

اجب عن الأسئلة الآتية

س(1): (أ) بدون استخدام الجداول أثبت أن $r \wedge [(p \wedge q) \rightarrow p] \equiv r$. (درجتان)

(ii) استخدم (i) لإثبات ما يلي: $(u \vee \neg v) \wedge \{[w \wedge (x \leftrightarrow y)] \rightarrow w\} \equiv u \vee \neg v$. (درجة واحدة)

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن: $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = \frac{3^{n+1} - 1}{3^n}$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$. (4 درجات)

س(2): (أ) لتكن R العلاقة المعرفة على المجموعة $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ كما يلي: $3 | mn \Leftrightarrow mRn$.

بين فيما إذا كانت R انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية. (4 درجات)

(ب) لتكن S العلاقة المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كما يلي: $xSy \Leftrightarrow$ يوجد عدد صحيح k بحيث $x = 3^k y$.

(i) أثبت أن S علاقة تكافؤ. (3 درجات)

(ii) جد $[1]$. (درجة واحدة)

(iii) بين فيما إذا كان $54 \in [2]$. (درجة واحدة)

س(3): لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو المقابل:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy		1	1	1
xy'			1	1
$x'y'$				
$x'y$		1		

(أ) اكتب f على شكل CSP . (درجة واحدة)

(ب) اكتب f على شكل MSP . (درجتان)

(ج) اكتب f على شكل MPS . (درجتان)

(د) صمم شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها الدالة f . (درجة واحدة)

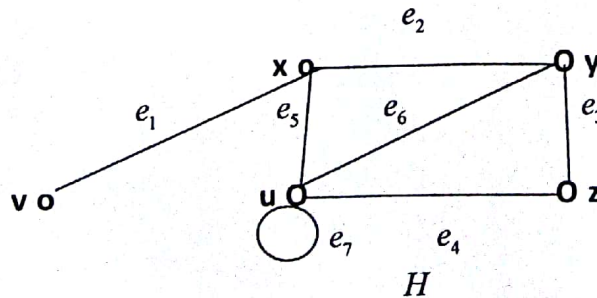
(هـ) صمم شبكة مخرجها الدالة f مستخدماً بوابات نفي العطف فقط. (درجة واحدة)

(و) صمم شبكة مخرجها الدالة f مستخدماً بوابات نفي الفصل فقط. (درجة واحدة)

س(4): (أ) ليكن $G = (V, E)$ رسماً بحيث $V = \{a, b, c, d, f\}$ و $|E| = 4$.

إذا كان $\deg(a) = \deg(b) = \deg(c) = \deg(d) = 1$ فجد $\deg(f)$. (درجتان)

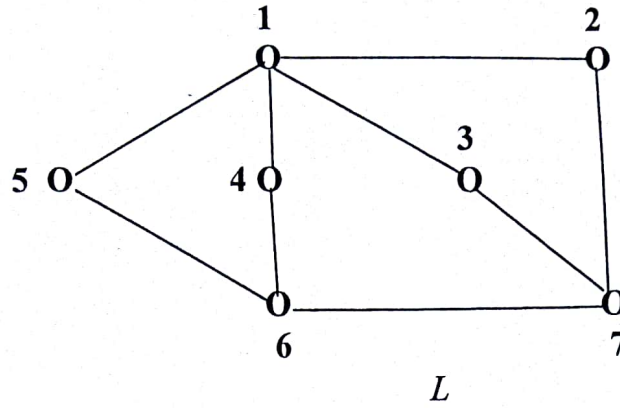
(ب) في الرسم H المقابل :



