جامعة الملك سعود King Saud University — كلية العلوم – قسم الرياضيات	الإختبار النهائي للمقرر 151 ريض الفصل الثاني 1437/1436هـ الزمن: 3ساعات

السؤال الأول:(6 درجات)

(أ) اثبت أن: $\neg p \vee (q \to r) \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$. (3 درجات)

(ب) أثبت أن $[(u \wedge w) \to [v \to (u \wedge v \wedge w)]$ مصدوقة. (3 درجات)

السؤال الثاني:(5 درجات)

(أ) استخدم المكافئ العكسي لإثبات ما يلي:

" إذا كان $4n^2 + n - 3$ عددًا زوجيا فإن n عدد فردي". (درجتان)

(ب) أثبت أن: العدد 3 يقسم $[n(n+1)(n+2)]$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (3 درجات)

السؤال الثالث:(9 درجات)

(أ) لتكن R علاقة معرفة على $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,....\}$ كما يلي:

$m\ n \Leftrightarrow m\ R\ n$ يقبل القسمة على 6 .

بيّن فيما إذا كانت R انعكاسية, تناظرية, تخالفية, متعدية. (4 درجات)

(ب) لتكن S علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ كما يلي :

$a - b \Leftrightarrow aS\,b$ عدد صحيح زوجي.

(i) أثبت أن S علاقة تكافؤ. (3 درجات)

(ii) أثبت أن $[m] = [0]$ لكل عدد صحيح زوجي m و أن $[n] = [1]$ لكل عدد صحيح فردي n. (درجتان)

السؤال الرابع:(8 درجات)

لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه :

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy		1	1	1
xy'		1	1	1
$x'y'$				1
$x'y$				

(i) اكتب f على شكل CSP. (درجة واحدة)

(ii) اكتب f على شكل MSP. (درجتان)

(iii) اكتب f على شكل MPS. (درجتان)

(iv) صمم شبكة عطف و فصل أصغرية مخرجها الدالة f . (درجة واحدة)

(v) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة واحدة)

(vi) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة واحدة)

السؤال الخامس :(12 درجة)

(أ) هل يوجد رسم درجات رؤوسه $0,1,1,2,3,4,5,5$ ؟ لماذا ؟ (درجة واحدة)

(ب) هل يوجد رسم بسيط درجات رؤوسه $1,2,3,3,5,6$ ؟ لماذا ؟ (درجة واحدة)

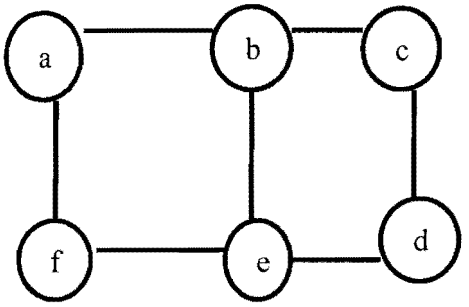
(ج) ليكن G رسما بسيطا ممثلا بمصفوفة التجاور أدناه :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

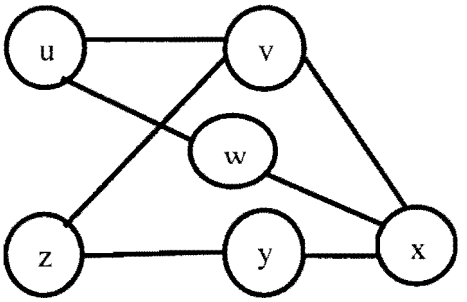
(i) أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم $\overline{G}$ لـ G. (درجتان)

(ii) هل G ذاتي التتميم ؟ لماذا ؟ (درجة واحدة)

(د) بيّن فيما إذا كان الرسمان التاليان G, H متماثلين أم لا. (درجتان)



