بناء النماذج في بحوث العمليات

Model Building in Operations Research

النمذجة (Modeling)

هي مجموعة إجراءات لإنشاء نموذج ممثل لمسألة حقيقية. أي تمثيل المسألة الحقيقية بشيء أبسط منها نسميه النموذج. ويمكن أن نصنف النماذج وفق ما يأتي:

نماذج فيزيائية : وهي تمثل أنظمة فيزيائية تكون تكلفة تصميمها كبيرة أو تأخذ وقتاً طويلاً. فيكون النموذج تبسيطاً لعرض هذا النظام الفيزيائي الحقيقي. و يكون الهدف من النمذجة هو تحليل سلوك النظام لمعرفة ميزاته (إذا كان النظام موجوداً) أو من أجل إيجاد أفضل تصميم له في المستقبل (إذا كان النظام فكرة تنتظر التنفيذ).

النمـذجـة

نماذج ذهنية : يوجد هذا النوع من النماذج في عقل الإنسان فقط. ويتكون نتيجة لتراكم خبرات الإنسان وتجاربه. وهذه النماذج غالباً ما تكون غير واضحة وغير محددة، ولا يمكن التعبير عنها بعلاقات من أي نوع، ولكنها تساعد الإنسان على اتخاذ القرارات ورسم المخططات الضرورية لمسيرة حياته.

نماذج رمزية : وتتكون من نماذج رياضية وأخرى غير رياضية. نقصد بالنماذج غير الرياضية: نماذج لغوية (كلامية) ، نماذج رسومية ومخططات ، ... .

النماذج الرياضية تعد الأهم والأكثر استخداماً من سائر أنواع النماذج الأخرى.

النمذجة الرياضية (Mathematical Modeling)

- هي التعبير عن الترابط بين المتغيرات الفيزيائية لنظام ما بعلاقات رياضية. أو بشكل آخر، النمذجة الرياضية هي صياغة مسألة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها اسم النموذج الرياضي.
- تستخدم النماذج الرياضية في العلوم الطبيعية (مثل الفيزياء ، الجيولوجيا ، ...) والهندسية (مثل هندسة النقل ، الذكاء الاصطناعي ، ...) والاجتماعية (مثل علم الاقتصاد ، علم النفس ، ...).
- أمثلة للنماذج الرياضية: البرامج الرياضية ، النماذج الإحصائية ، المعادلات التفاضلية ، ...

خطوات النمذجة الرياضية في بحوث العمليات

1. دراسة وتحليل المسألة المطروحة:
- أوجد جميع المعلومات والبيانات الخاصة بالمسألة.
- حدد جميع الافتراضات الضرورية والغاية المراد الوصول لها.

2. بناء وصياغة النموذج الرياضي:
- استخدم العلاقات الرياضية المناسبة لصياغة (تمثيل) المعلومات والبيانات والافتراضات المعطاة في المسألة في نموذج رياضي يمكن حله باستخدام إحدى طرق بحوث العمليات.
- بعض المسائل الحقيقية ليست سهلة الصياغة إلى نماذج رياضية، لذا قد نحتاج لتبسيطها ليسهل نمذجتها.

خطوات النمذجة الرياضية في بحوث العمليات

3. حل النموذج الرياضي:

- أوجد أفضل حل للمسألة الرياضية المعطاة في النموذج الرياضي.
- أحيانا يصعب حل النموذج الرياضي، لذلك فإنه من الضروري أحيانا أن نبسط المسألة أو نقربها إلى مسألة أخرى قريبة منها يسهل حلها.
- بعض النماذج الرياضية ليس لها حلول ممكنة.

خطوات النمذجة الرياضية في بحوث العمليات

4. تحليل وتفسير الحل واستخلاص النتائج:

- دراسة الحل وفقاً لمعطيات وافتراضات المسألة.
- استخلاص النتائج التي ستترتب على تطبيق هذا الحل.

