- جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

نظرية القرارات

Decision Theory

الباب الأول

إتخاذ القرار بدون البيانات

No Data decision problem

المحتويات

عناصر مسألة اتخاذ القرار :

كثيراً ما يواجه الباحث عثرات أو مشاكل تجعله بحاجة إلى أن يتخذ قراراً من بين مجموعة من الخيارات، ولابد أن يكون هذا الخيار صائباً. وتكون هذه الصوابية نسبية كما هو المعلوم . فما هو مناسب وفق أحد المعايير قد يكون غير مناسب وفق معيارٍ آخر. وتجدر الإشارة إلى أن أكبر ما يعطل عملية إتخاذ القرار هو عدم وضوح الأحوال المستقبلية أو ما يسمى بالظروف الطبيعية المستقبلية (*State of Nature*) التي تحيط بالمشكلة .وبشكلٍ عام لو كان الظرف الطبيعي المستقبلي معلوماً لأصبح إتخاذ القرار الصائب سهلاً لأنه سيكون القرار الذي يعطي أعلى ربح أو أقل خسارة. لذلك يتوجب أن يتوفر معياراً عددياً مناسباً يمكنني من إجراء المفاضلة بين القرارات المختلفة عند ظرفٍ طبيعي معين. ويجب أن يتصف هذا المعيار بقواعد منطقية . لذلك يمكننا القول أن للمشكلة ثلاثة عناصر هامة هي :

- مجموعة الخيارات المتاحة.
- مجموعة الظروف الطبيعية .
- المعيار المادي الذي يسمح بالمفاضلة بين القرارات عند ظرفٍ معين.

ومن أجل تبسيط هذه المشكلة نفرض أن مجموعة الخيارات المتاحة محصورة في فضاءٍ:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k\}$$

يسمى فضاء الإجراءات البسيطة(*Pure Actions Space*) تمييزاً لها عن مجموعة أخرى سنعالجها لاحقاً وتسمى فضاء الإجراءات المركبة (*Mixed Actions Space*) . وأن الظروف الطبيعية المتاحة محصورة في فضاءٍ نرمز له بالشكل:

$$\Omega = \{\theta\}$$

وللمفاضلة بين الإجراءات البسيطة في الفضاء $\mathcal{A}$ فإنه يوجد عدة معاييرعددية تقيس العاقبة التي نجنيها من اختيارالإجراء البسيط a عند الظرف θ . منها دالة الربح أو دالة الخسارة وسنستعمل هنا دالة الخسارة (*Loss Function*)ونكتبها بالشكل $\ell(a,\theta)$ التي تعبرعن خسارة الإجراء a عند الظرف θ . وتكون الخسارة موجبة أو سالبة حيث تعبرالخسارة السالبة عن الربح . ويبين الجدول الأتي دالة الخسارة عندما تكون:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \ \& \ \Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$$

الإجراءات	الظروف الطبيعة Ω		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	$\ell(a_1,\theta_1)$	$\ell(a_1,\theta_2)$	$\ell(a_1,\theta_3)$
a_2	$\ell(a_2,\theta_1)$	$\ell(a_2,\theta_2)$	$\ell(a_2,\theta_3)$
a_3	$\ell(a_3,\theta_1)$	$\ell(a_3,\theta_2)$	$\ell(a_3,\theta_3)$
a_4	$\ell(a_4,\theta_1)$	$\ell(a_4,\theta_2)$	$\ell(a_4,\theta_3)$

بعض الملاحظات حول مسألة إتخاذ القرار:

أ-لو كان الظرف الطبيعي θ معلوماً لأخترنا الإجراء ذو أقل خسارة.

ب-نسمي إختيارالإجراء بدون أي تجارب مساعدة إختياراً بدون بيانات.

ت-نسمي إختيارالإجراء مع تجارب مساعدة إختياراً مع بيانات.

ث-يستخدم البعض دالة الندم أو الأسف $(\text{Re}\,gret\ Function)$ التالية:

$$r(a,\theta)=\ell(a\ ,\theta\ )-Min_a\ \ell(a\ ,\theta\ )$$

حيث نتمنى عند كل θ أقل خسارة $Min_a\ \ell(a\ ,\theta\ )$ ، ونتأسف عن مازاد عنه ولم نستطع تجنبه.

المنطق الذي تبنى عليه دالة الخسارة :

وسوف نوضح هنا أن دالة الخسارة مبنية على المحاكاة المنطقية من خلال مثال بسيط. تخيل أن أحد أيام ذهابك للعمل قد يكون ماطراً θ_1 أو غير ماطر θ_2 ، ولتكن مجموعة الإجراءات البسيطة الممكنة هي التالية:

a_1 = البقاء في البيت.

a_2 = أن تذهب إلى العمل بدون مظلة.

a_3 = أن تذهب إلى العمل مع مظلة.