G

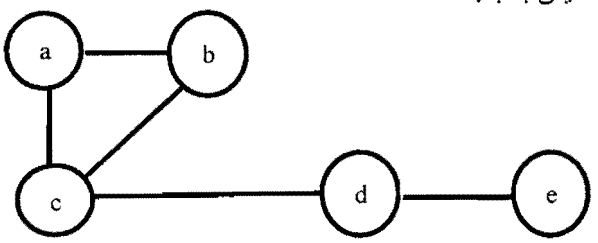


H

(هـ) إذا كان عدد رؤوس $K_{n,n}$ يساوي عدد أضلاعه, فأوجد n . (درجة واحدة)

(و) إعط مثالاً عن رسم بسيط ليس بغابة. (درجة واحدة)

(ز) للرسم المقابل:



(i) أوجد شجرة تقصي عرضي جذرها d . (درجة و نصف)

(ii) أوجد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها d . (درجة و نصف)

تصحيح الاختبار الثماني 101 رياضي للفصل الثاني 2017/2016

السؤال الأول (6 درجات)

(أ) $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)$ (3 درجات)

$\equiv \neg p \vee \neg q \vee r \vee r$

$\equiv \neg p \vee \neg q \vee r$

$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$

$\equiv \neg p \vee (q \to r)$

(ب) $(u \wedge w) \to [v \to (u \wedge v \wedge w)] \equiv$

$(u \wedge w) \to [\neg v \vee (u \wedge v \wedge w)] \equiv$

$\neg(u \wedge w) \vee [\neg v \vee (u \wedge v \wedge w)] \equiv$

$\neg(u \wedge w) \vee [(\neg v \vee (u \wedge w)) \vee (\neg v \vee v)] \equiv$ (3pts)

$\neg(u \wedge w) \vee [(\neg v \vee (u \wedge w)] \vee T \equiv$

$\neg(u \wedge w) \vee (u \wedge w) \vee \neg v \equiv$

$T \vee \neg v \equiv T$ (صحيحة)

السؤال الثاني (5 درجات)

(أ) المثال المضاد هو "إذا كان n عددا زوجيا فان $(4n^2+n-3)$ هو فردي" ①

البرهان: بما أن n زوجي إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k$

عندئذ $4n^2+n-3 = 4(2k)^2 + 2k - 3$

$= 16k^2 + 2k - 4 + 1$

$= 2[8k^2 + k - 2] + 1$ ①

$= 2m + 1$

يعني $(4n^2+n-3)$ هو فردي.

ب) نرمز $P(n)$: $3 \mid [n(n+1)(n+2)]$

• خطوة الأساس: $n=1$: $3 \mid ? \; 1(1+1)(1+2)=6$ صح إذن $P(1)$ صائب.

• خطوة الاستقراء: لنأخذ $k \geq 1$. فلنفترض أن $P(k)$ صائب ①

(يعني $3 \mid k(k+1)(k+2)$ $\Leftrightarrow$ يوجد عدد صحيح c بحيث $k(k+1)(k+2)=3c$)

ولنثبت صحة $P(k+1)$. ($3 \mid ? \; (k+1)(k+2)(k+3)$)

② $$(k+1)(k+2)(k+3) = \underbrace{k(k+1)(k+2)} + 3(k+1)(k+2)$$
$$= 3c + 3(k+1)$$
$$= 3(c+k+1) = 3L$$

إذا $3 \mid (k+1)(k+2)(k+3)$ يعني $P(k+1)$ صائب

باستخدام المبدأ الأول للاستقراء نستنتج أن $P(n)$ صائب لكل $n \geq 1$.

السؤال الثالث (9 درجات)

أ) • R ليست انعكاسية لأنها لا تحتوي على العلاقة $1R1$ مثلاً ①

• R تناظرية لأن عندما نأخذ $m,n \in \mathbb{Z}^+$ ونفترض أن mRn ①

عندئذ $6 \mid m.n \Leftrightarrow 6 \mid n.m \Rightarrow nRm$. ①

• R ليست تخالفية لأن $4R3$ و $3R4$ لكن $3 \neq 4$. ①

• R ليست متعدية لأن $3R4$ و $4R9$ لكن $3 \not R 9$. ①

ب) (1) • S انعكاسية على $\mathbb{Q}$ لأن عندما نأخذ $a \in \mathbb{Q}$ لدينا $a-a=0$ وهو عدد نوعي إذن aSa. ①

• S تناظرية على $\mathbb{Q}$ لأن عندما نأخذ $a,b \in \mathbb{Q}$ ونفترض أن aSb

عندئذ $a-b=2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ فإن $b-a=2(-k)$ هو أيضا عدد نوعي ①

يعني bSa.

