جامعة الملك سعود King Saud University — كلية العلوم – قسم الرياضيات	الإختبار النهائي للمقرر 151 ريض الفصل الأول 1439/1438هـ الزمن: 3ساعات

السؤال الأول:(8 درجات)

(أ) (i) بدون استخدام الجداول , اثبت ما يلي : $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$. (درجتان)

(ii) استخدم (i) لإثبات ما يلي : $u \to (v \wedge w \wedge x) \equiv (u \to v) \wedge (u \to w) \wedge (u \to x)$. (درجتان)

(ب) إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية معرّفة استقرائيا كالآتي : $\begin{cases} a_0 = 2, \quad a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

أثبت أن : $a_n = 2^n + 3^n$ لكل $n \geq 0$ (عدد صحيح). (4 درجات)

السؤال الثاني:(9 درجات)

(أ) لتكن R العلاقة المعرفة على الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كما يلي : $x \; R \; y \Leftrightarrow 4 \mid (x^2 - y^2)$.

(i) اثبت أن R علاقة تكافؤ. (3 درجات)

(ii) اثبت أن $[1] = [n]$ لكل عدد فردي n . (درجتان)

(ب) إذا كانت $S = \{(a,a);(a,b);(b,c);(c,b)\}$ علاقة على المجموعة $A = \{a,b,c\}$, فجد كلا من الإغلاق الإنعكاسي, الإغلاق التناظري و الإغلاق المتعدي. (4 درجات)

السؤال الثالث:(8 درجات)

(أ) لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1		
xy'	1	1	1	1
$x'y'$		1		
$x'y$		1		

(i) اكتب f على شكل CSP . (درجة)

(ii) اكتب f على شكل MSP . (درجتان)

(iii) اكتب f على شكل MPS . (درجتان)

(iv) صمّم شبكة **عطف و فصل أصغرية** مخرجها $f(x,y,z,w)$. (درجة)

(v) صمّم شبكة مخرجها $f(x,y,z,w)$ باستخدام **بوابات نفي العطف** فقط. (درجة)

(vi) صمّم شبكة مخرجها $f(x,y,z,w)$ باستخدام **بوابات نفي الفصل** فقط. (درجة)

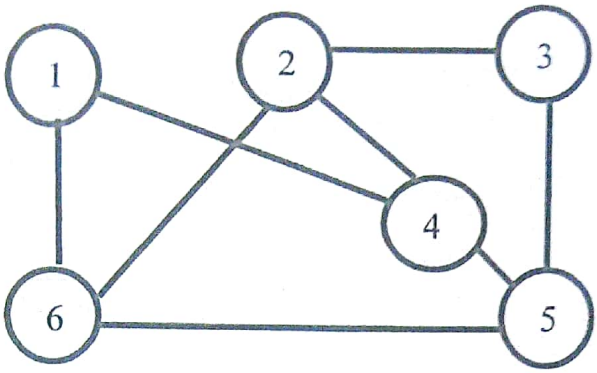
السؤال الرابع:(6 درجات)

(أ) ليكن $G = (V,E)$ رسما بحيث $V = \{a,b,c\}$ و $\deg(b) = 2\deg(a)$ و $\deg(c) = 3\deg(a)$.

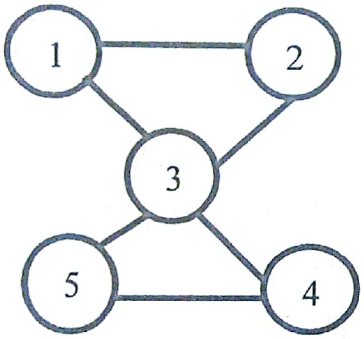
فجد $\deg(a)$ إذا علمت أن $|E| = 9$. (درجتان)

