

جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر 151 رياض	الفصل الصيفي 1436/1435 هـ الزمن: 3 ساعات
--	--	---

السؤال الأول (5 درجات)

(أ) بدون استخدام الجداول بين فيما إذا كانت العبارة: $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ تناقض أم لا. (درجتان)

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (3 درجات)

السؤال الثاني (5 درجات)

(أ) استخدم طريقة البرهان البديل لإثبات التالي: "إذا كان $xy = xz$ فإن $x = 0$ أو $y = z$ ". (درجتان)

(ب) استخدم البرهان بالتناقض لإثبات أن العدد $2 - 3\sqrt{5}$ عدد غير كسري. (3 درجات)

السؤال الثالث (5 درجات)

لتكن R العلاقة المعرفة على المجموعة $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ كما يلي: $x R y \Leftrightarrow \frac{x}{y}$ هو عدد فردي.

(i) أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي. (3 درجات)

(ii) أوجد شكل هاس إذا كانت R معرفة على المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12\}$. (درجتان)

السؤال الرابع (9 درجات)

(أ) ليكن B جبراً بولياً و $x, y \in B$. أثبت أن: $xy = 0 \Leftrightarrow xy' = x$. (درجتان)

(ب) لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	1
xy'	1	1	1	
$x'y'$		1	1	
$x'y$			1	

(i) أكتب f على شكل MSP ثم على شكل MPS . (درجتان+درجتان)

(ii) صمم شبكة عطف و فصل أصغريه مخرجها f . (درجة)

(iii) صمم شبكة منطقية مخرجها f باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)

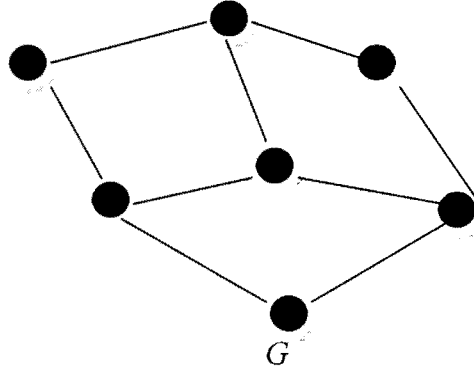
(iv) صمم شبكة منطقية مخرجها f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

السؤال الخامس (16 درجة)

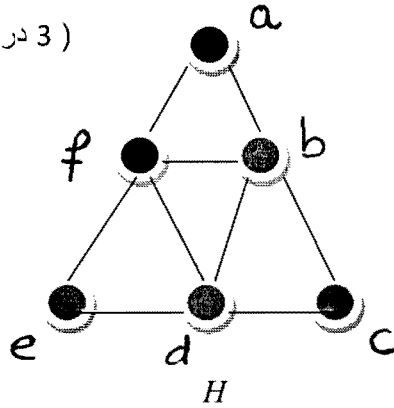
(أ) إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه يساوي n و عدد أضلاعه يساوي 56 وكان عدد أضلاع $\bar{G}$ هو 80 فأحسب n . (3 درجات)

(ب) حدد قيم n التي يكون فيها الرسم التام K_n شجرة. (درجتان)

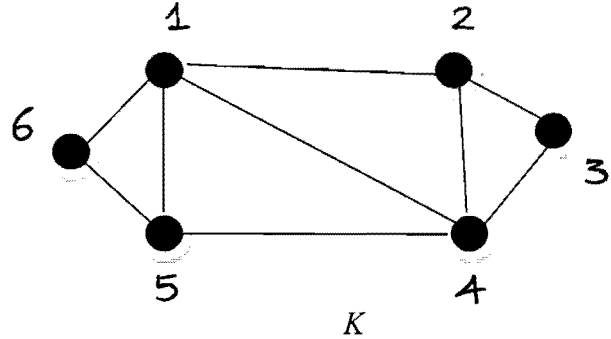
(ج) بين فيما إذا كان الرسم G أدناه ثنائي التجزئة أم لا ، و إذا كان ثنائي التجزئة فأوجد تمثيلاً ثنائي التجزئة له. (3 درجات)



(3 درجات)

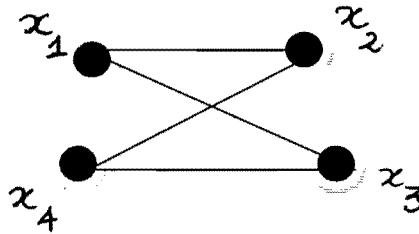


(د) بين فيما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين :

