

|                                                 |                                        |                                             |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------|
| جامعة الملك سعود<br>كلية العلوم - قسم الرياضيات | الاختبار النهائي في المقرر<br>151 رياض | الفصل الثاني 1435/1436 هـ<br>الزمن: 3 ساعات |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------|

د. برهان

|               |  |
|---------------|--|
| اسم الطالب    |  |
| الرقم الجامعي |  |

#### السؤال الأول (4 درجات)

(درجتان)

(أ) بدون استخدام الجداول أثبت أن:  $p \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \leftrightarrow (q \vee r)$

$$\begin{aligned}
 p \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg r) &\equiv (p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \wedge ((\neg q \wedge \neg r) \rightarrow p) \\
 &\equiv (\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \wedge ((q \vee r) \vee p) \\
 &\equiv ((q \vee r) \vee \neg p) \wedge (p \vee (q \vee r)) \\
 &\equiv ((q \vee r) \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow (q \vee r)) \\
 &\equiv \neg p \leftrightarrow (q \vee r)
 \end{aligned}$$

(2)

(درجتان)

(ب) بين فيما إذا كانت العبارة:  $\neg(A \rightarrow B) \wedge [B \wedge \neg D]$  تناقضا أم لا.

(2)

$$\begin{aligned}
 &[\neg(A \rightarrow B)] \wedge [B \wedge \neg D] \equiv \\
 &[\neg(\neg A \vee B)] \wedge [B \wedge \neg D] \equiv \\
 &[A \wedge \neg B] \wedge [B \wedge \neg D] \equiv \\
 &(A \wedge \neg D) \wedge (B \wedge \neg B) \equiv (A \wedge \neg D) \wedge F \equiv F
 \end{aligned}$$

تناقضا

#### السؤال الثاني (5 درجات)

(أ) ليكن  $P$  التقرير التالي: "إذا كان  $a+b \leq 4$  فإن  $a \leq 1$  أو  $b \leq 3$ ". أكتب حرفيا المكافئ العكسي  $\neg P$  ثم استخدمه لإثبات صواب  $P$ .

(درجتان)

- نضع  $A: a+b \leq 4$  ,  $B: a \leq 1$  ,  $C: b \leq 3$

التقرير  $P$  على الصورة المنطقية  $P: A \rightarrow (B \vee C)$

المكافئ العكسي  $\neg P$  هو  $\neg(A \rightarrow (B \vee C))$

$$\equiv (\neg B \wedge \neg C) \rightarrow \neg A$$

(1)

"لأنه كان  $a > 1$  و  $b > 3$  فإن  $a+b > 4$ "

الادعاء: نؤثر في أن  $a > 1$  و  $b > 3$  فنتبع أن  $a+b > 1+3=4$ . (1)

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن:  $5n^2 - 3n - 2 \geq 0$  لكل عدد صحيح  $n \geq 1$ . (3 درجات)

$P(n) : 5n^2 - 3n - 2 \geq 0$  صحیح

• الخطوات الأساسية:  $n=1$

لذا  $P(1)$  :  $5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0 \geq 0$

• خطوط الاستعراة:

لیکن  $k \geq 1$  . خط فرض آن  $f(k)$  جواب (دینی) دینا  $(5k^2 - 3k - 2) \geq 0$

فإنه يتبين  $P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$  (بسهولة)  $5(k+1)^2 - 3(k+1) - 2 \geq 0$

$$5(k+1)^2 - 3(k+1) - 2 = 5(k^2 + 2k + 1) - 3k - 3 - 2$$

$$= 5k^2 + 10k + 5 - 3k - 3 - 2$$

$$= [5k^2 - 3k - 2] + \underline{10k + 2} \geq 0$$

السؤال الثالث (5 درجات)  $\geq 0$   
 عند  $n \geq 1$   $P(n)$  حاد

لتكن  $R$  العلاقة المعرفة على المجموعة  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  كما يلي :  $x + y \Leftrightarrow x R y$  عدد زوجي.

( 3 درجات )

(i) أثبت أن  $R$  علاقة تكافؤ.

Abg.  $n+x=2x$ ,  $x \in \mathbb{N}$  ist lösbar ist in  $\mathbb{N}$  oder  $\sum_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R}$ .