Scanned by CamScanner

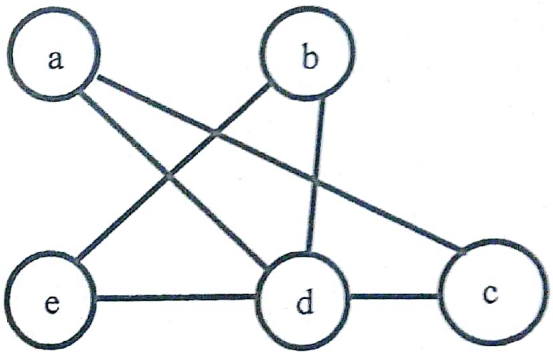
(ب) بيّن فيما إذا كان الرسم ادناه ثنائي التجزئة أم لا و إذا كان ثنائي التجزئة, فجد تمثيلا ثنائي التجزئة له. (درجتان)



(ج) بيّن فيما كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا و علّل إجابتك. (درجتان)



G



H

السؤال الخامس:(9 درجات)

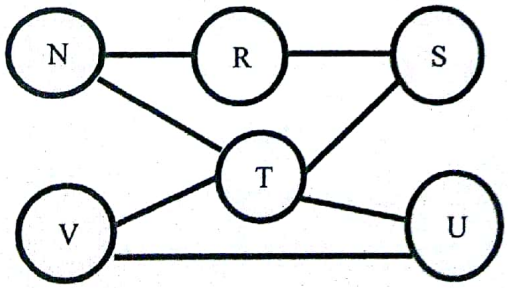
(أ) ليكن L الرسم الممثّل بمصفوفة الوقوع المقابلة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) أوجد عدد أضلاع المتمم $\overline{L}$ لـ L . (درجتان)

(ii) بيّن فيما إذا كان L ذاتي التتميم . (درجة)

(ب) للرسم المقابل:



(i) أوجد شجرة تقصي عرضي جذرها R . (درجتان)

(ii) أوجد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها R . (درجتان)

(ج) بيّن صحة أو خطأ كل من التقريرين التاليين, **مع التعليل:**

(i) كل رسم بسيط $G=(V,E)$ بحيث $|E|=|V|-1$ شجرة. (درجة)

(ii) لا يوجد جسور في أي رسم تام K_n ($n \geq 1$). (درجة)

Scanned by CamScanner

د/ برهان

تصحيح الاختبار النهائي 101 رياض
للفصل الأول 1439/38 هـ

السؤال الأول (8 درجات)

(أ) (i)

$$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad \text{(1) قاعدة الشرط}$$
$$\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \quad \text{(0,5) قاعدة التوزيع}$$
$$\equiv p \to (q \wedge r) \quad \text{(0,5) قاعدة الشرط}$$

(ii)

$$u \to (v \wedge w \wedge x) \equiv u \to ((v \wedge w) \wedge x) \quad \text{(0,5) قاعدة التجميع}$$
$$\overset{(i)}{\equiv} (u \to (v \wedge w)) \wedge (u \to x) \quad \text{(0,5)}$$
$$\overset{(i)}{\equiv} ((u \to v) \wedge (u \to w)) \wedge (u \to x) \quad \text{(0,5)}$$
$$\equiv (u \to v) \wedge (u \to w) \wedge (u \to x) \quad \text{(0,5)}$$

(ب) نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نرمز بـ $P(n)$: $a_n = 2^n + 3^n$

- خطوة الأساس:

$n = 0$

$a_0 \overset{?}{=} 2^0 + 3^0 = 1 + 1$

$2 = 2$ صح وبالتالي $P(0)$ صائب

$n = 1$

$a_1 \overset{?}{=} 2^1 + 3^1 = 5$ (0,5)

$5 = 5$ صح وبالتالي $P(1)$ صائب (0,5)

- خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 2$. نفترض أن $P(2), P(3), \dots, P(k)$ جميعها صائبة ولنثبت صحة التأثير $P(k+1)$:

$$a_{k+1} \overset{?}{=} 2^{k+1} + 3^{k+1}$$

نعلم أن $a_{k+1} = 5a_k - 6a_{k-1}$ (0,5)

