الإختبار النهائي للمقرر 151 ريض الفصل الثاني 1438/1437هـ الزمن: 3ساعات	كلية العلوم – قسم الرياضيات جامعة الملك سعود King Saud University

السؤال الأول:(10 درجات)

(أ) اثبت أن: $3+3.4+3.4^2+\ldots+3.4^{n-1}=4^n-1$ لكل عدد صحيح $n\geq 1$. (3 درجات)

(ب) لتكن R العلاقة المعرفة على $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ كما يلي : $m\ R\ n \Leftrightarrow (m+n)$ عدد فردي.
بيّن فيما إذا كانت R انعكاسية, تناظرية, تخالفية, متعدية. (4 درجات)

(ج) لتكن $P=\{(a,a);(a,d);(b,b);(c,c);(c,d);(d,d);(e,a);(e,d);(e,e)\}$ علاقة ترتيب جزئي على المجموعة $E=\{a,b,c,d,e\}$.

(i) مثّل العلاقة P بشكل هاس. (درجتان)

(ii) هل P علاقة ترتيب كلي ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

السؤال الثاني:(8 درجات)

(أ) لتكن S العلاقة المعرفة على $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ كما يلي : $x\ S\ y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ عدد صحيح .

(i) اثبت أن S علاقة تكافؤ. (3 درجات)

(ii) هل $25\in[49]$ ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

(ب) لتكن $T=\{(1,1);(1,3);(2,1);(3,2)\}$ علاقة على $A=\{1,2,3\}$. أوجد الإغلاق الانعكاسي , الإغلاق التناظري و الإغلاق المتعدي. (4 درجات)

السؤال الثالث:(15 درجة)

(أ) ليكن B جبرا بوليا, و ليكن $a,b,c\in B$ بحيث $c=a+b'+a'b$. أثبت أنّ $ac=a$ و كذلك $bc=b$.
(درجتان)

(ب) أكتب الدالة البولية $f(x,y,z)=xy+x'y'+xy'z$ على شكل CSP ثم اكتبها على شكل CPS.
(4 درجات)

(ج) لتكن $g(x,y,z)=xy+x'y'+x'z+yz$

(i) أوجد شكل كارنو للدالة g . (درجتان)

(ii) أكتب g على شكل MSP . (درجتان)

(iii) أكتب g على شكل MPS . (درجتان)

(iv) صمم شبكة عطف و فصل أصغرية مخرجها $g(x,y,z)$. (درجة)

(v) صمم شبكة مخرجها $g(x,y,z)$ باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)

(vi) صمم شبكة مخرجها $g(x,y,z)$ باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

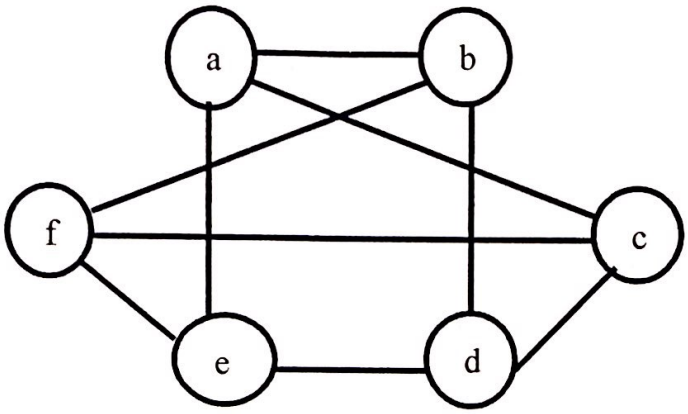
Scanned by CamScanner

السؤال الرابع:(7 درجات)

(أ) هل يوجد رسم عدد أضلاعه 13 و درجات رؤوسه هي $0,1,1,2,3,4,4,6,7$ ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

(ب) إذا علمت بأن عدد رؤوس K_{m,m^2} يساوي 42 , فجد عدد أضلاعه. (درجتان)

(ج) بيّن فيما إذا كان الرسم المقابل ثنائي التجزئة, و إذا كان ثنائي التجزئة, فجد تمثيلا ثنائي التجزئة له. (درجتان)



