د. برطان

جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي — الفصل الأول 1436/1435هـ
كلية العلوم – قسم الرياضيات — في المقرر 151 ريض — الزمن: ثلاث ساعات

إسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
إسم المدرس	

س1 : (أ) بين فيما إذا كانت العبارة التالية مصدوقة أم لا . $[p \leftrightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p]$ (ثلاث درجات)

العبارة هي صدوقة لأن :

$$[p \leftrightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv$$

$$[[p \rightarrow (q \vee r)] \wedge [(q \vee r) \rightarrow p]] \rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv$$

(3)

$$[(\neg p \vee (q \vee r)) \wedge (\neg (q \vee r) \vee p)] \rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv$$

$$\neg [(\neg p \vee (q \vee r)) \wedge (\neg (q \vee r) \vee p)] \vee [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv$$

$$\neg (\neg p \vee (q \vee r)) \vee \neg [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \vee [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv \neg (\neg p \vee (q \vee r)) \vee T = T$$

(ب) بين فيما إذا كان: $(u \wedge v) \rightarrow w \equiv (u \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow w)$ (درجتان)

$\neg A \vee A \equiv T$
$\neg B \vee T \equiv T$

العبارتين ليس متكافئتين منطقيا لأن :

(2)

u	v	w	$u \wedge v$	$u \rightarrow w$	$v \rightarrow w$	$(u \wedge v) \rightarrow w$	$(u \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow w)$
T	F	F	F	F	T	(T)	[F]

خذ قيمة $u := T$, $v := F$, $w := F$

فإن $(u \wedge v) \rightarrow w$ هي T لكن $(u \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow w)$ هي F .

(ج) باستخدام الإستقراء الرياضي، أثبت أن $2^n \geq n+12$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$. (ثلاث درجات)

نضع $P(n) : 2^n \geqslant n+12$

- خطوة الأساسية : $n=4$.

(1) $2^4 = 16 \geqslant 4+12$ إذن $P(4)$ صائب .

- خطوة الاستقراء : نأخذ $k \geqslant 4$. ونفترض أن $P(k)$ صائب (يعني لدينا : $2^k \geqslant k+12$) ونثبت صحة $P(k+1)$.

(1) $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$

$2^{k+1} \geqslant 2 \cdot (k+12) = 2k+24 \geqslant (k+1)+12 + k+11 .$

س2 : (أ) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد $A=\{0,1,2,3,4,...\}$ كمايلي: $aRb \Leftrightarrow a=2b$

بين فيما إذا كانت R انعاكسية، تناظرية، تخالفية، متعدية. (أربع درجات)

(1) • R ليست انعكاسية لأن $(1,1)\notin R$.

(1) • R ليست تناظرية لأن $(4,2)\in R$ لكن $(2,4)\notin R$.

(1) • R تخالفية لأن إذا كان aRb و bRa فان لدينا $a=b=0$.

(1) • R ليست متعدية لأن $4R2$ و $2R1$ لكن $4\not R1$.

(ب) إذا علمت أن $S=\{(a,a),(b,b),(b,d),(c,c),(d,b),(d,d)\}$ علاقة تكافؤ على المجموعة $B=\{a,b,c,d\}$

فجد جميع فصول التكافؤ. (درجة واحدة)

(1) • $[a]=\{a\}$
• $[b]=\{b,d\}=[d]$
• $[c]=\{c\}$

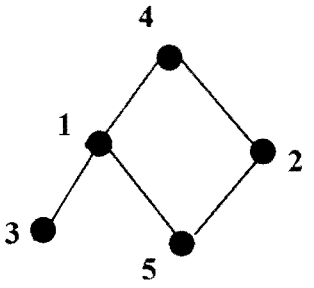
3 فصول تكافؤ مختلفة .

(ج) لتكن T علاقة ترتيب جزئي على $E=\{1,2,3,4,5\}$ ممثلة بشكل هاس أدناه.

(i) اكتب T كمجموعة أزواج مرتبة. (درجة واحدة)

(1) $T=\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(3,1);(3,4);(1,4);(5,1);(5,4);(5,2);(2,4)\}$

(ii) هل T علاقة ترتيب كلي؟ (برر إجابتك). (درجة واحدة)



(1) T ليست علاقة ترتيب كلي لأنها لا تتمتع بخاصية المقارنة

$3\not 5$ و $5\not 3$

(د) أوجد مصفوفة الإغلاق المتعدي للعلاقة الممثلة بالمصفوفة التالية. (ثلاث درجات)

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(1) $M_{t(R)}=M+M^{[2]}+M^{[3]}$ * مصفوفة الاغلاق المتعدي

(1) • $M^{[2]}=M\odot M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(1) • $M^{[3]}=M^{[2]}\odot M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

• $M_{t(R)}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

س3 : لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	0	1	0	0
xy'	0	1	1	1
$x'y'$	0	1	1	1
$x'y$	0	0	1	1

(أ) اكتب f على شكل CSP. (درجة)

(1) $CSP(f) = xyz w' + xyz' w' + xy' z' w' + xy' z' w + x'y' z w' + x'y' z' w' + x'y z' w + x'y z' w'$.

