_X(t)=\frac{e^{3t}-e^{2t}}{t}. \qquad (2)\ M_X(t)=(1-2t)^{-8}.$$

$$(3)\ M_X(t)=\left(\frac{4}{4-t}\right)^2. \qquad (4)\ M_X(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$$

السؤال الثالث : -

(أ) ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما دالة توليد العزوم المشتركة $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ ، أثبت أن:

$M_{X,Y}(t_1,0)=M_X(t_1)$.

(ب) إذا كانت دالة توليد العزوم المشتركة للمتغيرين X,Y هي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\frac{1}{1-t_1-t_2+t_1t_2} \quad ,-\infty<t_1,t_2<\infty.$$

المطلوب :-

(3)حساب كل من :- $(i)M_X(t_1)\,, \qquad (ii)\,M_Y(t_2).$

(4) دراسة استقلال المتغيرين X,Y .

(ح) ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك التالي : ـ

إحسب كل من : ـ

	y

(1) $f_{X|Y}(1|4)$.

(2) $F_{X|Y}(1|2) = P(X \le 1 | y = 2)$

	f(x,y)	-3	2	4
	1	0.15	0.25	0.2
x	2	0.2	0.05	0.15

السؤال الرابع: -

(أ) إذا كان *X* متغيرا عشـوائيــا يتبع توزيع مربع كاي بدالـــة كثــافـة إحتمالية :

$$f(x) = K\, x^2 e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x \ge 0.$$

إحسب ما يلي: (1) قيمة الثابت *K* . (2) التوقع *E(X)* والتباين *V(X)* .

(ب) إذا كان *X* متغيراً عشوائياً دالة كتلته الاحتمالية هي :

$$f_X(x) = \frac{x+1}{15}, \quad x = 0,1,2,3,4.$$

فأوجد : $f_Y(y)$ حيث $Y = (X-2)^2$.

(ج) **إذا كان** *X* متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f_X(x) = \frac{1}{2a}, \quad -a \le x \le a$$

فاحسب :- $f_Y(y)$ حيث $Y = \frac{x+a}{x-a}$.

السؤال الخامس: -

أ) إذا علمت أنه لمتغيرين عشوائيين

X,Y نجد أن :

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{4-2x-2y}{3-2x}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

وأن

$$f_X(x) = \frac{3-2x}{2}, \quad 0 \le x \le 1$$

فاحسب :-

$$(i) \quad f_{X,Y}(x,y), \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

$$(ii) \quad E(Y \mid x)$$

(ب) إذا كان للمتجه (X_1, X_2) الدوال الهامشية التالية :

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x_1}{2}}, \quad x_1 \ge 0, \qquad f_{x_2}(x_2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x_2}{2}}, \quad x_2 \ge 0$$

وبفرض أن المتغيرين X_1, X_2 مستقلان احسب : $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$

(ج) بإعتبار كل المعلومات والنتائج للمتغيرين المستقلين X_1, X_2 أعلاه احسب كل من :

$$(i) \quad f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2), \quad (ii) \quad f_{Y_1}(y_1)$$

حيث

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2) \text{ ،} \qquad Y_2 = X_2$$

<u>السؤال السادس : -</u>

إذا كان للمتجه (X_1, X_2) دالة الكثافة الاحتمالية :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = e^{-(x_1+x_2)}, \qquad 0 \le x_1, x_2 \le \infty$$

(1) إحسب دالة الكثافة الاحتمالية للمتجه (Y_1, Y_2) حيث $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ ،

$Y_1 = X_1 + X_2$

(2) احسب الدوال الهامشية : $f_{Y_1}(y_1)$ و $f_{Y_2}(y_2)$.

السؤال السابع : -

(أ) إذا كانت دالة توليد العزوم المشتركة للمتغيرين X,Y هي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)=\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}-t_1)(\mathbf{1}-t_2)} \quad ,t_1,t_2\neq \mathbf{1}.$$

المطلوب :-

(1) حساب كل من :- $(i)\,M_X(t_1)\,,\qquad (ii)\,M_Y(t_2).$

(2) هل المتغيران X,Y مستقلان ؟ وضح السبب .