وعند تحليل القيم الممكنة للدالة $\ell(a,\theta)$ واضح أن خسارة الإجراء a_1 تحت جميع الظروف لابد أن تكون متماثلة وتساوي أجرة العمل في ذلك اليوم فقط أي أن $\ell(a_1,\theta_1)=\ell(a_1,\theta_2)$. أما خسارة الإجراء a_2 ، فلا بد أن تتفاوت في الظرفين بحيث يكون $\ell(a_2,\theta_1)\geq\ell(a_2,\theta_2)$ لأن الذهاب إلى العمل بدون مظلة سيكون مؤثراً على

الثياب والصحة بينما الخسارة $\ell(a_2,\theta_2)$ هي شبه معدومة لأنك لم تتعب بحمل المظلة ولم تخسر الأجرة وكان الظرف مناسباً لك . ولنقارن الآن في الظرف الماطر بين خسارة البقاء في البيت a_1 وهي خسارة الأجرة فقط مع خسارة الذهاب إلى العمل بدون مظلة a_2 وهي خسارة في الملابس والإصابة في الصحة.

واضح أن الخسارة الثانية أكبر أي $\ell(a_2,\theta_1) \geq \ell(a_1,\theta_1)$ وهكذا نصل إلى المتراجحة $\ell(a_2,\theta_1) \geq \ell(a_1,\theta_1) = \ell(a_1,\theta_2) \geq \ell(a_2,\theta_2)$.

وواضح أن خسارة الذهاب إلى العمل مع المظلة a_3 في المطر θ_1 أقل منها في غير الماطر θ_2 أي أن $\ell(a_3,\theta_1) \leq \ell(a_3,\theta_2)$ لأن الحالة الأولى تتضمن خسارة الحمل وربح الحماية والثانية تتضمن خسارة الحمل فقط. وأخيراً في الظرف الماطر θ_1 فإن الخسارة بدون المظلة a_2 هي أكبر منه مع المظلة a_3 ، أي أن $\ell(a_2,\theta_1) \geq \ell(a_3,\theta_1)$ وحيث أن $\ell(a_2,\theta_2)$ هي شبه معدومة فإن : $\ell(a_2,\theta_1) \geq \ell(a_3,\theta_1) \geq \ell(a_2,\theta_2)$.

ولمقارنة $\ell(a_3,\theta_1)$ مع $\ell(a_1,\theta_1)$ ، فلابد أن خسارة أجرة اليوم أكبر من خسارة حمل المظلة في المطر: $\ell(a_1,\theta_1) \geq \ell(a_3,\theta_1)$. وبذلك تتلخص كل المقارنات السابقة في المتراجحة:

$$\ell(a_2,\theta_1) \geq \ell(a_1,\theta_1) = \ell(a_1,\theta_2) \geq \ell(a_3,\theta_1) \geq \ell(a_2,\theta_2)$$

ونبحث عن موضع الخسارة الأخيرة $\ell(a_3,\theta_2)$ من خلال الإجابة على السؤال أيهما أكبر حمل المظلة أم خسارة أجرة ذلك اليوم ؟. واضح أن أجرة اليوم أكبر، وبذلك نحصل على المتراجحة النهائية:

$$\ell(a_2,\theta_1) \geq \ell(a_1,\theta_1) = \ell(a_1,\theta_2) \geq \ell(a_3,\theta_2) \geq \ell(a_3,\theta_1) \geq \ell(a_2,\theta_2)$$

ونقترح جدول القيم التالية :

	(ماطر) θ_1	(غير ماطر) θ_2
(البقاء في البيت) a_1	4	4
(الذهاب بدون مظلة) a_2	5	0
(الذهاب مع مظلة) a_3	2	3

اتخاذ القرار بدون بيانات (No Data Decision Problem) :

في غياب البيانات والتجارب التي تساعد على اتخاذ القرار تكون المشكلة بكل بساطة هي اختيار إجراء من بين مجموعة الإجراءات المتوفرة في الفضاء $\mathcal{A}$. وكما قلنا لو كان الظرف θ معلوماً فإننا نختار الإجراء الأقل خسارة، ولكن تحت الجهل بالظرف θ فإننا نتبع الطرق التالية:

- **إجراء أقل الكبريات $MinMax$ البسيط:**

تعتمد هذه القاعدة على تجنب إمكانية الوقوع في أكبر الخسائر حيث نختار الإجراء البسيط a^* الذي له أقل أكبر الخسائر المعرف كما يلي :

$$\forall\, a \Rightarrow Max_\theta\, \ell(a^*,\theta) \le Max_\theta\, \ell(a,\theta)$$

أو بالشكل التالي:

$$Max_\theta\, \ell(a^*,\theta) = Min_a\, Max_\theta\, \ell(a,\theta)$$

مثـــــــال (1) : أوجد الإجراء أقل الكبريات البسيط لدالة الخسارة :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	1	4	2	2	5
θ_2	4	5	3	6	2
$Max_\theta\, \ell(a,\theta)$	4	5	3	6	5

الإجراء $a^* = a_3$ هو إجراء أقل الكبريات البسيط بأقل أكبر خسارة = 3.