(ب) اكتب f على شكل MSP. (درجتان)

(2) $MSP(f) = xy w' + x'y' w' + y' z' + x' z'$.

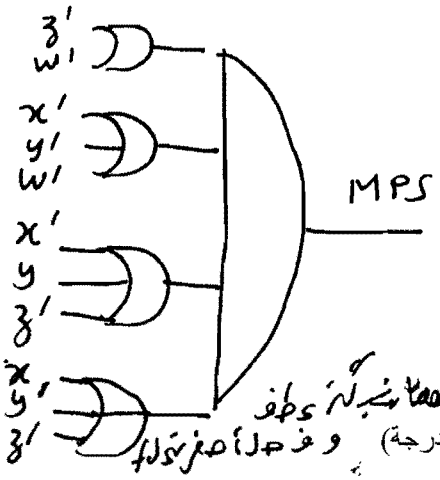
(ج) اكتب f على شكل MPS. (درجتان)

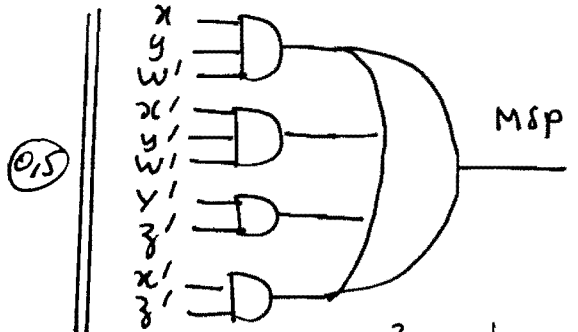
$MPS(f) = (MSP(f'))'$

(2) $MSP(f') = zw + xyw + xy'z + x'yz$.

$MPS(f) = (z'+w') \cdot (x'+y'+w') \cdot (x'+y+z') \cdot (x+y'+z')$

(د) صمم شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها الدالة f. (درجة)

(0,5) 

(0,5) 

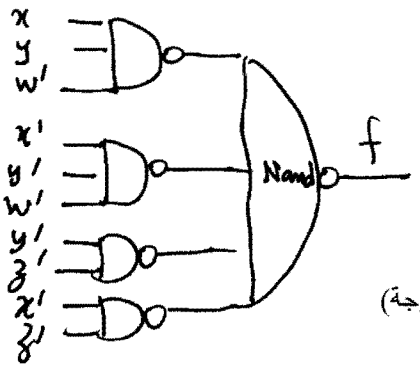
كلاهما يحتوي على 5 بوابات لذا كلاهما مقبول

(ه) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)

$MSP(f) = xyw' + x'y'w' + y'z' + x'z'$

$MSP(f) = [(xyw' + x'y'w' + y'z' + x'z')']'$

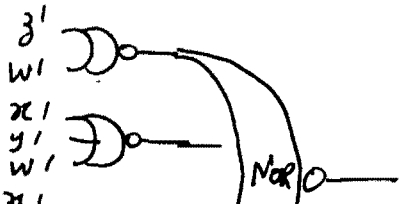
$MSP(f) = [(xyw')' \cdot (x'y'w')' \cdot (y'z')' \cdot (x'z')']'$

(1) 

(و) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

$MPS(f) = (z'+w') \cdot (x'+y'+w') \cdot (x'+y+z') \cdot (x+y'+z')$

$= [(z'+w')' + (x'+y'+w')' + (x'+y+z')' + (x+y'+z')']'$

(1) 

س4 : (أ) هل يوجد رسم (بسيط) متتالية درجات رؤوسه 1,2,3,3,3,4,5 ؟ (برر إجابتك). (درجة)

لا يوجد لأنه لا يحقق للعادلة $\sum deg(x_i) = 2|E|$ ① لأن المجموع = 21 وهو عدد فردي

(ب) هل يمكن أن يكون رسم ذو 8 رؤوس و 18 ضلعا منتظما؟ لماذا؟ (درجة)

لا يمكن لأنه لو افترضنا أنه يوجد رسم منتظم ذات $n = 8$ رأس ① ومنتظم من نوع r فإن $18 = |E| = \frac{nr}{2} = 4r$ يعني $r = \frac{18}{4} = 9/2$ وهو ليس عدد صحيح ↯.

(ج) إذا كان عدد أضلاع الرسم التام K_n هو $4n$, فجد عدد رؤوسه. (درجتان)

K_n له n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ ضلع. إذن لدينا ② $4n = \frac{n(n-1)}{2}$

$n - 1 = 8$

إذن $\boxed{n = 9}$ فهو إذن K_9.