5. التحقق وتطبيق الحل أو إعادة الصياغة:

- إذا كانت نتائج النموذج الرياضي جيدة ومُرْضية ، فإننا نكون قد وفقنا بإيجاد النموذج الرياضي الذي يمثل المسألة الحقيقية.
- بعد الحصول على نتائج النموذج الرياضي ونقاشها مع الإدارة، قد يطرأ اعتراض أو تعديل أو تصحيح على معطيات المسألة أو الافتراضات التي استخدمت، صحح وعدل النموذج عند الحاجة أو قد يتم البحث عن هيكل آخر للنموذج الرياضي.

البرمجة الرياضية
Mathematical Programming

- البرنامج الرياضي يعتبر من أهم النماذج الرياضية .
- مسألة البرمجة الرياضية تعني – بشكل عام – البحث عن القيمة المثلى (صغرى أو عظمى) لدالة تسمى دالة الهدف تضم عدة متغيرات. تخضع هذه المتغيرات لمجموعة من القيود تأخذ صيغة معادلات أو متراجحات.
- حل مسألة البرمجة الرياضية يتطلب إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق جميع القيود وتحقق القيمة المثلى لدالة الهدف.
- كلمة برمجة هنا تعني التخطيط للاستغلال الأمثل للموارد (مثل: تحديد خطة الإنتاج اليومي في أحد المصانع للحصول على أكبر ربح ممكن).
- البرنامج الخطي (والغير خطي) يعتبر من أهم البرامج الرياضية.

عناصر البرنامج الرياضي

– معالم النظام (Parameters)

بيانات معطاة، متخذ القرار لا يملك التحكم فيها.

– متغيرات القرار (Decision Variables)

كميات مجهولة، متخذ القرار يملك التحكم فيها.

– دالة الهدف (Objective Function)

دالة تقييم القرار (مقدار المنفعة الحاصلة من قرار ما).

– القيود (Constraints)

الموارد المتاحة ، بيئة المشكلة ، العلاقة التي تربط متغيرات القرار.

(معادلات أو متراجحات).

بناء النموذج الرياضي - مثال

مصنع ينتج يومياً نوعين من الدهانات : دهانات خارجية ودهانات داخلية.

لإنتاج كل نوع من أنواع هذه الدهانات يتم مزج مادتين أساسيتين من المواد الخام هما: مادة A ومادة B. تستطيع ادارة المصنع تأمين 6 أطنان على الأكثر يوميا من مادة A و8 أطنان على الأكثر يوميا من مادة B. لإنتاج طن واحد يوميا من الدهان الخارجي يتم مزج طن واحد من مادة A مع طنين من مادة B. الطن الواحد المنتج من الدهان الداخلي يستلزم مزج طنين من مادة A مع طن واحد من مادة B. دراسة السوق المحلية أدت إلى أن الطلب على الدهان الداخلي لا يمكن أن يزيد عن الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد يوميا. أيضا أظهرت الدراسات أن اجمالي الطلب اليومي للدهان الداخلي لايتعدى طنين يوميا. ترغب ادارة المصنع من الحصول على السياسة المثلى للانتاج لتشغيل المصنع علما بأن المصنع يبيع الطن الواحد من الدهان الخارجي بـ 3000 ريال والطن الواحد من الدهان الداخلي بـ 2000 ريال. أوجد النموذج الرياضي الذي يصف هذا البرنامج..

بناء النموذج الرياضي - مثال

الجدول التالي يبين المقادير اللازمة لهذا النموذج وكذلك الأرباح:

	الكمية (بالطن) اللازمة لإنتاج طن واحد من: الدهان الخارجي	الدهان الداخلي	المتوفر يومياً من المادة الخام (طن)
مادة خام A	1	2	6
مادة خام B	2	1	8
الربح (ريال/طن)	3000	2000	

بناء النموذج الرياضي - مثال

من خلال الدراسات على السوق تبين أن الطلب اليومي على الدهان الداخلي لا يمكن أن يزيد عن الطلب اليومي على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد يومياً.

كما أظهرت الدراسات على السوق أن إجمالي الطلب اليومي على الدهان الداخلي لا يتعدى طنين يومياً.

ترغب إدارة المصنع إيجاد سياسة الإنتاج المثلى لتشغيل المصنع.