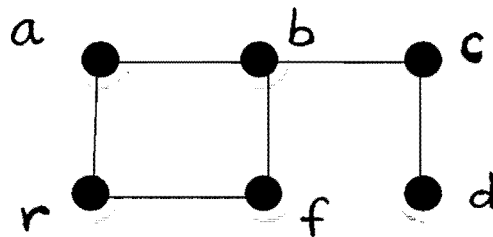


(درجتان)

(هـ) احسب عدد المسارات من الطول 4 من x_1 إلى x_4 للرسم التالي :



(و) ليكن L هو الرسم المقابل :



(درجة ونصف)

(i) أوجد شجرة تقص عرضي جذرها r .

(درجة ونصف)

(ii) أوجد شجرة تقص عمقي (طولي) جذرها r .

الحلح الاختبار النعائي ١٥١ رضى
للنصل الحيفى ١٤٣٧/٣٥ ط

السؤال الاول: (5 درجات)

$$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \equiv \quad (f)$$

(2)

$$p \wedge [(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \equiv$$

$$p \wedge [\neg p \vee (q \wedge \neg q)] \equiv p \wedge [\neg p \vee F] \equiv p \wedge \neg p \equiv F$$

فان العبارة هي تناقضا .

(ب) نضع " $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ " $P(n)$:

. خطوة الأساس $n=1$

(1)

ح $P(1)$ جانب

$$1 \times 2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)$$

. خطوة الاستقراء نأخذ $k \geq 1$ و نفترض أن $P(k)$ جانب فلنثبت صحة $P(k+1)$

$$\left(1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} (k+1)(k+2)(k+3) \right)$$

بما أن $P(k)$ جانب له ينأ $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$

(2)

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2) \left[\frac{k}{3} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{3} (k+1)(k+2)(k+3)$$

بإستخدام مبدأ الاول للاستقراء الرياضى نستنتج أن لكل $n \geq 1$, $P(n)$ جانب .

السؤال الثاني (5 درجات)

$P \rightarrow (q \vee r)$ لا ثبت صحة

نستخدم طريقة التبرهان البديل .

نفترض صحة p و $\neg q$ فلنثبت صحة r .

بما أن $x \neq 0$ فإن $\frac{1}{x}$ موجود .

(أ) نضع $p: xy = xz$

$q: x = 0$

$r: y = z$

②

$$xy = xz$$

$$\frac{1}{x} xy = \frac{1}{x} xz$$

$$y = z$$

(ب) نفترض أن $x = 2 - 3\sqrt{5}$ هو عدد كسري . عندئذ

③ $\sqrt{5} = \frac{2-x}{3}$ هو عدد كسري ولذا يشافض مع أن

$\sqrt{5}$ هو عدد غير كسري .

فنتبع أن $(2 - 3\sqrt{5})$ هو غير كسري .

السؤال الثالث (5 درجات)

(i) R انعكاسي على N لأن عندما تأخذ $x \in N$ فإن $\frac{x}{x} = 1$ هو عدد فردي
لأن $x R x$

①

R متعددي على N لأن عندما تأخذ $x, y, z \in N$ ونفترض أن $x R y$

و $y R z$ فإن $\frac{x}{y} = 2k+1$ عدد فردي (k عدد صحيح موجب)

كذلك $\frac{y}{z} = 2m+1$ عدد فردي (m عدد صحيح موجب)

بما أن $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}$ هو عدد فردي فإن $x R z$.
لأن $x R z$

①

R تخالفية على N لأن عندما تأخذ $x, y \in N$ ونفترض أن $x R y$ و $y R x$

فإنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث $\frac{x}{y} = 2k+1$. كذلك يوجد

عدد صحيح موجب m بحيث $\frac{y}{x} = 2m+1$.

عندئذ

$$1 = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = (2k+1)(2m+1)$$

$$= 4km + 2(k+m) + 1$$

① $x=y \Leftrightarrow k=m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} km=0 \\ k+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

بما أن R انعكاسي ، متعددي ، تخالفية على N فهي إذن علاقة ترتيب جزئي على N .

$$R = \{ (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (9,9); (10,10); (12,12); (3,1); (5,1); (9,1); (10,2); (9,3); (12,4); (6,2) \}$$

②



فإن شكل هاس هو الآتي :

السؤال الرابع (9 درجات)

(f) ليكن B جبرايوليا و نأخذ $x, y \in B$ فإن:

(2) $x' + xy' = x' + x \Leftrightarrow xy' = x$
 $x' + y' = 1 \Rightarrow (x + x) \cdot (x' + y') = 1 \Rightarrow$
 $xy = 0 \Leftrightarrow xy = 1' \Leftrightarrow (xy)' = 1 \Rightarrow$

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	1
xy'	1	1	1	0
$x'y'$	0	1	1	0
$x'y$	0	0	1	0

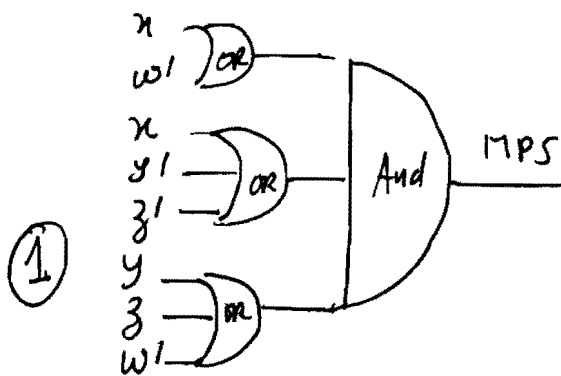
(ب)

(2) $MSP(f) = xy + z'w' + y'w' + xz$ (i)

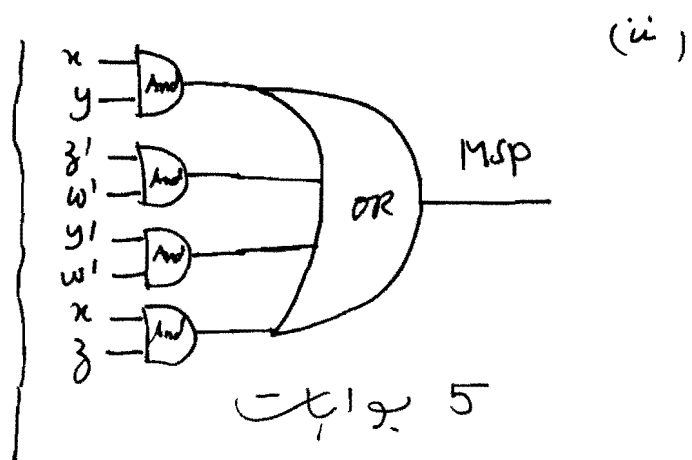
$MPS(f) = (MSP(f'))'$

$MSP(f') = x'w + x'y z + y'z'w$

(2) $MPS(f) = (x + w') \cdot (x + y' + z') \cdot (y + z + w')$

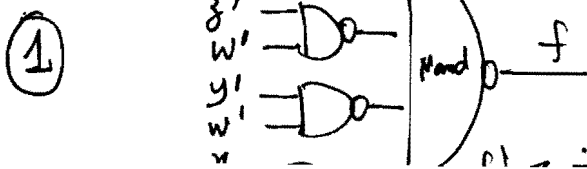


4 بوابات منطقية
عطف وفصل أصغر من 4



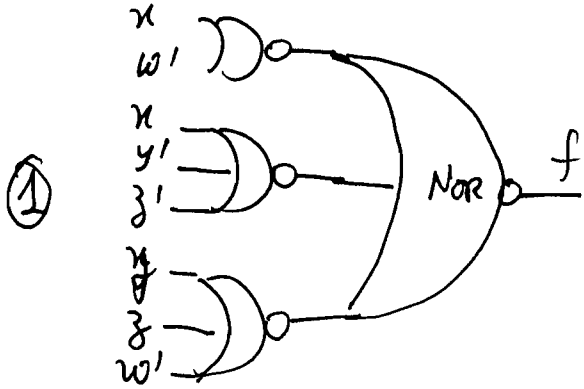
$MSP(f) = [xy + z'w' + y'w' + xz]'$ (iii)

$MSP = [(xy)' \cdot (z'w')' \cdot (y'w')' \cdot (xz)']'$



$$MPS(f) = \left[\left((x+w') (x+y+z') (y+z+w') \right)' \right]' \quad (iv)$$

$$= \left[(x+w')' + (x+y+z')' + (y+z+w')' \right]'$$



شبكة نفى الفصل فقط
مخرجها f

السؤال الخامس (16 درجة)

$$|V|=n ; \bar{G}(V, \bar{E}) ; G(V, E) \quad (f)$$

$$|E|=56$$

$$|\bar{E}|=80$$

نعلم أن $G \cup \bar{G} = K_n$ هو رسم تام فإن عدد أضلاعه هو

②

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$n(n-1) = 272 \Leftrightarrow 136 = 56 + 80 = \frac{n(n-1)}{2}$$

①

$$n = 17 \Leftrightarrow$$

(ب) K_n له n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ حلق .