(د) أوجد العدد الصحيح k إذا علمت أنه توجد شجرة متتالية درجات رؤوسها $1,1,1,1,2,2,k,2k$. (درجتان)

بما أن T شجرة ففي رسم بسيط ذات 8 رؤوس و 7 أضلاع

$\sum deg\, x = 2|E|$

$1+1+1+1+2+2+k+2k = 3k+8 = 2(8-1)$

② $3k+8 = 14$

$3k = 6$

يعني $\boxed{k = 2}$

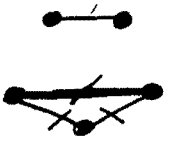
س5 : (أ) مثل $\overline{K_{2,3}}$ متمم الرسم $K_{2,3}$, ثم بين فيما إذا كان $\overline{K_{2,3}}$ ثنائي التجزئة. (درجتان)

$\overline{K_{2,3}}$ ليس ثنائي التجزئة لأنه يحتوي على دورة فردية.

① فإن

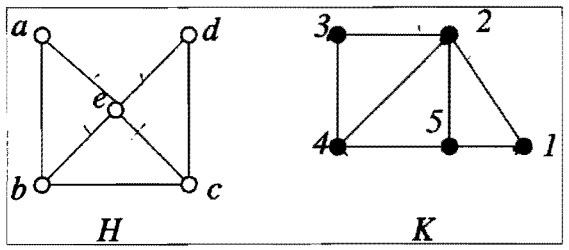
$K_{2,3}$

له 5 رؤوس و 6 أضلاع

① 

$\overline{K_{2,3}}$ له 5 رؤوس و 4 أضلاع (لأن $K_{2,3} \cup \overline{K_{2,3}} = K_5$)

(ب) بين فيما إذا كان الرسمان K, H أدناه متماثلين أم لا. (درجتان)



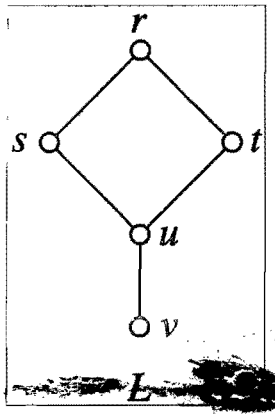
H و K متماثلين لأنه يوجد تطبيق تماثلي f

$x \in V(H)$	a	b	c	d	e
$f(x) \in V(K)$	3	4	5	1	2

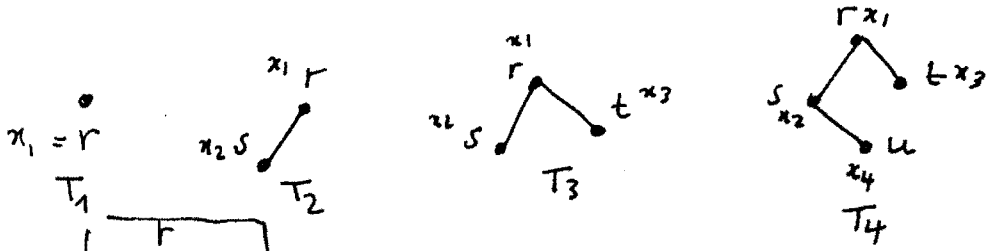
اسحب العدد 2 إلى الوسط و قم بدوران 1 إلى الأعلى نحصل على H هي الرسم K.

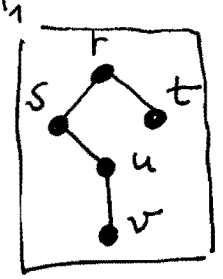
②

(أ) ليكن الرسم L أدناه



(i) جد شجرة تقصٍ عرضي جذرها r. (درجتان)

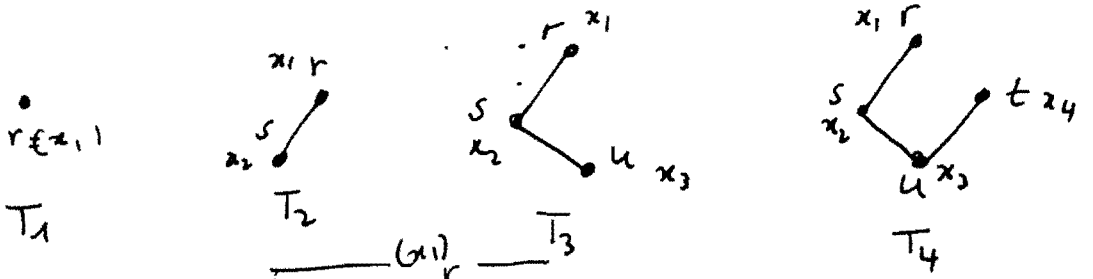


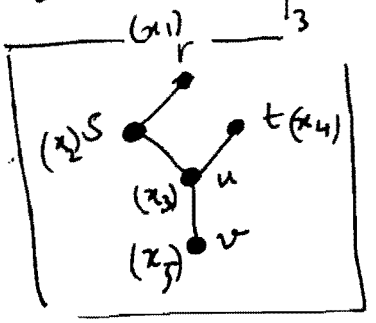


شجرة تقصي عرضي جذرها r

(2)

(ii) جد شجرة تقصٍ عمقي (طولي) جذرها r. (درجتان)





(2)

شجرة تقصي عمقي جذرها r.