أوجد النموذج الرياضي لهذه المسألة.

بناء النموذج الرياضي

- يمكن البدء في بناء النموذج الرياضي بالاجابة على الثلاثة أسئلة التالية :

1. ما الذي يحاول متخذ القرار تحديده؟ أي ماهي متغيرات القرار للمسألة؟
2. ماهو الهدف المطلوب تحقيقه؟ أي كيفية قياس ماهو الحل الأمثل من ضمن كل القيم الممكنة للمتغيرات؟
3. ماهي القيود التي يجب على المتغيرات تحقيقها للوفاء بجميع المتطلبات التي تم تحديدها في المسألة؟

- يتم أولا تعريف متغيرات القرار ، ثم التعبير عن الهدف بدالة رياضية ، ثم التعبير عن القيود في صورة معادلات ومتراجحات رياضية.

بناء النموذج الرياضي

1 - معالم النظام (Parameters)

وهي معطيات المسألة. لا يملك متخذ القرار التحكم فيها.

- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة A = 6
- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة B = 8
- كمية مادة A الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الخارجي = 1
- كمية مادة B الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الخارجي = 2
- كمية مادة A الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الداخلي = 2
- كمية مادة B الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الداخلي = 1
- نسبة الطلب من الدهان الخارجي إلى الطلب من الدهان الداخلي
- أسعار بيع الطن من الدهان الخارجي والداخلي

بناء النموذج الرياضي

2 - متغيرات القرار (Decision Variables)

وهي القرارات (الخيارات) التي يملك متخذ القرار التحكم فيها.

- كمية مادة A المضافة لمادة B لإنتاج الطن من الدهان الخارجي ✗
- كمية مادة A المضافة لمادة B لإنتاج الطن من الدهان الداخلي ✗
- نسبة الطلب من الدهان الخارجي إلى الطلب من الدهان الداخلي ✗
- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة A ✗
- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة B ✗

بناء النموذج الرياضي

2 - متغيرات القرار (Decision Variables)

و هي القرارات (الخيارات) التي يملك متخذ القرار التحكم فيها.

- عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الخارجي ✓

  ولتكن x_1

- عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الداخلي ✓

  ولتكن x_2

بناء النموذج الرياضي

3 - دالة الهدف (Objective Function)

وهي دالة تقييم السياسات الإنتاجية الممكنة.

السياسة الإنتاجية ⟺ كمية الإنتاج من الدهان الخارجي والداخلي

على أي أساس يتم التقييم ؟؟

- سعر بيع الطن من الدهان الخارجي = 3000 ريال
- سعر بيع الطن من الدهان الداخلي = 2000 ريال

⇐ تقييم السياسات على أساس العوائد اليومية

بناء النموذج الرياضي

3 - دالة الهدف (Objective Function)

إجمالي العوائد اليومية =

(عدد الأطنان المنتجة من الخارجي يومياً) × (سعر بيع طن دهان خارجي)

+ (عدد الأطنان المنتجة من الداخلي يومياً) × (سعر بيع طن دهان داخلي)

=

(عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي يومياً) × (3000)

+ (عدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي يومياً) × (2000)

=

$$3000\, x_1 + 2000\, x_2$$

بناء النموذج الرياضي

3 - دالة الهدف (Objective Function)

لتكن قيمة التقييم لأي سياسة (x_1 , x_2) هي z

$$z = 3000\, x_1 + 2000\, x_2$$

ما هو الهدف من التقييم (Optimality)؟؟

– أرباح ⇐ تعظيم قيمة الدالة (maximize)

– تكـــاليف ⇐ تقليـل قيمة الدالة (minimize)

دالة الهدف:

$$\max \quad z = 3000\, x_1 + 2000\, x_2$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

من صياغة المشكلة نجد أن :

1. إجمالي المتوفر يوميا من مادة A = 6 أطنان.
2. إجمالي المتوفر يوميا من مادة B = 8 أطنان.
3. الطلب على الدهان الداخلي لا يمكن أن يزيد عن الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد يومياً.
4. إجمالي الطلب اليومي للدهان الداخلي لا يتعدى طنين يوميا.
5. قيود طبيعة القرار.