كون $P(k)$ صائب يعني لدينا $a_k = 2^k + 3^k$

أيضا $P(k-1)$ صائب يعني لدينا $a_{k-1} = 2^{k-1} + 3^{k-1}$ (0,5)

وبالتالي:

$$a_{k+1} = 5(2^k + 3^k) - 6(2^{k-1} + 3^{k-1})$$
$$= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^{k-1} - 6 \cdot 3^{k-1}$$
$$= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k \quad (2)$$
$$= (5-3) \cdot 2^k + (5-2) \cdot 3^k$$
$$= 2^{k+1} + 3^{k+1}$$

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني (9 درجات)

(أ) (i) R انعكاسية على $\mathbb{Z}$ لأنه عندما نأخذ $x \in \mathbb{Z}$. نعلم (1)
أن $4 \mid 0$ $(0 = 4 \times 0)$ وبالتالي $4 \mid (x^2 - x^2)$ يعني xRx.

R تناظرية على $\mathbb{Z}$ لأنه عندما نأخذ $x, y \in \mathbb{Z}$ ونفترض
أن xRy فإن $4 \mid (x^2 - y^2)$ وبالتالي $4 \mid (y^2 - x^2)$ (1) طبيعية
أن yRx.

R متعدية على $\mathbb{Z}$ لأنه عندما نأخذ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ونفترض
أن xRy و yRz فإن لدينا $4 \mid (x^2 - y^2) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4k$ (1)
حيث $k \in \mathbb{Z}$
كذلك $4 \mid (y^2 - z^2) \Leftrightarrow y^2 - z^2 = 4k'$ (2) حيث $k' \in \mathbb{Z}$.

(1) من خلال (1) و (2)
$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = 4k + 4k'$
يعني $x^2 - z^2 = 4(k + k') = 4L$ إذا $4 \mid (x^2 - z^2)$
يعني xRz.

- بما أن R انعكاسية، تناظرية ومتعدية فإن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

(ب) $[1] = \{ n \in \mathbb{Z} / \; n R 1 \}$ (0,5)

$[1] = \{ n \in \mathbb{Z} / \; 4 \mid n^2 - 1 \}$

$[1] = \{ n \in \mathbb{Z} / \; n^2 = 4k + 1 \}$ حيث $k \in \mathbb{Z}_+$ (0,5)

• نعلم أن $n^2 \equiv 1 \bmod 4 \Leftrightarrow n$ فردي (1)
(إذا كان n فرديا فإن $n = 2L + 1$ حيث $L \in \mathbb{Z}$. عندئذ $n^2 = (2L+1)^2$
$= 4L^2 + 4L + 1$
$= 4(L^2 + L) + 1 = 4K + 1$
والعكس صحيح " إذا كان n زوجيا فإن n^2 هو زوجي ").

وبالتالي $[1] = [n]$ لكل n عدد فردي.

(ب) الأصناف الانعكاسية:
(1) $S(S) = SUS^{-1} = \{ (a,a); (a,b); (b,c); (c,b); (b,b); (c,c) \}$

Scanned by CamScanner

• الانغلاق التناظري:

$\delta(S) = S \cup S^{-1}$

(1) $\delta(S) = \{(a,a); (a,b); (b,c); (c,b); (b,a)\}$

• الانغلاق المتعدي:

(0,5) $\tau(S) = S \cup S^2 \cup S^3$

$S = \{(a,a); (a,b); (b,c); (c,b)\}$

(0,5) $S^2 = \{(a,a); (a,b); (a,c); (b,b); (c,c)\}$

$S^3 = \{(a,a); (a,b); (a,c); (b,c); (c,b)\}$

(1) $\tau(S) = \{(a,a); (a,b); (b,c); (c,b); (a,c); (b,b); (c,c)\}$

السؤال الثالث: (8 درجات)

(i) (1)

(1) $CSp(f) = xyzw + xyzw' + xyz'w + xyz'w' + xy'z'w' + xy'z'w + x'y'zw' + x'y'zw'.$

(ii)

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	0	0
xy'	1	1	1	1
$x'y'$	0	1	0	0
$x'y$	0	1	0	0