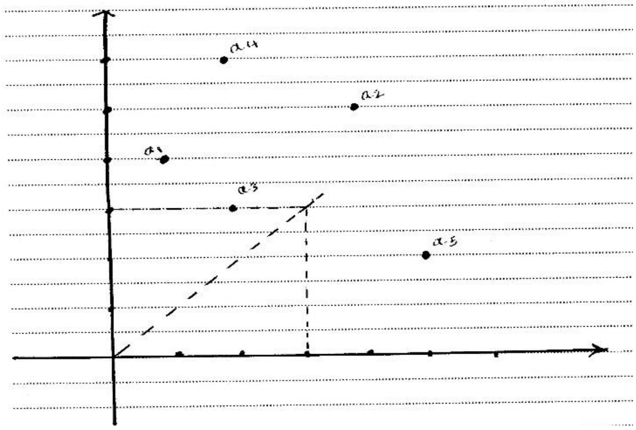
مثـــــــال (2): أوجد الإجراء أقل الكبريات البسيط لجدول الخسارة التالي:

	θ_1	θ_2	θ_3	$Max_\theta \ell(a,\theta)$
a_1	2	1	0	2
a_2	1	6	3	6
a_3	2	0	4	4
a_4	3	1	2	3

الإجراء أقل الكبريات البسيط هو $a^* = a_1$ بأقل أكبر خسارة = 2 .

حل أقل الكبريات هندسيا :

يمكن استخدام الأسلوب الهندسي لإيجاد الحل $\underline{MinMax}$ في الحالة التي يوجد فيها ظرفين $\{\theta_1, \theta_2\}$ مع أي عدد من الإجراءات البسيطة كما في **المثـــــال (1)**. نرسم جملة إحداثيات ثنائية ونمثل فيها كل إجراء بسيط a بنقطة لها الإحداثيات $(\ell(a\ ,\theta_1),\ell(a\ ,\theta_2))$ ونرسم قفصاً قطره منصف الربع الأول ونحركه إلى الأعلى حتى يصطدم مع أول إجراءٍ بسيط فيكون هو الحل المنشود:



من الرسم السابق نلاحظ أن a_3 هو الاصطدام الأول وهـو قـرار $\underline{MinMax}$ الذي وصلنا إليه في **المثـــــال (1)**.

مثـــــال (3): أوجد إجراء أقل الكبريات عددياً وهندسياً لدالة الخسارة:

	a_1	a_2	a_3
θ_1	4	5	2
θ_2	4	0	5

- **إجراء بيز (Bays) البسيط:**

يعتبر مبدأ بيز أن الظرف الطبيعي θ متغيراً عشوائياً، وأن خبرتنا العملية تستطيع بالرغم من أن θ مجهولاً أن توفر لنا دالة توزيع احتمالية مبدئية له مثل $g(\theta)$. وعندما يكون θ منفصلاً فإن $g(\theta_j) = p(\theta = \theta_j)$. وننظر عندئذ إلى قيم دالة الخسارة $\ell(a_i,\theta_j);\ j = 1,\dots,m$ عند كل إجراء بسيط a_i على إنها متغيراً عشوائياً له دالة

التوزيع الاحتمالية $g(\theta_j); j=1,....,m$. وهكذا يكون لكل إجراء بسيط a_i توقع خسارة

نسميه خسارة بيز للإجراء البسيط a_i نعرفه كما يلي:

$$B(a_i)=E_\theta[\ell(a_i,\theta)]=\sum_j \ell(a_i,\theta_j)g(\theta_j)$$

ويكون إجراء بيز a^* هو الذي له أقل خسارة متوقعة، أي أن:

$$\forall a \Rightarrow B(a^*) \leq B(a)$$

أو بالشكل التالي:

$$B(a^*)=\underset{i}{Min}\, B(a_i)$$

<u>مثـــــال (4):</u> أوجد إجراء بيز البسيط لدالة الخسارة التالية:

	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	2	4	9
a_2	16	0	6
a_3	7	2	7

عند التوزيع المبدئي للمعلمة θ :

	θ_1	θ_2	θ_3
$g(\theta)$	0.3	0.5	0.2

<u>الحـــــــــل:</u>

$$B(a_1)=\sum_{j=1}^{3} g(\theta_j)\cdot\ell(a_1,\theta_j)=0.3(2)+0.5(4)+0.2(9)=4.4$$

$$B(a_2)=\sum_{j=1}^{3} g(\theta_j)\cdot\ell(a_2,\theta_j)=0.3(16)+0.5(0)+0.2(6)=6.0$$

$$B(a_3)=\sum_{j=1}^{3} g(\theta_j)\cdot\ell(a_3,\theta_j)=0.3(7)+0.5(2)+0.2(7)=4.5$$

ويكون إجراء بيز هو $a^*=a_1$.

المعالجة الهندسية لجميع حلول بيز الممكنة:

مثـــــــال (5): لنأخذ جدول الخسارة في المثال **(1)**:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	1	4	2	2	5
θ_2	4	5	3	6	2