①

عبد رزاق بی بی Rn . n

•  $R$  کا ختیہ کی  $N$  دن عیسا آخذ  $n, y \in N$  و بفرض انا

④  $n \in y$  فان  $(n+y)$  هو زوجي. لهذا يوجد  $(y+n)$  اعداد هو

زوجہ = بی ان ۲۲۸

(1)  $x+2=2a+2b-2c$  &  $x+y=2a$

(ii) أوجد [2].

$$[2] = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ R } 2\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{N} / (x+2) = \underline{0}, \dots\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

(iii) بين فيما إذا كانت العلاقة  $R$  تخالفية.

(درجة)

$R$  ليس حلقه لأن  $2R4$  و  $4R2$  و  $2 \neq 4$ .

①

السؤال الرابع (13 درجة)

(أ) لتكن الدالة البولية  $f(x, y, z) = xy + z$ .

(درجتان)

(i) جد  $CSP(f)$ .

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy + z \\ &= xy(z + z') + (x + x')(y + y')z \\ &= \underline{xyz} + \underline{xyz'} + \underline{xy'z} + \underline{xy'z'} + \underline{x'y'z} + \underline{x'y'z'} \end{aligned}$$

②

$$CSP(f) = \underline{xyz} + \underline{xyz'} + \underline{xy'z} + \underline{x'y'z} + \underline{x'y'z'}$$

(درجتان)

(ii) جد  $CPS(f)$ .

①

$$\begin{aligned} f' &= (xy + z)' = (x' + y') \cdot z' \\ &= x'z' + y'z' = x'(y + y')z' + (x + x')y'z' \\ &= \underline{x'y'z'} + \underline{x'y'z'} + \underline{xy'z'} + \underline{x'y'z'} \end{aligned}$$

①

$$CPS(f) = \underline{x'y'z'} + \underline{x'y'z'} + \underline{xy'z'} + \underline{x'y'z'}$$

(ب) لتكن  $g$  دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

|        | $zw$ | $zw'$ | $z'w'$ | $z'w$ |
|--------|------|-------|--------|-------|
| $xy$   | 1    | 0     | 1      | 1     |
| $xy'$  | 1    | 0     | 1      | 0     |
| $x'y'$ | 0    | 0     | 1      | 0     |
| $x'y$  | 0    | 0     | 1      | 1     |

(درجتان)

(i) أكتب  $g$  على شكل  $MSP$ .

②

$$MSP(g) = \underline{z'w'} + \underline{yz'} + \underline{xzw}$$

(درجتان)

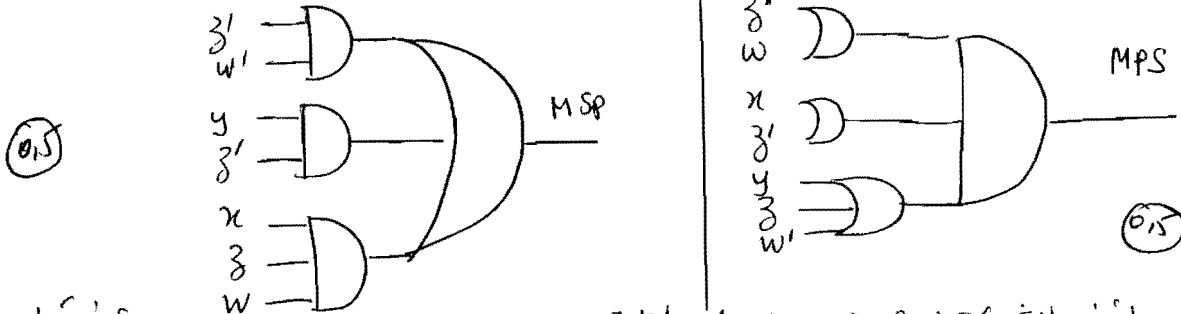
(ii) أكتب  $g$  على شكل  $MPS$ .  
 $MPS(g) = (MSP(g'))'$

$$MSP(g') = z'w' + x'z + y'z'w$$

②  $MPS(g) = (z' + w) \cdot (x + z') \cdot (y + z + w')$

(درجة)

(iii) صمم شبكة عطف و فصل أصغريه مخرجها  $g$ .



بما أن الشبكتين تحتوي على 4 بوابات إذن كلاهما شبكتان عطف وفصل أحدهما  $g$ .