لأن K_n شجرة لابد عدد أضلاعه يساوي $n-1$.

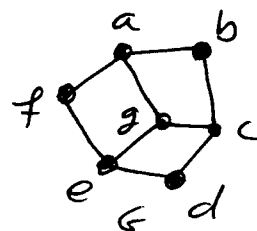
$$(n-1) \left(\frac{n-2}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow (n-1) \left[\frac{n}{2} - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = (n-1) \quad ; \text{ إذن}$$

②

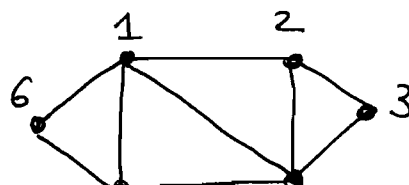
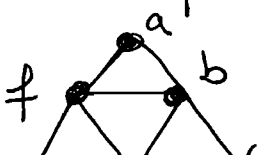
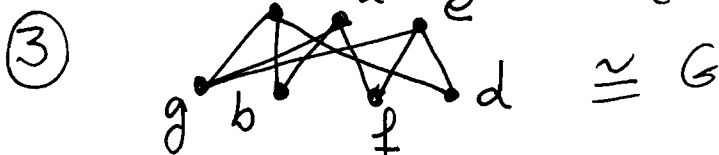
$$\Leftrightarrow n=1 \text{ أو } n=2$$

يعني K_1 و K_2 مع أشجار فقط .

يحتوي فقط على دورات زوجية فهو (ن)
ثنائي التجزئة .



(ج) الرسم



(د)

لأن H يحتوي على 3 رؤوس ذات درجة 4 لأن K
 له رأسان فقط ذات درجة 4 (ليس متماثلين)

(3)

(ب) مصفوفة التجاور للرسم هي:

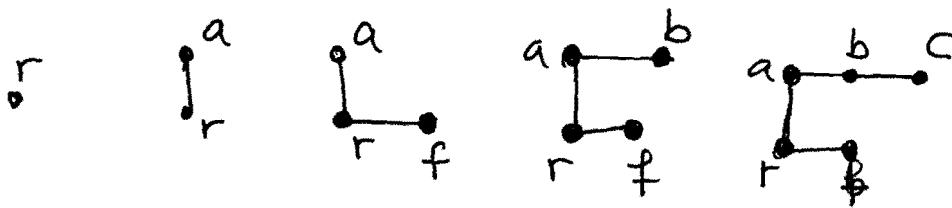
$$A = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(2)

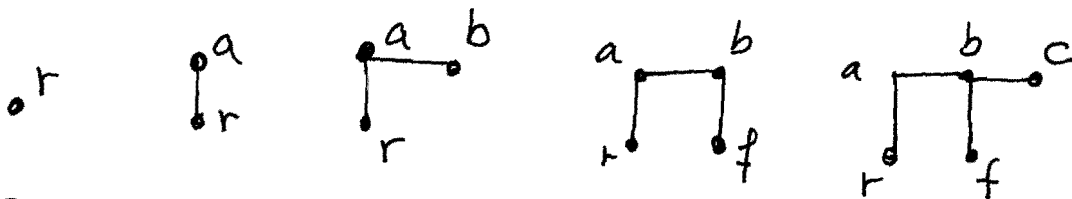
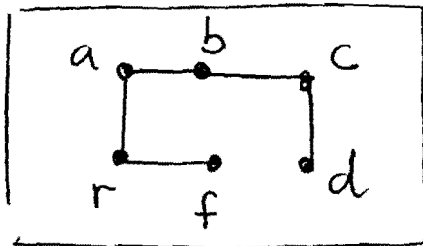
لأن يوجد 8 مسارات مختلفة ذات طول 4 بين x_1 و x_4 .



(9) (i)

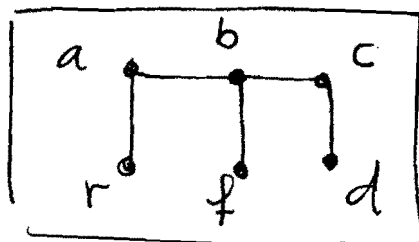
(1,5)

شجرة نقص مرئية
 جذرها r .



(ii)

شجرة نقص مرئية
 جذرها r .



(1,5)