بناء النموذج الرياضي

4 - القيــــود (Constraints)

1. إجمالي المتوفر يوميا من مادة A = 6 أطنان

لا تستطيع إدارة المصنع أن تجعل الإنتاج اليومي من النوعين يستهلك أكثر من 6 أطنان يوميا من مادة A

(الحد الأعلى المتاح من مادة A يومياً) ≥ (إجمالي استهلاك المادة A يومياً)

2. إجمالي المتوفر يوميا من مادة B = 8 أطنان

لا تستطيع إدارة المصنع أن تجعل الإنتاج اليومي من النوعين يستهلك أكثر من 8 أطنان يوميا من مادة B

(الحد الأعلى المتاح من مادة B يومياً) ≥ (إجمالي استهلاك المادة B يومياً)

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــود (Constraints)

إجمالي استهلاك المادة A يومياً =

عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي × (كمية المادة A المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الخارجي)

+ عدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي × (كمية المادة A المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الداخلي)

$$1x_1 + 2x_2 =$$

إذن قيد الاستهلاك على مادة A

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

إجمالي استهلاك المادة B يوميا =

عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي × (كمية المادة B المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الخارجي)

+ عدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي × (كمية المادة B المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الداخلي)

$$2x_1 + 1x_2 =$$

إذن قيد الاستهلاك على مادة B

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

3. الطلب على الدهان الداخلي لا يمكن أن يزيد عن الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد يومياً.

الحد الأعلى لعدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي

= عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي يومياً + 1

إذن قيد الطلب على الدهان الداخلي بالنسبة للدهان الخارجي

$$x_2 \le x_1 + 1 \Leftrightarrow -x_1 + x_2 \le 1$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

4. إجمالي الطلب اليومي للدهان الداخلي لا يتعدى طنين يومياً

الحد الأعلى للطلب على الدهان الداخلي = 2

إذن قيد الحد الأعلى للطلب على الدهان الداخلي

$$x_2 \leq 2$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

5. قيود طبيعة القرار:

– وحدة قياس متغيرات القرارات أطنان $\Leftarrow$ متغيرات متصلة (Continuous)

– متغيرات القرار تمثل إنتاج $\Leftarrow$ غير سالبة

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

البرنامج الرياضي الخطي

x_1 = عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الخارجي

x_2 = عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الداخلي

$$\max \; z = 3000x_1 + 2000x_2$$

subject to:

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

تكتب عادة:
s.t.

تكتب عادة:
$x_1 , x_2 \ge 0$

بناء النموذج الرياضي

<u>مثال 2</u>:

يعمل مصنع على إنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات: المنتج-1، المنتج-2 ، المنتج-3 . ولإنتاج وحدة واحدة من أي منتج من هذه المنتجات الثلاثة يتم مزج مادتين من ثلاثة مواد خام هي: خام-1 ، خام-2 ، خام-3 وذلك بمقادير محددة حسب الجدول التالي:

المواد الخام المستهلكة (بالكيلو) للوحدة الواحدة			
	المنتج-1	**المنتج-2**	**المنتج-3**
خام-1	**2**	**0**	**3**
خام-2	**3**	**1**	**0**
خام-3	**0**	**4**	**5**

بناء النموذج الرياضي

ويستطيع المصنع تأمين 400 كيلو يومياً من خام-1 و 300 كيلو يومياً من خام-2 و 350 كيلو يومياً من خام-3. تتم عملية الإنتاج بمرور المنتجات الثلاثة على آلتين متتاليتين هما: آلة-1 ، آلة-2 بحيث يستغرق كل منتج وقت محدد عند كل آلة حسب الجدول التالي:

الوقت المستغرق (بالساعة) للوحدة الواحدة عند كل آلة			
	المنتج-1	المنتج-2	المنتج-3
آلة-1	2	3	4
آلة-2	3	2	1

علما بأن المصنع يعمل لمدة 16 ساعة يوميا. فإذا علمت أن المصنع يربح 200 ريال لكل وحدة من المنتج-1 ويربح 350 ريال لكل وحدة من المنتج-2 ويربح 750 ريال لكل وحدة من المنتج-3 ، فأكتب البرنامج الرياضي الذي يحدد للمصنع السياسة الإنتاجية المثلى.