(د) ليكن G الرسم الممثّل بمصفوفة التجاور المقابلة :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) مثّل الرسم G . (درجة)

(ii) هل G رسم منتظم ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

Scanned by CamScanner

د/ برهان

تصحيح الاختبار النهائي 101 رياض
للفصل الثاني 1431/37 هـ

السؤال الأول: (10 درجات)

(أ) الطريقة الأولى: (الاستقراء الرياضي)

(0,5) $P(n): 3+3\times4+3\times4^2+\cdots+3\times4^{n-1}=4^n-1$ نضع

• خطوة الأساسية: $n=1$; $3 \overset{?}{=} 4^1-1$ صح فإن $P(1)$ صائب

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k\geq 1$. نفترض أن $P(k)$ صائب

(0,5) (يعني لدينا $3+3\times4+3\times4^2+\cdots+3\times4^{k-1}=4^k-1$) فلنثبت صحة $P(k+1)$

(2) $\left(3+3\times4+\cdots+3\times4^{k-1}+3\times4^k \overset{?}{=} 4^{k+1}-1\right)$

$$\underbrace{3+3\times4+\cdots+3\times4^{k-1}}+3\times4^k=$$

$$4^k-1+3\times4^k=4\times4^k-1=4^{k+1}-1$$

فبالتالي لكل $n\geq 1$ لدينا $3+3\times4+\cdots+3\times4^{n-1}=4^n-1$

طريقة ثانية (مباشرة) نأخذ $n\geq 1$ عدد صحيح فإن

$$S_n=3+3\times4+\cdots+3\times4^{n-1}$$

$$S_n=3\left(\underbrace{1+4+\cdots+4^{n-1}}_{L_n}\right)=3\left(1+4\left(1+\cdots+4^{n-2}\right)\right)$$

$$S_n=3\left(1+4\left(L_n-4^{n-1}\right)\right)=3\left(\frac{4^n-1}{3}\right)=4^n-1$$

$$L_n=1+4+\cdots+4^{n-1}=1+4\left(L_n-4^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow L_n=1+4L_n-4^n$$

$$3L_n=4^n-1 \Rightarrow L_n=\frac{4^n-1}{3}$$

(ب) (1) R ليست انعكاسية على N لأن $(1,1)\notin R$ (لوجود $1+1=2$)

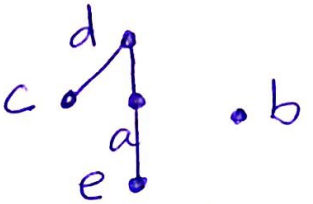
(1) R تناظرية لأن عملية الجمع ابدالية إذا كان mRn فإن nRm.

(1) R ليست تخالفية لأن 1R2 و 2R1 لكن $1\neq 2$.

(1) R ليست متعدية لأن 1R2 و 2R3 لكن $1\not R 3$.

Scanned by CamScanner

(2) (i)



(ii) العلاقة P غير كلية لأنها لا تتمتع بخاصية المقارنة (1)
مثلا $a \not P b$ و $b \not P a$.

السؤال الثاني (8 درجات)

(أ) (i) • S انعكاسية على $\mathbb{N}$ لأن عندما ناخذ $x \in \mathbb{N}$ فان $x S x$
لأن $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ صفر و هو عدد صحيح. (1)

• S تناظرية على $\mathbb{N}$ لأن عندما ناخذ $x, y \in \mathbb{N}$ و نفترض أن
$x S y$ فان $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ هو عدد صحيح و بالتالي $(\sqrt{y} - \sqrt{x})$ (1)
هو أيضا عدد صحيح إذن $y S x$.

• S متعدية على $\mathbb{N}$ لأن عندما ناخذ $x, y, z \in \mathbb{N}$ و نفترض
أن $x S y$ و $y S z$ فان $\sqrt{x} - \sqrt{y} = k$ و $\sqrt{y} - \sqrt{z} = k'$ حيث (1)
k و k' أعداد صحيحة فبالجمع نحصل $\sqrt{x} - \sqrt{z} = k + k'$ هو
أيضا عدد صحيح و بالتالي $x S z$.