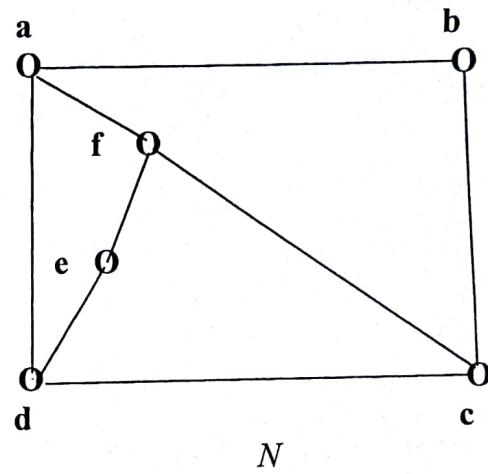
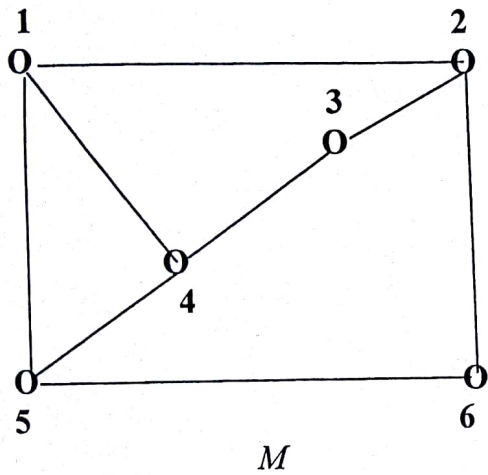
(i) أوجد كل الممرات من x إلى z . (درجتان)

(ii) أوجد طريقاً من x إلى z ليس ممراً . (درجة واحدة)

(ج) بين فيما إذا كان الرسم L الموضح أدناه ثنائي التجزئة أم لا. (درجة واحدة)



(د) بين فيما إذا كان الرسمان التاليان M و N متماثلين أم لا. (درجتان)



س (5) :

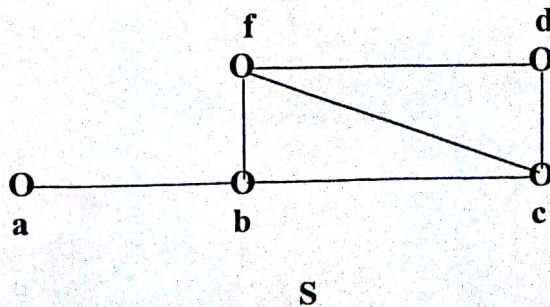
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ا) ليكن M رسماً بسيطاً ممثلاً بمصفوفة التجاور المقابلة:

(i) ارسم $\bar{R}$ (الرسم المتمم للرسم R). (درجتان)
(ii) بين فيما إذا كان الرسم R ذاتي التتبع أم لا. (درجتان)

(ب) للرسم S الموضح أدناه:

(i) جد شجرة تقص عرضي جذرها a . (درجتان)
(ii) جد شجرة تقص عمقي (طولي) جذرها a . (درجتان)



المبحث الثاني
الفصل الثاني ١٤٣٩/٣٨ هـ

السؤال الأول (7 درجات)

$$\Gamma \wedge [(p \wedge q) \rightarrow p] \equiv \quad (f) (n)$$

①

$$\Gamma \wedge [\neg(p \wedge q) \vee p] \equiv \Gamma \wedge [\neg p \vee \neg q \vee p]$$

①

$$= \Gamma \wedge [(\neg p \vee p) \vee \neg q]$$

$$= \Gamma \wedge (T \vee \neg q) \equiv \Gamma \wedge T = \Gamma$$

(ن) نستخدم مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي:

$$\Gamma : (u \vee \neg v)$$

$$p : w$$

$$q : (x \leftrightarrow y)$$

① باستخدام (ن)، نجد أن

$$(u \vee \neg v) \wedge \{ [w \wedge (x \leftrightarrow y)] \rightarrow w \} \equiv u$$

(ب) نضع $P(n) : 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = \frac{3^{n+1} - 1}{3^n}$

خطوة الأساس: $n=0$

① $2 = \frac{2}{3^0} \stackrel{?}{=} \frac{3^{0+1} - 1}{3^0} = 2$ و بالتالي $P(0)$ حاسب

خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 1$. نفترض أن $P(k)$ حاسب

(يعني لدينا $2 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{3^k} = \frac{3^{k+1} - 1}{3^k}$)

فلنثبت $P(k+1) : 2 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{3^{k+1}} \stackrel{?}{=} \frac{3^{k+2} - 1}{3^{k+1}}$

$$2 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{3^{k+1} - 1}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}}$$

$$= \frac{3(3^{k+1} - 1) + 2}{3^{k+1}} = \frac{3^{k+2} - 3 + 2}{3^{k+1}} = \frac{3^{k+2} - 1}{3^{k+1}}$$

②

(أ) ليست انعكاسية لأن عندما نأخذ $n=2$ نعلم أن $3/4$ و $3/2$ و $2/3$

① R تناظرية لأن عملية الضرب ابدالي إذا كان $3|mn$ فإن $3|nm$

① R ليست تبادلية بمات R تناظرية $(3R2 \text{ و } 2R3 \text{ لأن } 2 \neq 3)$

① R ليست متعدية لأن $2R3$ و $3R4$ لكن $2R4$ $3|6$ $3|12$

① (ب) S انعكاسية لأن $x = 3^k x$ و بالتالي $x S x$

① S تناظرية لأن عندما نأخذ $x, y \in \mathbb{Z}$ ونفترض

أن $x S y$ فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $x = 3^k y$

① و بالتالي $y = 3^{-k} x$ حيث $l = -k \in \mathbb{Z}$ $y = 3^l x$ $y S x$ $x = y$

① S متعدية لأن عندما نأخذ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ونفترض أن

$x S y$ فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $x = 3^k y$

و $y S z$ $y = 3^l z$

① بتعويض y في المعادلة (1) نجد أن:

$$x = 3^k (3^l z)$$

$$x = 3^{k+l} z = 3^M z \quad M \in \mathbb{Z}$$

و بالتالي $x S z$

بما أن S انعكاسية ، تناظرية و متعدية فهي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$

$$[1] = \{ x \in \mathbb{Z} / x S 1 \} = \{ x \in \mathbb{Z} , x = 3^k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \}$$

$$[1] = \{ 1, 3, 9, 27, \dots \}$$

①

السؤال الثالث (8 درجات)

①

$$csp(f) = xyzw' + xyz'w' + xy'z'w' + x'y'zw' + x'y'z'w + x'yzw'$$

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	0	1	1	1
xy'	0	0	1	1
$x'y'$	0	0	0	0
$x'y$	0	1	0	0

②

$$MSP(f) = xz' + yzw'$$

(ب)

$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

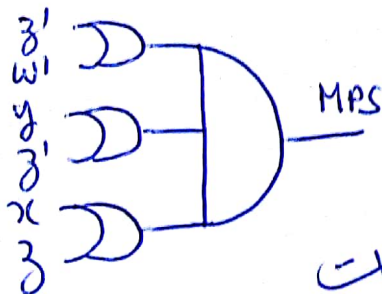
(ج)

$$MSP(f') = zw + y'z + x'z'$$

③

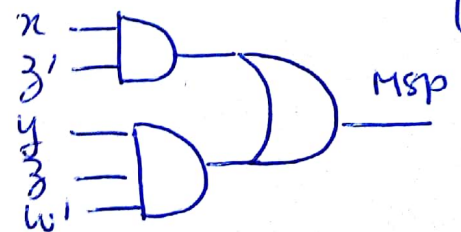
$$MPS(f) = (z' + w')(y + z')(x + z)$$

①



4 بوابات

(د)