• S متعدية على $\mathbb{Q}$ لأن عندما تأخذ $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ونفترض أن aSb و bSc فإن $a-b=2k$ و $b-c=2l$

① بالجمع $a-c=2(k+l)$ هو أيضا زوجي

إذا aSc

← بما أن S انعكاسية، تناظرية ومتعدية على $\mathbb{Q}$ فهي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Q}$.

(ii)

$$[0] = \{ a \in \mathbb{Q} \mid aS0 \}$$

① $$[0] = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a \text{ هو عدد زوجي} \}$$

$$[0] = [m] \quad \text{لكل } m \text{ عدد زوجي لدينا}$$

$$[1] = \{ a \in \mathbb{Q} \mid aS1 \}$$

① $$= \{ a \in \mathbb{Q} \mid (a-1) \text{ هو زوجي} \}$$

$[1] = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a \text{ هو فردي} \} = [n]$ لكل n عدد فردي

السؤال الرابع (8 درجات)

(i)

① $$CSp(f) = xyzw' + xyz'w' + xyz'w + xy'zw' + xy'z'w' + xy'z'w + x'y'z'w.$$

(ii)

② $$\boxed{MSp(f) = xw' + xz' + y'z'w}$$

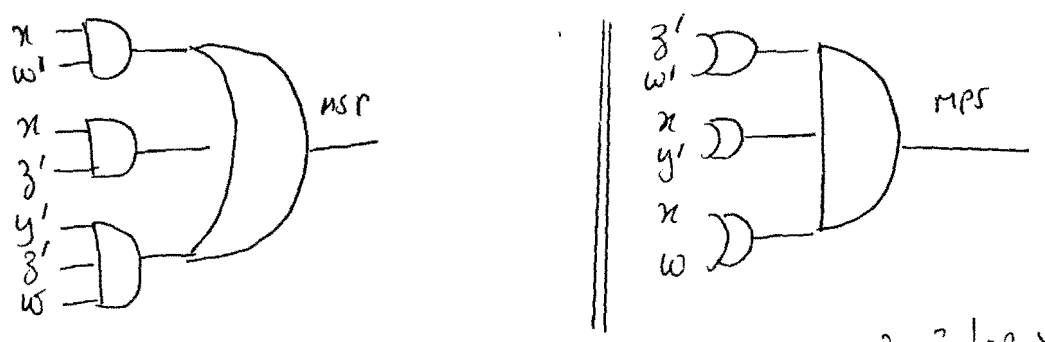
(iii)

$$MPS(f) = (MSp(f'))'$$

$$MSp(f') = zw + x'y + x'w'.$$

② $$\boxed{MPS(f) = (z'+w')(x+y')(x+w)}$$

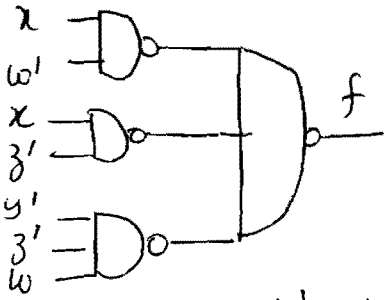
(iv)



① كلاهما تحتوي على 4 بوابات فصل وعطف إذن كلاهما تحتوي

(v)
$$MSP(f) = xw' + xz' + y'z'w$$
$$\equiv \left[(xw' + xz' + y'z'w)'\right]'$$
$$= \left[(xw')' \cdot (xz')' \cdot (y'z'w)'\right]'$$