بناء النموذج الرياضي

1 - متغيرات القرار (Decision Variables)

- x_1 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-1
- x_2 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-2
- x_3 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-3

2 - دالة الهدف (Objective Function)

السياسة الإنتاجية $\Leftrightarrow$ كمية الإنتاج من كل منتج يومياً

التقييم (الأمثلية) على أساس الأرباح $\Leftarrow$ max

قيمة أي سياسة إنتاجية = z

$$\max\ z = 200\,x_1 + 350\,x_2 + 750\,x_3$$

بناء النموذج الرياضي

3 - القيـــــود (Constraints)

من صياغة المشكلة نجد أن الموارد المتاحة:

1. إجمالي المتوفر يومياً من مادة خام-1 = 400 كيلو
2. إجمالي المتوفر يومياً من مادة خام-2 = 300 كيلو
3. إجمالي المتوفر يومياً من مادة خام-3 = 350 كيلو
4. ساعات العمل اليومية على آلة-1 = 16 ساعة
5. ساعات العمل اليومية على آلة-2 = 16 ساعة

بناء النموذج الرياضي

3 - القيـــــود (Constraints)

باستخدام السياسة الإنتاجية x_1 , x_2 , x_3 فإن:

1. الاستهلاك من مادة خام-1 $= 2x_1 + 0\,x_2 + 3x_3$
2. الاستهلاك من مادة خام-2 $= 3x_1 + 1\,x_2 + 0x_3$
3. الاستهلاك من مادة خام-3 $= 0x_1 + 4\,x_2 + 5x_3$
4. ساعات العمل على آلة-1 $= 2x_1 + 3\,x_2 + 4x_3$
5. ساعات العمل على آلة-2 $= 3x_1 + 2\,x_2 + 1x_3$

البرنامج الرياضي الخطي

$x_1 =$ عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-1

$x_2 =$ عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-2

$x_3 =$ عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-3

$$\max\ z = 200x_1 + 350x_2 + 750x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned}
2x_1 \quad\quad\quad + 3x_3 &\le 400 \\
3x_1 + x_2 \quad\quad\quad &\le 300 \\
4x_2 + 5x_3 &\le 350 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 16 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 16 \\
x_1 , x_2 , x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

بناء النموذج الرياضي

مثال 3:

ترغب إدارة شركة بترول استثمار رأس مالها في هذه السنة والسنة المقبلة ولديها خمس فرص استثمارية كما هو موضح في الجدول التالي مع صافي الأرباح (بملايين الريالات). لدى الشركة 40 مليون ريال للإستثمار في السنة الحالية ويتوقع أن يتوفر للشركة في السنة المقبلة 20 مليون ريال للاستثمار. تستطيع الشركة شراء أي نسبة من كل استثمار على أن تستثمر نفس النسبة من الاستثمار في السنة المقبلة ولا تستطيع الشركة استخدام ما بقي من رأس المال في السنة الحالية للاستثمار في السنة القادمة.
أكتب برنامج رياضي يحدد للشركة سياسة الاستثمار المثلى.

	استثمار 1	استثمار 2	استثمار 3	استثمار 4	استثمار 5
قيمة الاستثمار في السنة الحالية	11	53	5	5	29
قيمة الاستثمار في السنة القادمة	3	6	5	1	34
صافي الأرباح	13	16	16	14	39

البرنامج الرياضي الخطي

x_i = نسبة المبلغ المستثمر في الاستثمار رقم i ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\max\ z = 13\,x_1 + 16\,x_2 + 16\,x_3 + 14\,x_4 + 39\,x_5$$

s.t.