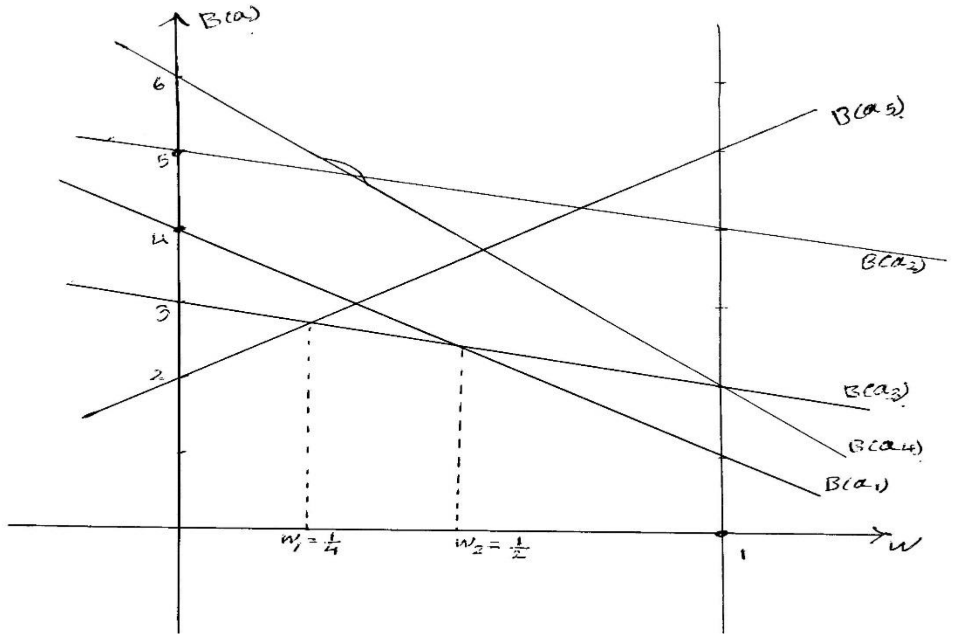
أ- أوجد إجراء بيز البسيط a^* عند التوزيع القبلي $g(\theta_1)=0.4$.

$$B(a_1)=(0.4)\,(1)+(0.6)\,(4)=2.8$$
$$B(a_2)=(0.4)\,(4)+(0.6)\,(5)=4.6$$
$$B(a_3)=(0.4)\,(2)+(0.6)\,(3)=2.6 \qquad \Rightarrow \quad a^*=a_3$$
$$B(a_4)=(0.4)\,(2)+(0.6)\,(6)=4.4$$
$$B(a_5)=(0.4)\,(5)+(0.6)\,(2)=3.2$$

ب- أدرس حلول بيز a^* عند كل القيم الممكنة للتوزيع القبلي $g(\theta_1)=w$:

$$B(a_1)=w\times(1)+(1-w)\times(4)=-3w+4$$
$$B(a_2)=w\times(4)+(1-w)\times(5)=-w+5$$
$$B(a_3)=w\times(2)+(1-w)\times(3)=-w+3$$
$$B(a_4)=w\times(2)+(1-w)\times(6)=-4w+6$$
$$B(a_5)=w\times(5)+(1-w)\times(2)=3w+2$$

تمثل هذه التوقعات مستقيمات في المستوي $(w, B(a))$. نرسم هذه المستقيمات ونبحث عن الإجراء المقابل للمستقيم الأدنى وعن قيم w المقابلة له:



المستقيمات الدنيا هي بالترتيب $B(a_1),\ B(a_3), B(a_5)$.

يتقاطع $B(a_3), B(a_5)$ في النقطة w_1 :

$$-w+3 = 3w+2 \Rightarrow 4w=1 \Rightarrow w_1 = 1/4$$

ويتقاطع $B(a_1),\ B(a_3)$ في النقطة w_2 :

$$-3w+4 = -w+3 \Rightarrow 2w=1 \Rightarrow w_2 = 1/2$$

ولدينا كل النتائج الممكنة التالية:

$$w<1/4 \Rightarrow \quad a^* = a_5$$

$$w=1/4 \Rightarrow \quad a^* = a_5 \ or\ a_3$$

$$1/4<w<1/2 \Rightarrow \quad a^* = a_3$$

$$w=1/2 \Rightarrow \quad a^* = a_3 \ or\ a_1$$

$$1/2<w\leq 1 \Rightarrow \quad a^* = a_1$$

لاحظ عندما $w=0.4$ فإننا نحصل على الحل a_3 الذي وجدناه في أ.

<u>الإجراءات المركبة:</u>

الإجراء المركب هو خطة مختلفة عن الطريقة السابقة في تبني أحد الإجراءات البسيطة من

الفضاء $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. وتتم هذه الخطة بأن نختار كل إجراء بسيط a_i من الفضاء :

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k\}$$

باحتمال قدره p_i حيث $\sum_i p_i = 1$. ونسمي المتجه الاحتمالي $P=(p_1, p_2, \ldots. p_k)$ **<u>إجراءً</u>** **<u>مركباً</u>**.

<u>سؤال للمناقشة في الفصل</u>: كيف يتم تنفيذ خطة الإجراء المركب $P=(p_1, p_2, \ldots. p_k)$ من أجل تبني أحد الإجراءات البسيطة من الفضاء $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k\}$

عدد الإجراءات المركبة وكيفية المقارنة بينها:

واضح جداً بأن عدد الإجراءات المركبة P لانهائي، فكيف نقارنها؟.

وجدنا أن لكل إجراء بسيط a عند الظرف θ الخسارة $\ell(a,\theta)$ كمعيار عددي للمقارنة بين الإجراءات المختلفة تحت نفس الظرف. وكذلك سنعرف لكل إجراء مركب P عند الظرف θ الخسارة $L(P,\theta)$ وهو أيضاً معيار عددي نستعمله لمقارنة الإجراءات المركبة المختلفة عند نفس الظرف. ونحسب الخسارة $L(P,\theta)$ بأن ننظر إلى مجموعة الخسارات $\ell(a_i,\theta)$ عند الظرف θ على أنها قيم متغير عشوائي له دالة الكتلة $(p_1,p_2,....p_k)$.