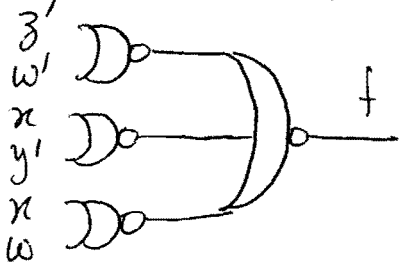
①



بشبكة نفي العطف مخرجها f

(vi)
$$MPS(f) = (z'+w')(x+y')(x+w)$$
$$= \left[((z'+w')(x+y')(x+w))'\right]'$$
$$= \left[(z'+w')' + (x+y')' + (x+w)'\right]'$$

①



بشبكة نفي الفصل
مخرجها f

السؤال الخامس (12 درجة)

(أ) لا يوجد رسم بسيط لأن $\sum_{n \in V(G)} \deg n = 21$ وهو عدد فردي $2|E|$

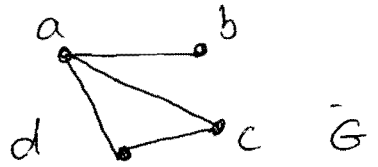
①

(ب) لا يوجد رسم بسيط لأنه إن وجد: لدينا 6 رؤوس فإن درجة رؤوسه لابد أن يكون أقل أو يساوي 5 وليس 6.

①

(ج)

G له 4 رؤوس و 4 أضلاع



②

(i) $G \cup \bar{G} = K_4$ فإن $|E(G)| + |E(\bar{G})| = |K_4|$

$$4 + |E(\bar{G})| = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

فإن عدد أضلاع الرسم المتمم لـ G هو 2.

(ii) لا، G ليس ذاتي التتميم لأن $G \not\cong \bar{G}$ (اختلاف في عدد الأضلاع)

①

(أ) نعم $H \simeq G$ لأنه يوجد تطبيق تماثلي f:

(2)

$x \in V(G)$	a	b	c	d	e	f
$f(x) \in V(H)$	u	v	z	y	x	w

(ب) $K_{n,n}$ $\begin{cases} 2n & \text{عدد رؤوسه} \\ n^2 & \text{عدد أضلاعه} \end{cases}$

يساوي $k_{n,n}$ عدد رؤوس $k_{n,n}$ يساوي عدد أضلاعه إذا

(1)
$$n^2 = 2n$$
$$n^2 - 2n = n(n-2) = 0$$
$$n = 0 \not\quad \boxed{n = 2}$$

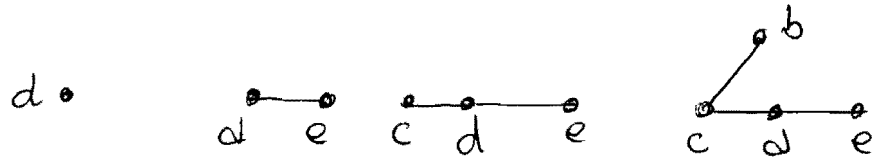
(و) غابة هو رسم لا يحتوي على دورات. خذ مثلا

هو رسم بيانه b وليس بغابة.

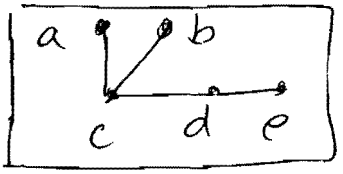
(1)

(ز)

(i)

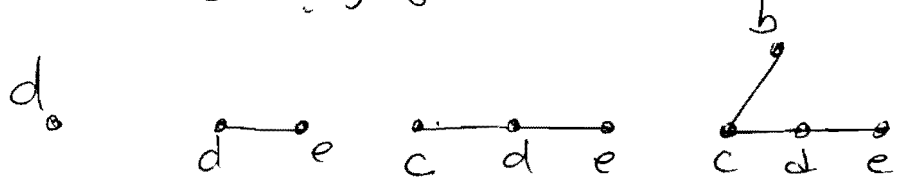


(1,5)

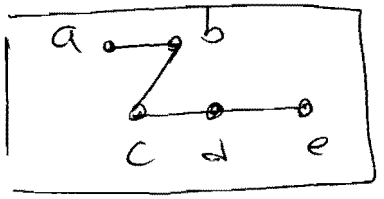


شجرة تفصي عرضي جذرها d.

(ii)



(1,5)



شجرة تقصي عمقي جذرها d.