$$11\,x_1 + 53\,x_2 + 5\,x_3 + 5\,x_4 + 29\,x_5 \le 40$$

$$3\,x_1 + 6\,x_2 + 5\,x_3 + 1\,x_4 + 34\,x_5 \le 20$$

(لأن x_i عبارة عن نسبة) $x_i \le 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

بناء النموذج الرياضي

مثال 4:

تمتلك شركة وجبات سريعة مستودعين غذائيين لتأمين احتياجات ثلاثة فروع لها في المملكة. ويبين الجدول التالي احتياج كل فرع ومحتوى كل مستودع من الأغذية (بالطن) بالإضافة إلى تكلفة نقل الطن الغذائي الواحد من كل مستودع إلى أي فرع من الفروع. فأوجد النموذج الرياضي بحيث تؤمّن الشركة احتياجات كل فرع بأقل تكلفة إجمالية.

محتويات المستودع	تكلفة شحن الطن			
	فرع-3	فرع-2	فرع-1	
5	20	12	23	مستودع-1
8	4	19	8	مستودع-2
	2	3	4	طلب الفرع

بناء النموذج الرياضي

هذا المثال يعتبر أحد مسائل النقل حيث في مسائل النقل

- نرغب في نقل بضائع من مراكز تموين $i = 1, \dots, m$ إلى مراكز طلب $j = 1, \dots, n$, حيث عدد الوحدات المنقولة = x_{ij}.
- يستطيع مركز التموين i امداد مراكز الطلب بكمية s_i من الوحدات على الأكثر, أي أن القيد يكون بالشكل التالي

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \qquad i = 1, \dots, m$$

- مركز الطلب رقم j لابد أن يستقبل كمية d_j من الوحدات على الأقل,

أي أن القيد يكون بالشكل التالي

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \qquad j = 1, \dots, n$$

- تكلفة نقل وحدة واحدة من مركز التموين رقم i إلى مركز الطلب رقم j تساوي c_{ij} حيث c_{ij} عدد ثابت.

البرنامج الرياضي الخطي:

x_{11} =عدد الأطنان المنقولة من المستودع 1 إلى الفرع 1, تكلفتها $23\ x_{11}$

x_{12} =عدد الأطنان المنقولة من المستودع 1 إلى الفرع 2, تكلفتها $12\ x_{12}$

وهكذا،، بالتالي:

x_{ij} =عدد الأطنان المنقولة من المستودع i إلى الفرع j ،

$s_1 = 5, s_2 = 8$

$d_1 = 4, d_2 = 3, d_3 = 2$

$i = 1, 2$ تمثل المستودع الأول والثاني

$j = 1, 2, 3$ تمثل الفرع الأول والثاني والثالث

$$\textbf{min}\ \ z = 23x_{11} + 12x_{12} + 20x_{13} + 8x_{21} + 19x_{22} + 4x_{23}$$

s.t.

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5$ (الكمية الخارجة من المستودع الأول)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8$ (الكمية الخارجة من المستودع الثاني)

$x_{11} + x_{21} \geq 4$ (الكمية الداخلة للفرع الأول)

$x_{12} + x_{22} \geq 3$ (الكمية الداخلة للفرع الثاني)

$x_{13} + x_{23} \geq 2$ (الكمية الداخلة للفرع الثالث)

$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2 \qquad j = 1, 2, 3$

بناء النموذج الرياضي

مثال 5:

شركة منتجات إلكترونية تنتج نوعين من الحاسبات الشخصية : A و B. يمر كل نوع من هذه الأجهزة عبر ثلاث مراحل للإنتاج هي: مرحلة إعداد اللوحة الأساسية ، مرحلة تركيب محركات الأقراص ، مرحلة تحميل نظام التشغيل. الوقت الذي يستغرقه كل جهاز في كل من هذه المراحل موضح في الجدول التالي. وتوظف الشركة (7) فنيين موزعين على النحو التالي : (5) فنيين في قسم إعداد اللوحات الأساسية و (1) فني في قسم تركيب محركات الأقراص و (1) فني في قسم تحميل نظام التشغيل والبرمجيات ، وكل فني يعمل (8) ساعات يومياً ، علماً بأن فني البرمجيات يستطيع العمل على ثلاثة أجهزة في آن واحد ، وتستطيع الشركة بيع على الأكثر (10) أجهزة يومياً. وتربح الشركة (800) ريال في الجهاز من نوع A بينما تربح (500) ريال في الجهاز من نوع B .