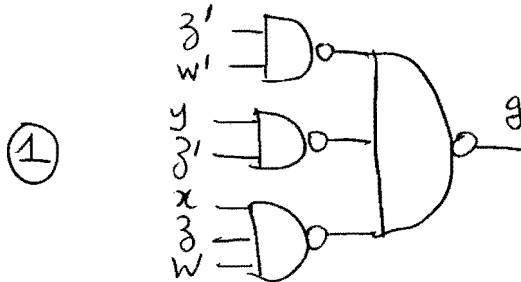
(درجة)

(iv) صمم شبكة منطقية مخرجها  $g$  باستخدام بوابات نفي العطف فقط.

$$MSP(g) = z'w' + yz' + xzw$$

$$MSP(g) = [(z'w' + yz' + xzw)']$$

$$MSP(g) = [(z'w')' \cdot (yz')' \cdot (xzw)']'$$



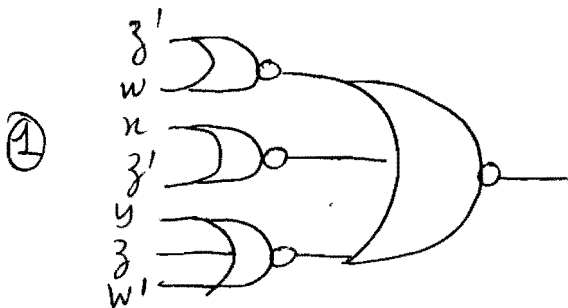
(درجة)

(v) صمم شبكة منطقية مخرجها  $g$  باستخدام بوابات نفي الفصل فقط.

$$MPS(g) = (z' + w)(x + z')(y + z + w')$$

$$= [((z' + w)(x + z')(y + z + w'))']'$$

$$= [(z' + w)' + (x + z')' + (y + z + w')']'$$



(ج) ليكن  $B$  جيرا بوليا و  $x, y, z \in B$ . أثبت أن:  $x = xz \wedge y = yz \Rightarrow (x + y)z' = 0$

بما أن  $x = xz$  و  $y = yz$  بالتعويض قيم  $x$  و  $y$  (درجتان)

②  $(x + y)z' = xz' + yz' = (xz)z' + (yz)z'$   
 $= x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$

السؤال الخامس (13 درجة)

(أ) إذا كان عدد رؤوس  $K_{m,n}$  يساوي 16 و عدد أضلاعه يساوي 64 فأوجد كلا من  $m$  و  $n$ . (درجتان)

نعلم أن  $K_{m,n}$  لديه  $(m+n)$  رأساً و  $(m \cdot n)$  ضلعاً. إذاً لدينا

$$\begin{cases} m+n=16 \\ m \cdot n=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{بارتفع طرفي (2) في: } (16-n)n=64 \\ & n^2-16n+64=0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (16)^2 - 4 \times 64 = 0$$

(2)

$$n = \frac{16}{2} = 8$$

عندئذ  $m=8$

إذاً  $K_{8,8}$

(ب) أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم لـ  $K_{12,8}$  ثم بين فيما إذا كان الرسم  $K_{12,8}$  ذاتي التتبع. (3 درجات)

$$K_{20} = K_{12,8} \cup \overline{K_{12,8}} \quad (\text{رسم تام})$$

$$K_{20} \text{ لديه } \frac{20 \times 19}{2} = 190 \text{ ضلع}$$

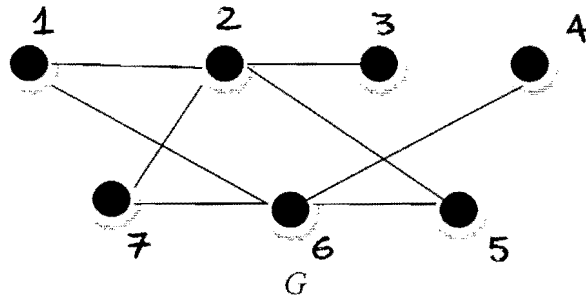
$$K_{12,8} \text{ لديه } 96 \text{ ضلع}$$

$$\text{فنستخرج أن } \overline{K_{12,8}} \text{ له } 190 - 96 = 94 \text{ ضلعاً}$$

(2)

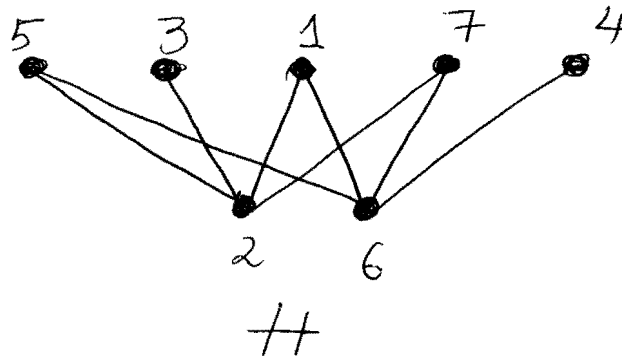
$K_{12,8}$  ليس ذاتي التتبع لأن  $K_{12,8} \neq \overline{K_{12,8}}$  (ليس لهما نفس عدد الأضلاع) (1)

(ج) بين فيما إذا كان الرسم  $G$  أدناه ثنائي التجزئة أم لا، وإذا كان ثنائي التجزئة فأوجد تمثيلاً ثنائي التجزئة له. (درجتان)



$G$  هو رسم ثنائي التجزئة لأنه لا يحتوي على دورات فردية.