(ب) المتجه العشوائي (X,Y) له دالة الكثافة الاحتمالية التالية : ـ

$$f(x,y)=\frac{x(1+3y^2)}{4} \quad ,0<x<2,\quad 0<y<1$$

إحسب كل من : ـ

$(1)\ f_X(x),\quad (2)\ f_Y(y),\quad (3)\ f_{X|Y}(x\,|\,y),(4)E(X\,|\,y),(5)E[E(X\,|Y)]$

إنتهت الأسئلة

الإختبارالنهائي - الفصل الدراسي الأول 1437/1438هـ

إستعن بالله ثم أجب عن جميع الأسئلة التالية :

1 – (أ) أكتب فضاء العينة للتجربة العشوائية التالية : عدد مرات ثني سلك معدني حتى ينقطع ؟.

(ب) إذا كان P(A)=0.2 و P(AUB)=0.8 فإحسب P(B) في كل من الحالات التالية:

A (1) و B حادثتان متنافيتان . (2) A و B حادثتان مستقلتان . (3) $A \subset B$.

---

2 – إذا كان المتغير العشوائي *X* له دالة الكتلة الاحتمالية:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{x}{6} \quad , x = 1,2,3.$$

(ب) احسب الدالة F(x) . (ب) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_x(t)$.

(ج) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_y(t)$ للمتغير العشوائي Y حيث *Y*=3*X*+1 .

(د) احسب دالة الكتلة الاحتمالية $f_y(y)$.

---

3 - إذا كانت الدوال التالية تمثل دوال توليد عزوم متغير عشوائي *X* . المطلوب :

ذكر اسم توزيع المتغير *X* وحساب توقعه *E(X)* :

$(i)\ M_X(t) = e^{-2(1-e^t)}$, $(ii)\ M_X(t) = (\frac{4}{7e^{-t}-3})^2$, $(iii)\ M_X(t) = (\frac{4}{4-t})^2$,

$(iv)\ M_X(t) = (1-2t)^{-6}$, $(v)\ M_X(t) = e^{3t+2t^2}$.

4 - (أ) أثبت المتطابقة التالية: $M_{X,Y}(t_1,0) = M_X(t_1)$

(ب) إذا كانت دالة توليد العزوم المشتركة للمتغيرين X,Y هي:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = e^{t_1^2+t_2^2} \quad , -\infty < t_1, t_2 < \infty.$$

فالمطلوب :- (1) حساب كل من :- $(i) M_X(t_1)$, $(ii) M_Y(t_2)$.

هل المتغيران X,Y مستقلان ؟ وضح ؟ .

5 - ليكن *X,Y* متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك التالي : – إحسب كل من :

–

	y			
f(x,y)	1	2	3	4

(1) $E(XY)$, (2) $Cov(X,Y)$,

(3) $Cov(2X,3Y)$, (4) $\rho_{X,Y}$

	0	0.1	0	0.2	0.1
x	2	0	0.2	0.1	0.1
	5	0.1	0.1	0	0

(5) $M_{X,Y}(t_1,t_2)$,　(6) $f_{X|Y}(0|3)$

(7) $F_{X|Y}(2|4)=P(X\le 2|y=4)$

(8) هل المتغيران (X,Y) مستقلان؟. وضح.

(9) احسب $f_z(z)$ حيث $Z=X+Y$.

---

6 - المتجه العشوائي (X,Y) له دالة الكثافة الاحتمالية التالية : ـ

$$f(x,y)=\frac{8-x-y}{32}\quad ,0<x<4,\quad 1<y<3$$

إحسب كل من : ـ

(1) $f_X(x)$,　(2) $f_Y(y)$,　(3) $f_{X|Y}(x|y)$, (4) $E(Y)$, (5) $E[E(Y|X)]$

---

7 - لتكن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي : ـ

$$f_X(x)=e^{-x}\quad ,x\ge 0$$

احسب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y حيث $Y=\sqrt{X}$

إنتهت الأسئلة　أرجو لكم التوفيق والنجاح