بما أن S انعكاسية تناظرية و متعدية على $\mathbb{N}$ فهي علاقة تكافؤ على $\mathbb{N}$.

(ii) $25 \in [49]$ لأن $(\sqrt{25} - \sqrt{49}) = 5 - 7 = -2$ هو عدد صحيح (أي $25 S 49$) (1)

(ب) الانغلاق الانعكاسي $S(T) = T \cup I_A$ (1)

$S(T) = \{(1,1); (1,3); (2,1); (3,2); (2,2); (3,3)\}$

الانغلاق التناظري $\mathcal{S}(T) = T \cup T^{-1}$ (1)

$\mathcal{S}(T) = \{(1,1); (1,3); (2,1); (3,2); (3,1); (1,2); (2,3)\}$

الانغلاق المتعدي $\tau(T) = T \cup T^2 \cup T^3$

$T = \{(1,1); (1,3); (2,1); (3,2)\}$

$T^2 = \{(1,1); (1,3); (1,2); (2,1); (2,3); (3,1)\}$ (1)

$T^3 = T^2 \circ T = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,3); (2,2); (3,1); (3,3)\}$

Scanned by CamScanner

$\tau(T) = \{(1,1);(1,3);(2,1);(3,2);(1,2);(2,3);(3,1);(2,2);(3,3)\} = A \times A$ ①

السؤال الثالث (15 درجة)

(أ) لدينا $c = a + b' + a'b$ فإن

$ac = a(a + b' + a'b)$ $\quad aa = a$, $aa' = 0$

$ac = a + ab'$

$ac = a(1 + b') = a \cdot 1 = a$ ①

كذلك لدينا $c = a + b' + a'b$ فإن

$bc = b(a + b' + a'b)$

$bc = ba + 0 + a'b$

$bc = ba + ba' = b(\underbrace{a + a'}_{1}) = b$ ①

(ب) $f = xy + x'y' + xy'z$

$= xy(z + z') + x'y'(z + z') + xy'z$

$\boxed{\text{csp } f = xyz + xyz' + x'y'z + x'y'z' + xy'z}$ ②

بما أن $\text{cps } f = (\text{csp}(f'))'$

$f' = (xy + x'y' + xy'z)'$

$= (x' + y') \cdot (x + y) \cdot (x' + y + z')$

$= (x'y + xy')(x' + y + z')$

$f' = x'y + x'y + x'yz' + xy'z'$

$= x'y(z + z') + x'y(z + z') + x'yz' + xy'z'$

$f' = x'yz + x'yz' + x'yz + x'yz' + x'yz' + xy'z'$

وبالتالي $\text{csp } f' = x'yz + x'yz' + xy'z'$ ②

$\boxed{\text{cps}(f) = (x + y' + z') \cdot (x + y' + z) \cdot (x' + y + z)}$

Scanned by CamScanner

(٤)

$$g = xy + x'y' + x'z + yz$$

$$= xy(z+z') + x'y'(z+z') + x'(y+y')z + (x+x')yz$$

$$= xyz + xyz' + x'y'z + x'y'z' + x'yz + x'y'z + xyz + x'yz$$

$$\boxed{Csp\, g = xyz + xyz' + x'y'z + x'y'z' + x'yz}$$

② (شكل كارنوف)

(i)

	yz	y'z	y'z'	yz'
x	1	0	0	1
x'	1	1	1	0

② (ii)

$$\boxed{MSp(g) = yz + xy + x'y'}$$

(iii)