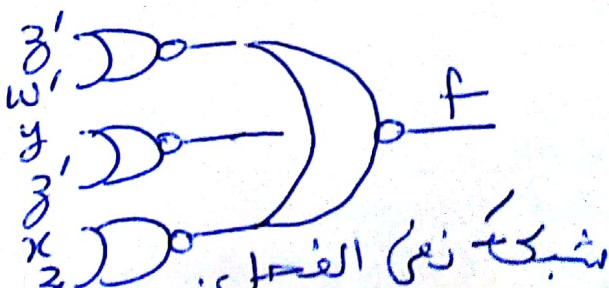
3 بوابات وباتاني شبكة عطف وفصل أصغر

$$MPS(f) = \left[\left[(z' + w')(y + z')(x + z) \right]' \right]'$$

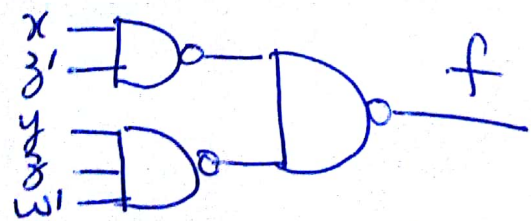
$$= \left[(z' + w')' + (y + z')' + (x + z)' \right]'$$

$$MSP(f) = \left[(xz' + yzw')' \right]'$$

$$= \left[(xz')' \cdot (yzw')' \right]'$$



شبكة زعي الفصل



شبكة زعي عطف

السؤال الرابع (8 درجات)

(0.5)

$$\sum_{x \in V(G)} \deg x = 2|E| \quad \text{نعلم أن}$$

(0.5)

$$\deg a + \deg b + \deg c + \deg d + \deg f = 2 \times 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + \deg f = 8$$

(1)

$$\deg f = 4 \quad \text{و بالتالي}$$

(ب) (ج)

مسراً

(0.5)

(0.5)

(0.5)

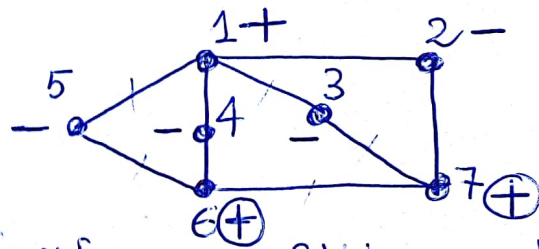
(0.5)

4 مسارات مختلفة
من x إلى z

$$\left\{ \begin{array}{l} x \quad e_2 \quad e_3 \quad z \\ x \quad e_2 \quad e_6 \quad e_4 \quad z \\ x \quad e_5 \quad e_4 \quad z \\ x \quad e_5 \quad e_6 \quad e_3 \quad z \end{array} \right.$$

(1)

طريقاً $x \quad e_5 \quad e_7 \quad e_4 \quad z$ وليس مسراً.

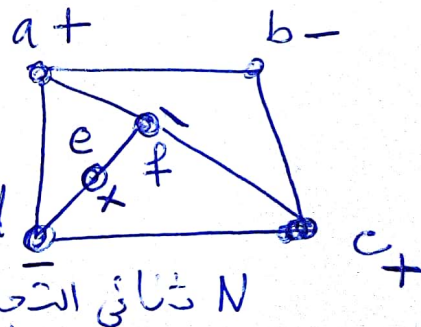
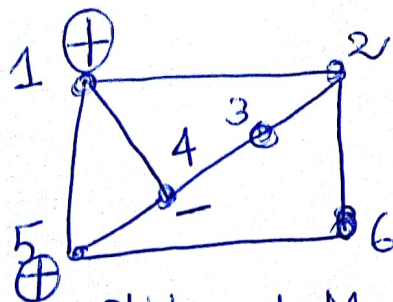


(ج)

L ليس شاتلي الجزئية لأنه يحتوي على دورة فردية

1 3 7 6 5 1

(1)



(د)

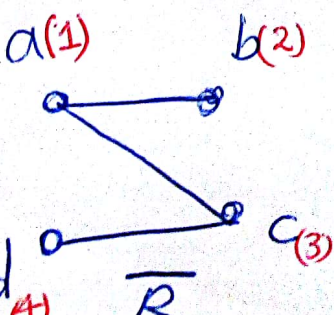
N شاتلي الجزئية

M ليس شاتلي الجزئية

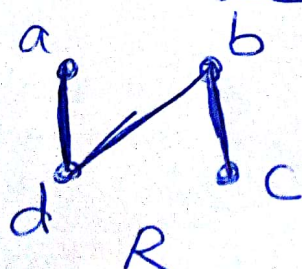
و بالتالي $M \neq N$ (ليس متماثلين) يحتوي على دورة فردية