(2) $\boxed{MSp(f) = xy' + zw' + xz}$

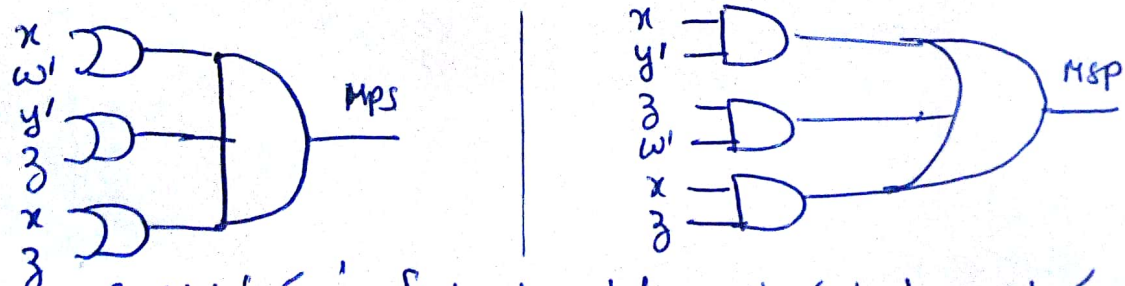
(iii)

(0,5) $MPS(f) = (MSp(f'))'$

(0,5) $MSp(f') = x'w + yz' + x'z'$

$\boxed{MPS(f) = (x+w') \cdot (y'+z) \cdot (x+z)}$ و بالتالي

(iv)



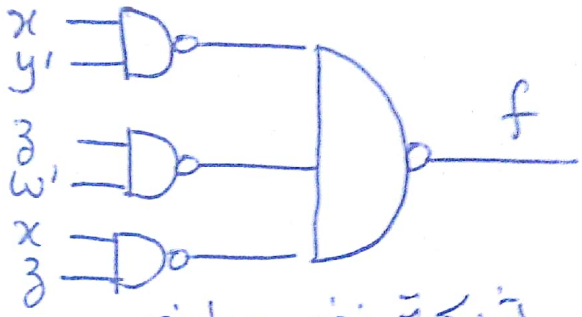
كلاهما شبكة عطف وفصل أحادية لأنها تحتوي على نفس

Scanned by CamScanner

(v) $MSp(f) = \left[(xy' + zw' + xz)'\right]'$

(0,5) $= \left[(xy')' \cdot (zw')' \cdot (xz)'\right]'$

(0,5)

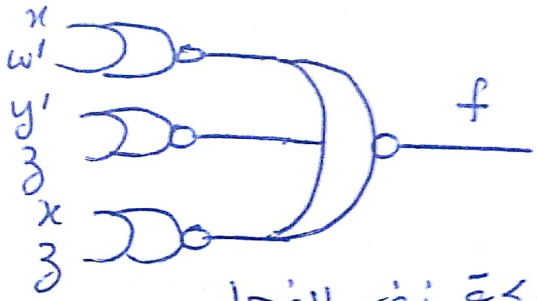


شبكة نفي عطف

(vi) $MPS(f) = \left[\left((x+w') \cdot (y'+z) \cdot (x+z)\right)'\right]'$

(0,5) $= \left[(x+w')' + (y'+z)' + (x+z)'\right]'$

(0,5)



شبكة نفي الفصل

السؤال الرابع (6 درجات)

(أ) نعلم أن

(0,5) $\sum_{x_i \in V(G)} deg(x_i) = 2|E|$

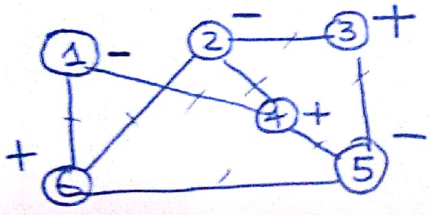
$deg(a) + deg(b) + deg(c) = 2|E|$

$deg(a) + 2deg(a) + 3deg(a) = 2 \times 9$

(1,5) $6\,deg(a) = 18$

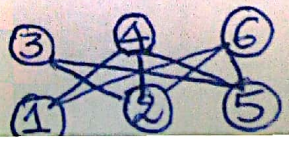
و بالتالي $deg(a) = 3$

(ب)



(1) الرسم هو ثنائي التجزئة لأنه لا يحتوي على دورات فردية.