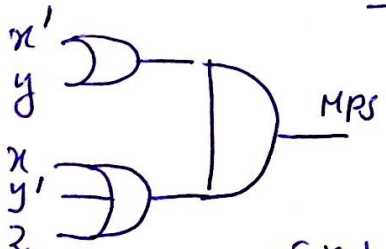
$$Mps(g) = (Msp(g'))'$$

$$Msp(g') = xy' + x'yz'$$

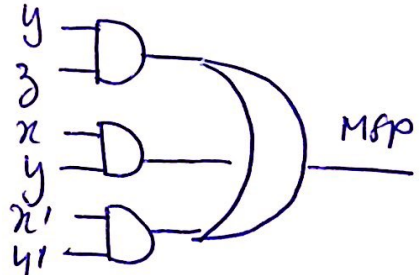
②

$$\boxed{MPS(g) = (x'+y)\cdot(x+y'+z)}$$

① (iv)



3 بوابات وبالتالي فهي شبكة عطف وفصل أحادية

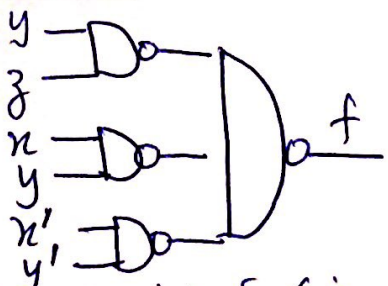


4 بوابات

$$MSp(g) = \left[(yz + xy + x'y')'\right]' \quad (v)$$

$$Msp(g) = \left((yz)'\cdot(xy)'(x'y')'\right)'$$

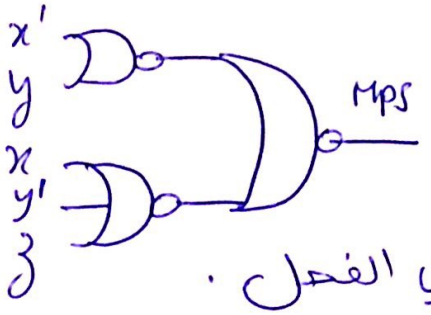
① شبكة نفي العطف



Scanned by CamScanner

$$Mps(g) = \left[\left((x'+y)(x+y'+z)\right)'\right]' \quad (v)$$

$$Mps(g) = \left[(x'+y)' + (x+y'+z)'\right]'$$

(1) 

تنبيه: تخزن في الفصل.

السؤال الرابع (7 درجات)

(أ) لا يوجد رسم بسبب الملاحظة أن

(1) $\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2|E|$

$2 \cdot 8 = 2 \times 13$

(ب) K_{m, m^2} له $m+m^2$ رأس

m^3 خلايا

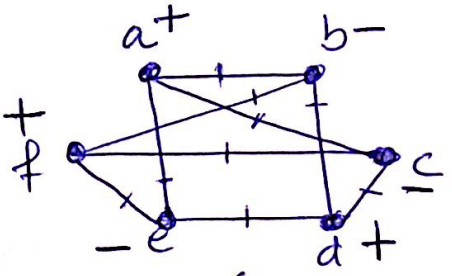
(1) $m+m^2 = 42$ بما أن

(1) $m(m+1) = 42$

(1) $m = 6$ فإن

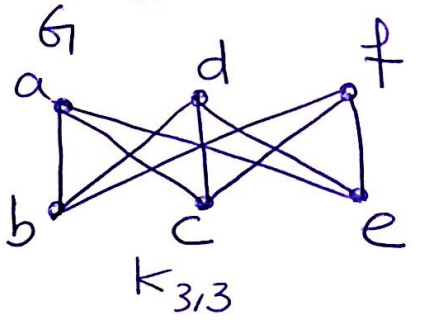
و بالتالي عدد الخلايا 6^3 خلايا.

(ج)



(1) هو ثنائي التجزئة لأنه لا يحتوي على دورة فردية.

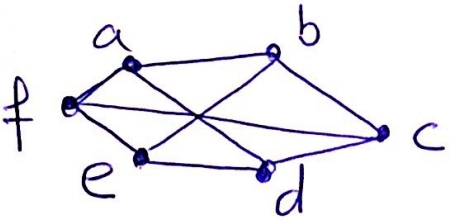
(1) $G \simeq$



$K_{3,3}$

(د) (i)

(1)



(ii) (1) G هو رسم منتظم من نوع 3 ذات 6 رؤوس.

Scanned by CamScanner