بناء النموذج الرياضي

الوقت المستغرق (ساعة)			نوع الجهاز
نظام التشغيل	محركات الأقراص	اللوحة الأساسية	
2	1	3	A
1	0.5	2	B

البرنامج الرياضي الخطي

متغيرات القرار:

x_1 = عدد الأجهزة المصنعة يومياً من النوع A

x_2 = عدد الأجهزة المصنعة يومياً من النوع B.

دالة الهدف:

$$\max z = 800x_1 + 500x_2$$

القيود:

توظف الشركة (7) فنيين موزعين على النحو التالي :

i. (5) فنيين في قسم إعداد اللوحات الأساسية وكل فني يعمل (8) ساعات يومياً.
ii. (1) فني في قسم تركيب محركات الأقراص وكل فني يعمل (8) ساعات يومياً.
iii. (1) فني في قسم تحميل نظام التشغيل والبرمجيات وكل فني يعمل (8) ساعات يومياً ، علماً بأن فني البرمجيات يستطيع العمل على ثلاثة أجهزة في آن واحد.
iv. وتستطيع الشركة بيع على الأكثر (10) أجهزة يومياً.

بناء النموذج الرياضي

من القيد (i) نجد أن اجمالي ساعات العمل = 40

من القيد (ii) نجد أن اجمالي ساعات العمل = 8

من القيد (iii) نجد أن اجمالي ساعات العمل = 24

بالتالي يكون النموذج الرياضي بالشكل التالي:

$$\max z = 800x_1 + 500x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 0.5x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 24 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 , x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج الرياضي الخطي

مثال 6:

يقوم أحد مصانع الأدوية العالمية بإنتاج نوعين من أقراص فيتامين B المركب, وذلك بمزج مكونين i و ii من المكونات التي تحتوي على نسب عالية من هذا الفيتامين. تحتوي كل أوقيه "وحدة" من i على 10 مجم من فيتامين B_1 و 0.15 مجم من فيتامين B_2 و 1.2 مجم من فيتامين B_6 و 0.55 مجم من فيتامين B_{12} . تحتوي كل أوقيه "وحدة" من ii على 12.5 مجم من فيتامين B_1 و 0.6 مجم من فيتامين B_2 و 0.3 مجم من فيتامين B_6 و 0.25 مجم من فيتامين B_{12} . سعر تكلفة الوحدة من المكونين i و ii تقدر بـ 10.4 و 7.2 دولار. تتطلب المقتضيات أن يحوي كل قرص من فيتامين B المركب على 50 مجم, 1 مجم, 3 مجم, 2 مجم على الأقل من فيتامين B_1 و B_2 و B_6 و B_{12} على الترتيب. يهدف المصنع إلى جعل تكلفة المواد الداخلة في تركيب القرص أقل مايمكن. ماهي الكمية من كلا المكونين i و ii الواجب ادخالها في صناعة القرص لتحقيق ذلك الهدف؟

	فيتامين B المركب		
	i	ii	
B_1	10	12.5	50
B_2	0.15	0.6	1
B_6	1.2	0.3	3
B_{12}	0.55	0.25	2

البرنامج الرياضي الخطي

x_1 = كمية المكوّن i الداخل في تركيب أقراص فيتامين B المركب.

x_2 = كمية المكوّن ii الداخل في تركيب أقراص فيتامين B المركب.

$$\min \; z = 10.4\,x_1 + 7.2\,x_2$$

s.t.

$$10\,x_1 + 12.5\,x_2 \geq 50$$

$$0.15\,x_1 + 0.6\,x_2 \geq 1$$

$$1.2\,x_1 + 0.3\,x_2 \geq 3$$

$$0.55\,x_1 + 0.25\,x_2 \geq 2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$