(1) و هو متماثل للرسم التالي :



Scanned by CamScanner

ج) نعم الرسمان G و H متماثلين $G \simeq H$ (0,5)

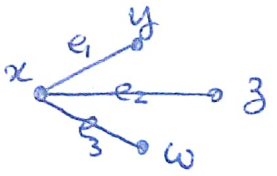
لأنه يوجد تطبيق تماثلي f :

(1,5)

$x \in V(H)$	a	b	c	d	e
$f(x) \in V(G)$	2	5	1	3	4

السؤال الخامس (9 درجات)

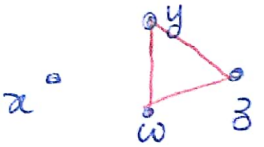
أ) (i) الرسم L هو



(2) بما أن $L \cup \overline{L} = K_4$ و $\overline{L}$ هو متمم L فإن عدد أضلاع متمم

$|E(L)| + |E(\overline{L})| = |E(K_4)| = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

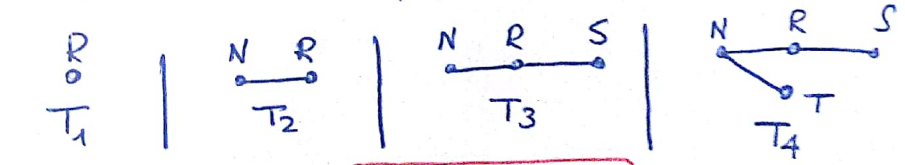
(ii) رسم $\overline{L}$ هو :

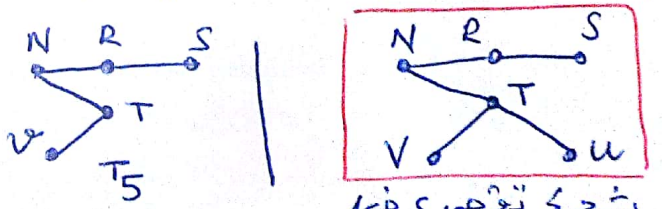


(1) $\overline{L}$ ليس شجرة (لأن $\overline{L}$ ليس شجرة) $\overline{L} \not\simeq L$ (L شجرة)

و بالتالي L ليس ذاتي التتميم .

ب) (i)

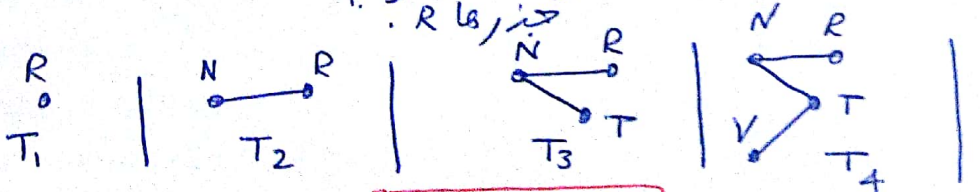


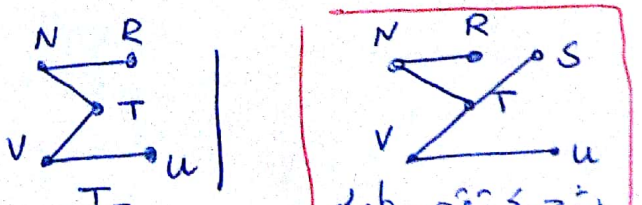


(2)

شجرة تفصى كرفيجا جذرها R .

(ii)





(2)

شجرة تفصى طويلا جذرها R .

ج) (i) لا, خذ الرسم البسيط التالي

(1) G ليس شجرة $|E| = |V| - 1$

(ii) لا, خذ K_2

(1) جسر

Scanned by CamScanner