لذا نعرف $L(P,\theta)$ بأنه توقع هذه الخسارات:

$$L(P,\theta)=E_{a_i}(\ell(a_i,\theta))=\sum p_i\ell(a_i,\theta)$$

وكما سبق ووضحنا كيفية تمثيل الإجراءات البسيطة هندسياً عندما يكون لفضاء الظروف مركبتين $\Omega=\{\theta_1,\theta_2\}$ بأن نمثل كل إجراء بسيط a_i بنقطة لها الإحداثيات $\begin{pmatrix}\ell(a_i,\theta_1)\\ \ell(a_i,\theta_2)\end{pmatrix}$. وهكذا فإن مجموعة الإجراءات البسيطة $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\ldots\ldots,a_k\}$ تتمثل هندسياً بمجموعة من k نقطة.

وكذلك سيكون لكل إجراء مركب P الخسارتين:

$$\begin{pmatrix}L(P,\theta_1)\\ L(P,\theta_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum p_i\ell(a_i,\theta_1)\\ \sum p_i\ell(a_i,\theta_2)\end{pmatrix}=\sum p_i\begin{pmatrix}\ell(a_i,\theta_1)\\ \ell(a_i,\theta_2)\end{pmatrix}=\sum p_ia_i$$

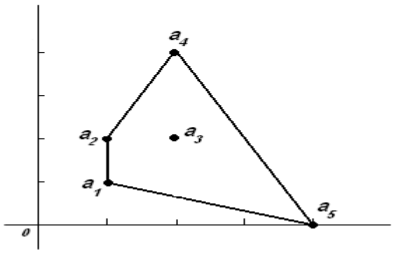
اللتين تستعملان أيضاً كإحداثيات لنقطة في الفضاء الثنائي تمثل هندسياً الإجراء المركب P. **<u>السؤال المهم</u>** الآن هو: ماهي مجموعة النقاط التي تمثل هندسياً المجموعة اللانهائية من الإجراءات المركبة P. **<u>والجواب</u>** يعتمد على ما مر معنا في الرياضيات من معلومات تتعلق **بالمجموعات المحدبة**. تقول المعلومة بأنه لأي دالة كتلة $(p_1,p_2,....p_k)$ فإن مجموعة النقاط $\sum p_ia_i$ هي أصغر مجموعة محدبة تحوي النقاط $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\ldots\ldots,a_k\}$.

ونعرف المجموعة المحدبة بأنها التي تحوي الخط الواصل بين أي نقطتين فيها.

<u>أرسم في الفصل</u> أصغر مجموعة محدبة تحوي الإجراءات البسيطة:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	1	1	2	2	4
θ_2	1	2	2	4	0

نمثل هندسياً في الفضاء الثنائي هذه الإجراءات البسيطة بخمسة نقاط وتكون أصغر مجموعة محدبة تحوي هذه النقاط هي التالية:



ويتميز هذا الشكل بما يلي:

- أي إجراء مركب P يمكن تمثيله بنقطة داخله لها الإحداثيين $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \sum p_i a_i$
- أي نقطة داخله إحداثياتها (L_1, L_2) فلابد أن نجد إجراءً مركباً P بحيث تتحقق العلاقة السابقة. وأي نقطة خارجه إحداثياتها (L_1, L_2) فلن نجد إجراءً مركباً P بحيث تتحقق هذه العلاقة أبداً.
- أي إجراء بسيط a_i هو إجراء مركب عند وضع الإحتمال 1 في المنزلة i وتتساوى عندئذٍ الإحداثيات $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ للإجراء المركب مع الإحداثيات $\begin{pmatrix} \ell(a_i, \theta_1) \\ \ell(a_i, \theta_2) \end{pmatrix}$ للإجراء البسيط a_i

مثلاً:

- أعط النقطة التي تمثل الإجراء المركب $P = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$:

P يتمثل بالنقطة $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 + 1/3 + 0 + 2/4 + 4/4 \\ 1/6 + 2/3 + 0 + 4/4 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11/6 \end{pmatrix}$

- أعط نقطة لا تمثل أي إجراء مركب:

النقطة $(4, 1)$ تقع خارج الشكل فهي لا تمثل أي إجراء مركب.

وأخيراً نعرف **حل أقل الكبريات المركب** بأنه الحل P^* الذي يحقق:

$$\forall P \Rightarrow Max_\theta\ L(P^*,\theta) \le Max_\theta\ L(P,\theta)$$

أو

$$Max_\theta\ L(P^*,\theta) = Min_P Max_\theta\ L(P,\theta)$$

لاحظ بأنه يشبه تعريف **حل أقل الكبريات البسيط** بأنه الحل a^* الذي يحقق:

$$\forall a \Rightarrow Max_\theta\ \ell(a^*,\theta) \le Max_\theta\ \ell(a,\theta)$$

أو

$$Max_\theta\ \ell(a^*,\theta) = Min_a\ Max_\theta\ \ell(a,\theta)$$

توضح المتراجحة السابقة ما يلي:

- العلاقة بين الحل P^* وأي إجراء بسيط a هي:

$$\forall a \Rightarrow Max_\theta\ L(P^*,\theta) \le Max_\theta\ \ell(a,\theta)$$

- أفضلية الحل المركب P^* على الحل البسيط أقل الكبريات a^* هي:

$$Max_\theta\ L(P^*,\theta) \le Max_\theta\ \ell(a^*,\theta)$$

البحث عن P^* هندسياً: نرسم قفصاً قطره منصف الربع الأول ونحركه إلى الأعلى حتى يصدم المجموعة المحدبة التي تمثل الإجراءات المركبة.