(2)

السؤال الخامس (8 درجات)



(ج)



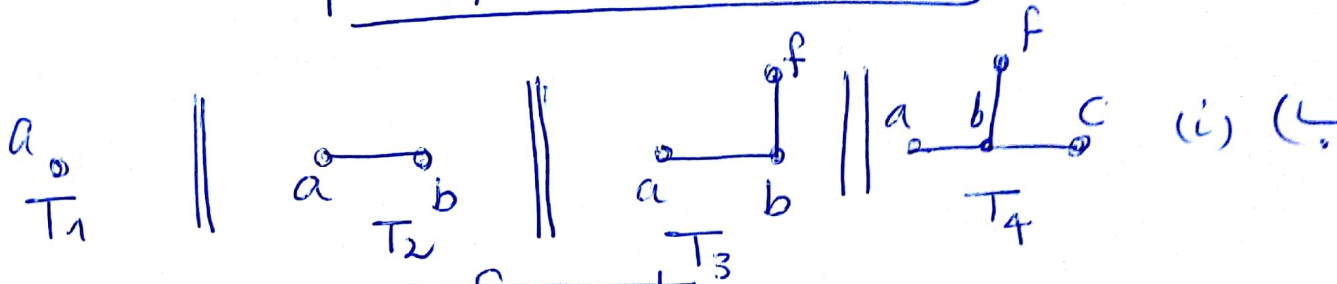
(أ)

(2)

یو ج-ت-ب-ق-ک-ا-ن-ی
f

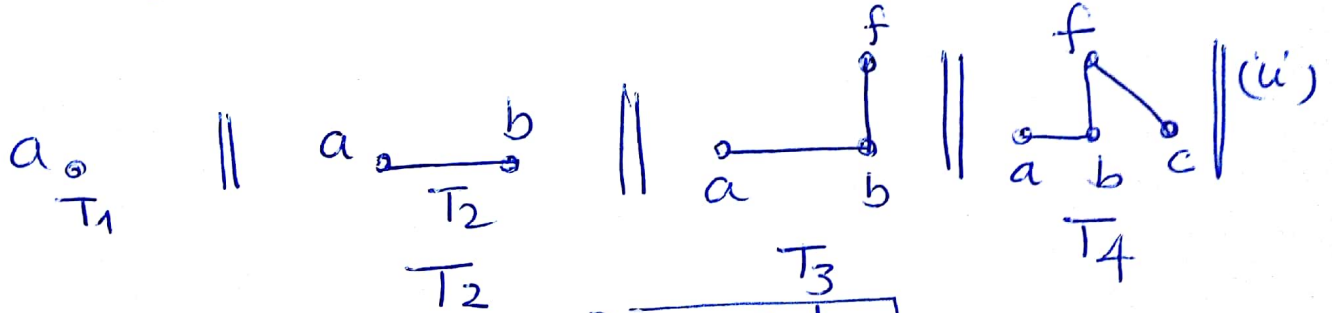
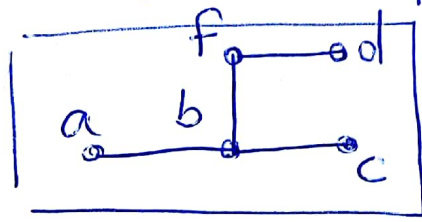
(u) $R \approx \bar{R}$ لأن R ذاتي التماثل

$x \in V(R)$	a	b	c	d
$f(x) \in V(\bar{R})$	b	c	d	a



(2)

شجره ناقصه
جزءها a



(2)

شجره ناقصه
جميع جزئها