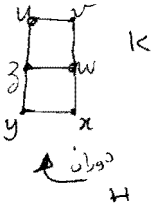
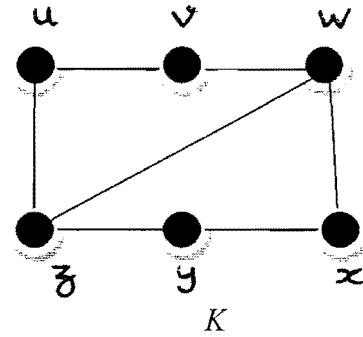
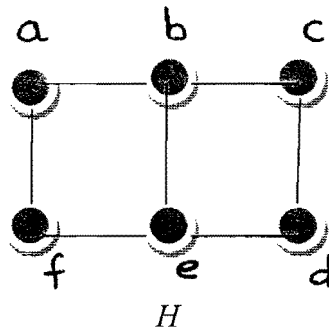
(2)



متماثلاً

(درجتان)

(د) بین فیما إذا كان الرسمان التاليان متماثلین :



نعم  $H \cong K$  لأنه يوجد تطابق تماثلي  $f$  :

(2)

|                 |   |   |   |   |   |   |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|
| $x \in V(H)$    | a | b | c | d | e | f |
| $f(x) \in V(K)$ | u | w | x | y | z | v |

(هـ) إذا كانت  $T$  شجرة تحتوي بالضبط 20 رأسا درجة كل واحد منها 2 و  $x$  رأسا درجة كل واحد منها 1 فأوجد  $x$ .

نستخدم مبرهنة مجموع درجاته يساوي ضعف عدد أقطابه.

(1)

$$\sum_{x \in V(T)} \deg x = 2|E|$$

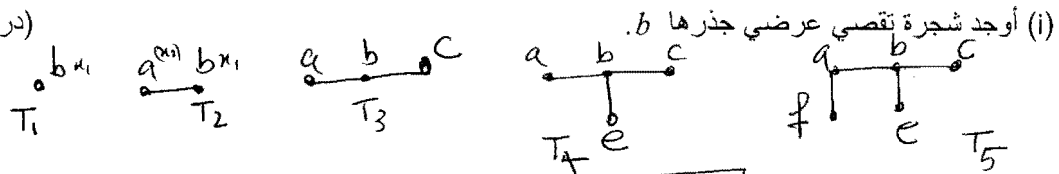
$T$  ليس لها رأسا و  $(x+20)$  رأسا و  $T$  شجرة فإن  $19+x = |E|$

(1)

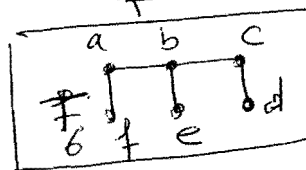
$$x+40 = 2(19+x) \Rightarrow x=20$$

(و) للرسم  $H$  أعلاه (في الفقرة (د)) :

(درجة)

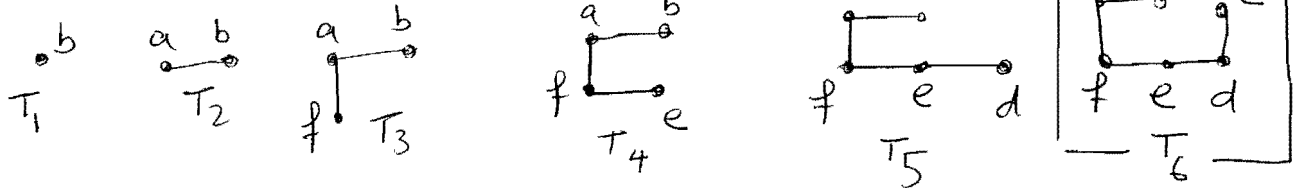


(1)



(درجة)

(ii) أوجد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها  $b$ .



(1)