الإجراء الضعيف: يكون الإجراء a_2 ضعيفاً أمام الإجراء a_1 إذا كان:

$$\forall\theta \quad \ell(a_1,\theta) \le \ell(a_2,\theta)$$

ويجب قبل البحث عن اي حلول بسيطة أو مركبة في مسألة اتخاذ قرار البدء بحذف كل الإجراءات الضعيفة ولن يغير ذلك من النتائج شيئاً بل على العكس سيخفف من الحسابات. ويمكنك التحقق من ذلك في كل الأمثلة التي مرت معك سابقاً.

======================= مثال (6) =======================

لديك دالة الخسارة التالية

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	1	4	2	2	5
θ_2	4	5	3	6	2

- أحذف الإجراءات الضعيفة وثم أحسب الإجراء البسيط أقل الكبريات a^*
- مثل مجموعة الإجراءات المركبة ثم أحسب الإجراء المركب أقل الكبريات P^* .
- مثل الإجراء البسيط a_1 كإجراء مركب.
- بين أفضلية P^* على a^* .
- أعط إجراءً مركباً وعين النقطة التي تمثله.
- أعط نقطة في الشكل وعين الإجراء المركب التي تمثله.
- أعط نقطة في الشكل وعين الإجراء المركب التي تمثله.
- أعط نقطة ليس لها إجراء المركب تمثله.
- اقترح حلاً مركباً آخر P وقارنه مع P^* .
- أدرس حلول بيز

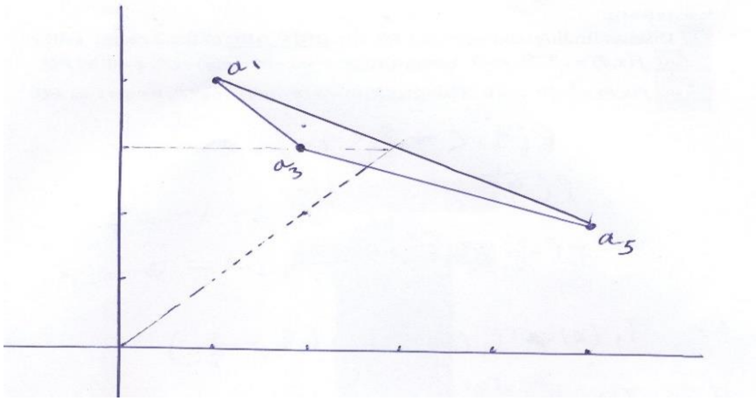
==

- نحذف a_2 , a_4 الضعيفة:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	1	4	2	2	5
θ_2	4	5	3	6	2
$Max_\theta\,\ell(a,\theta)$	4		3		5

الإجراء أقل الكبريات البسيط هو $a^* = a_3$ و $Max_\theta\,\ell(a^*,\theta) = 3$

- المجموعة التي تمثل كل الإجراءات المركبة هي:



والحل المركب أقل الكبريات P^* يقع بين النقطتين a_3 و a_5 أي أن $P^*=(0,p,(1-p))$

ومنه $$\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}=\sum p_i\begin{pmatrix}\ell(a_i,\theta_1)\\\ell(a_i,\theta_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p+5(1-p)\\3p+2(1-p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-3p\\2+p\end{pmatrix}$$

وبما أنه على المنصف الأول فإنه يحقق المعادلة :

$$L(P^*,\theta_1)=L(P^*,\theta_2)\Rightarrow 5-3p=2+p\Rightarrow p=0.75\ \Rightarrow\ P^*=(0,\ 0.75,\ 0.25)$$

وبالتالي فإن: $Max_\theta\ L(P^*,\theta)=L_1=L_2=5-3\times0.75=2.75$.

- يمثل الإجراء البسيط a_1 كإجراء مركب بالشكل التالي $P=(1,\ 0,0)$
- أفضلية P^* على a^* بحصول التخفيض التالي:

$$Max_\theta\ \ell(a^*,\theta)-Max_\theta\ L(P^*,\theta)=3-2.75=0.25$$

- لنأخذ الإجراء المركب $P=(1/6,\ 2/6,3/6)$ فالنقطة التي تمثله هي:

$$\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}=(1/6)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+(2/6)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+(3/6)\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/3\\8/3\end{pmatrix}$$

- نأخذ النقطة في الشكل $(2.0,\ 3.1)$ ونبحث عن الإجراء المركب الذي تمثله:

$$P=(p_1,p_2,(1-p_1-p_2))$$

$$\begin{pmatrix}2\\3.1\end{pmatrix}=\sum p_i\begin{pmatrix}\ell(a_i,\theta_1)\\\ell(a_i,\theta_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1+2p_2+5(1-p_1-p_2)\\4p_1+3p_2+2(1-p_1-p_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-4p_1-3p_2\\2+2p_1+p_2\end{pmatrix}$$

ومنه $p_1=0.15,\ p_2=0.8\ ,\ p_3=0.05 \Leftarrow 3.1=2+2p_1+p_2\ \&\ 2=5-4p_1-3p_2$

- النقطة $(2.0,\ 2.0)$ تقع خارج الشكل لذا لا تمثل أي إجراء مركب.
- نقترح نفس الإجراء المركب $P=(1/6,\ 2/6,3/6)$ الذي تمثله النقطة:

$$\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/3\\8/3\end{pmatrix}\Rightarrow Max\,L_i=10/3$$

ويكون P^* أفضل من P بالفرق: $10/3 - 2.75 = 7/12$

===================== **باب 1 واجب (1)** =====================

أعد نفس المثال (6) على البيانات التالية

لديك جدول الخسارة

	a_1	a_2	a_3	a_4
θ_1	3	5	6	4
θ_2	4	3	2	6

- أحذف الإجراءات الضعيفة وثم أحسب الإجراء البسيط أقل الكبريات a^*
- مثل مجموعة الإجراءات المركبة ثم أحسب الإجراء المركب أقل الكبريات P^* .
- مثل الإجراء البسيط a_1 كإجراء مركب.
- بين أفضلية P^* على a^* .
- أعط إجراءً مركباً وعين النقطة التي تمثله.
- أعط نقطة في الشكل وعين الإجراء المركب التي تمثله.
- أعط نقطة في الشكل وعين الإجراء المركب التي تمثله.
- أعط نقطة ليس لها إجراء المركب تمثله.
- اقترح حلاً مركباً آخر P وقارنه مع P^* .
- أدرس كل حلول بيز الممكنة.

===================

إيجاد الحل المركب $MinMax$ هندسياً عند وجود أكثر من ظرفين طبيعيين:

يمكننا ذلك إذا كان عدد الإجراءات البسيطة إثنين فقط. ويصبح شكل الإجراء المركب هو $P = (p, 1-p)$ وتكون لمركباته عند كل θ الشكل الخطي:

$$L(P,\theta) = p\ell(a_1,\theta) + (1-p)\ell(a_2,\theta) = p[\ell(a_1,\theta) - \ell(a_2,\theta)] + \ell(a_2,\theta)$$

والتي تمثل مستقيمات في المستوي (p, L) . ويمكن استخدام الطريقة الهندسية لإيجاد الحل $MinMax$ المركب P^* التالي:

$$\forall P \Rightarrow Max_{\theta}\, L(P^*,\theta) \le Max_{\theta}\, L(P,\theta)$$

برسم المستقيمات $L(P,\theta)$ في المستوي (p,L) وثم نبحث في القيم العليا فيها عن أدنى نقطة وهي ستكون الممثلة للحل P^* .

مثال (7)

لديك جدول الخسارة التالي						
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$Max_{\theta}\, \ell(a,\theta)$
a_1	1	4	2	2	5	5
a_2	4	5	3	6	2	6
a_3	2	6	4	3	5	6

أولا: أوجد حلول أقل الكبريات البسيط والمركب وبين أفضلية الثاني على الأول.

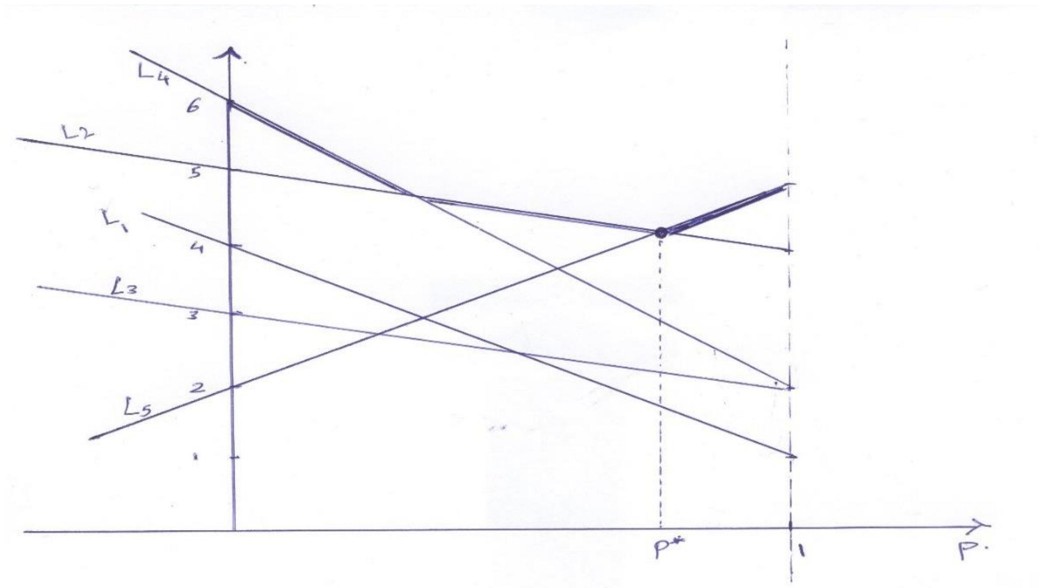
ثانياً: اقترح حلاً مركباً وقارنه مع حل أقل الكبريات المركب.

أولاً: نحذف أولاً الإجراء الضعيف a_3 ، والإجراء أقل الكبريات البسيط هو $a^* = a_1$

حيث $Max_{\theta}\, \ell(a^*,\theta) = 5$. ويوجد لكل إجراء مركب P خمسة مركبات خطية هي:

$$L_1 = L(P,\theta_1) = p + 4(1-p) = 4 - 3p$$
$$L_2 = L(P,\theta_2) = 4p + 5(1-p) = 5 - p$$
$$L_3 = L(P,\theta_3) = 2p + 3(1-p) = 3 - p$$
$$L_4 = L(P,\theta_4) = 2p + 6(1-p) = 6 - 4p$$
$$L_5 = L(P,\theta_5) = 5p + 2(1-p) = 2 + 3p$$

نرسم هذه المستقيمات:



نبحث في المستقيمات L_2, L_4, L_5 التي تقع في الأعلى عن أدنى نقطة فيها. واضح من الشكل أن هذه النقطة هي تقاطع L_2, L_5 ونحسبها بحل المعادلة:

$$L_2 = L_5 \Rightarrow 5 - p^* = 2 + 3p^* \Rightarrow p^* = 3/4$$

ويكون الإجراء المركب أقل الكبريات $= P^* = (3/4\ ,\ 1/4)$

وتكون أفضلية P^* على a^* بالتخفيض التالي:

$$Max_\theta\, L(P^*,\theta) = 4.25 < Max_\theta\, \ell(a^*,\theta) = 5$$

ثانياً: نقترح الإجراء المركب $P = (1/4\ ,\ 3/4)$.

واضح أنه يجب أن تتحقق المتراجحة:

$$\forall P \Rightarrow Max_\theta\, L(P^*,\theta) \le Max_\theta\, L(P,\theta)$$
.

$$Max_\theta\, L(P^*,\theta) = Max_\theta \begin{pmatrix} L_1 = 4 - 3p = 1.75 \\ L_2 = 5 - p = 4.25 \\ L_3 = 3 - p = 2.75 \\ L_4 = 6 - 4p = 3 \\ L_5 = 2 + 3p = 4.25 \end{pmatrix} = 4.25$$

$$Max_\theta\, L(P,\theta) = Max_\theta \begin{pmatrix} L_1 = 4 - 3p = 3.25 \\ L_2 = 5 - p = 4.75 \\ L_3 = 3 - p = 2.75 \\ L_4 = 6 - 4p = 5 \\ L_5 = 2 + 3p = 2.75 \end{pmatrix} = 5$$

===================== باب 1 واجب (2) =====================

أعد المثال (7) على البيانات التالية

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	5	3	2	0
a_2	6	3	3	1
a_3	1	0	6	3

أولا: أوجد حلول أقل الكبريات البسيط والمركب وبين أفضلية الثاني على الأول.

ثانياً: اقترح حلاً مركباً وقارنه مع حل أقل الكبريات المركب.

==

===================== باب 1 واجب (3) =====================

ترد بضاعة الى مخزن في علب تحوي العلبة خمس قطع ولنفرض أن العلبة تحوي θ من القطع المعيبة. ويقوم المخزن إما بقبول العلبة a_1 أو رفضها a_2 بدالة الخسارة $\ell(a,\theta)$ التالية:

θ	$\theta_0=0$	$\theta_1=1$	$\theta_2=2$	$\theta_3=3$	$\theta_4=4$	$\theta_5=5$
a_1	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
a_2	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
$\ell(a,\theta)$						

أولاً: أوجد حلول أقل الكبريات البسيط والمركب وبين أفضلية الثاني على الأول.

ثانياً: اقترح حلاً مركباً وقارنه مع حل أقل الكبريات المركب.

ثالثاً: أوجد حل بيز عند التوزيع المبدئي

θ	0	1	2	3	4	5
$g(\theta)$	0.55	0.2	0.1	0.07	0.06	0.02

==

إجراء بيز المركب:

عرفنا حل بيز البسيط بأنه a^* الذي يحقق:

$$\forall a: B(a^*) \le B(a) = \sum_{\theta} g(\theta)\ell(a,\theta).$$

ونعرف إجراء بيز المركب بأنه P^* الذي يحقق:

$$\forall P: B(P^*) \le B(P) = B(P) = \sum_{\theta} g(\theta) L(P,\theta)$$.

برهن أن حل بيز المركب ليس أفضل من حل بيز البسيط:

$$\forall P: \quad B(P) = \sum_{\theta} g(\theta) L(P,\theta) = \sum_{\theta} [\sum_{a_i} p_i \ell(a_i,\theta)] g(\theta)$$

$$= \sum_{a_i} p_i \sum_{\theta} g(\theta) \ell(a_i,\theta) = \sum_{a_i} p_i \, B(a_i) \ge \sum_{i} p_i \, B(a^*) = B(a^*)$$

$$\Rightarrow B(P^*) \ge B(a^*)$$