

د: برهان

الاسم:

الرقم الجامعي:

الجزء الأول (10 درجات) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

(1) دون استخدام جداول الصواب , أثبت أن :

(درجة و نصف)

(أ) $\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow \neg q)$ هي تناقض.

$$\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$$

(0,5)

$$\equiv (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge q)$$

(0,5)

$$\equiv (p \wedge p) \wedge (q \wedge \neg q)$$

$$\equiv p \wedge F \equiv F$$

(0,5)

(درجة و نصف)

(ب) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$ هي مصدوقة.

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$$

(0,5)

$$\equiv (\neg p \vee q) \vee (p \vee q)$$

(0,5)

$$\equiv (\neg p \vee p) \vee (q \vee q)$$

(0,5)

$$\equiv T \vee q \equiv T$$

(2) بين صحة أو خطأ كل واحدة من العبارات التالية مع التعليل :

(درجة و نصف)

(أ) $\exists x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 + 3x \leq 2)$.

ح, عند $x=0$:

(0,5)

$$0 = 0^2 + 3 \times 0 \leq 2$$

(1)

(درجة ونصف)

(ب) $\forall y \in \mathbb{R} \mid (y^2 + y \geq 0)$.

خاطئ . خذ $y = -1/2$

(0.5)

$$\begin{aligned} y^2 + y &= (-1/2)^2 + (-1/2) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \leq 0 \end{aligned}$$

(1)

(4 درجات)

(3) باستخدام الاستقراء الرياضي، أثبت أن :

$$1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

لكل عدد صحيح $n \geq 1$

$$P(n): \quad "1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + n \times 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2"$$

خطوة الأساسية : $n = 1$:

$$1 \times 2^1 \stackrel{?}{=} (1-1)2^2 + 2$$

$$2 = 2 \quad \text{صح إذن } P(1) \text{ حادب.}$$

(1)

خطوة الاستقراء : نأخذ $k \geq 1$. نترض أن $P(k)$ حادب .

$$(\text{يعني لدينا : } 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + k \times 2^k = (k-1)2^{k+1} + 2)$$

فندثبت أن المقبرير $P(k+1)$ يعنى حادب

$$(\text{يعنى } 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + k \times 2^k + (k+1)2^{k+1} \stackrel{?}{=} k \times 2^{k+2} + 2)$$

(1)

$$\underbrace{1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + k \times 2^k}_{(k-1)2^{k+1} + 2} + (k+1)2^{k+1} =$$

$$(k-1)2^{k+1} + 2 + (k+1)2^{k+1} =$$

$$(k-1+k+1)2^{k+1} + 2 = 2k \cdot 2^{k+1} + 2$$

$$= k \times 2^{k+2} + 2$$

إذن $P(k+1) \Leftarrow \text{حادب}$.

وننتج من خلال المبدأ الأول للاستقراء الرياضي أن لكل $n \geq 1$ ، $P(n)$ حادب

$$\text{يعنى لدينا } 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + n \times 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2 \quad \text{لكل } n \geq 1.$$

الجزء الثاني (9 درجات)

- (1) أوجد أصغر علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ وتحتوي على الأزواج التالية :
(3 درجات) $(1, 2); (2, 3)$.

$$R = \{ (1, 2); (2, 3); (1, 1); (2, 2); (3, 3); (2, 1); (3, 2); (1, 3); (3, 1) \} = A \times A$$

(3)

هي أصغر علاقة تكافؤ على $A = \{1, 2, 3\}$

و تحتوي على $\{(1, 2); (2, 3)\}$

طريقة ثمانية $R_1 = \{(1, 2); (2, 3)\}$: $R = \mathcal{C}(\mathcal{C}(R_1))$

م العلاقات الانعكاسي ، م العلاقات المتناظري ، م العلاقات متعدي .

- (2) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ بالقاعدة :

$$m R n \text{ إذا وفقط إذا كان } \frac{m}{n} \text{ هو عدد فردي.}$$

(3 درجات)

(i) أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي.

R انعكاسي على $\mathbb{Z}^+$ لأن عندما نأخذ $m \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{فإن } 1 = \frac{m}{m} \text{ وهو عدد فردي. إذن } m R m. \quad (1)$$

R مخالفة على $\mathbb{Z}^+$ لأن عندما نأخذ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ونفترض أن

$$m R n \text{ و } n R m \text{ فإن لدينا}$$

$$\frac{m}{n} = k \text{ عدد فردي موجب. كذلك } \frac{n}{m} = k' \text{ وهو عدد فردي موجب.} \quad (1)$$

$$1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = k k' \quad \text{هذا يؤدي } k = k' = 1$$

$$\text{إذن } m = n$$

R متعدية على $\mathbb{Z}^+$ لأن عندما نأخذ $m, n, p \in \mathbb{Z}^+$ ونفترض أن

$$m R n \text{ و } n R p \text{ فإن لدينا } \frac{m}{n} = k \text{ (عدد فردي) و } \frac{n}{p} = k' \text{ (عدد فردي)}$$

$$\left(\text{ضرب عددين فرديين هو عدد فردي} \right) \quad \frac{m}{p} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p} = k k' = L$$

$$\text{إذن } m R p$$

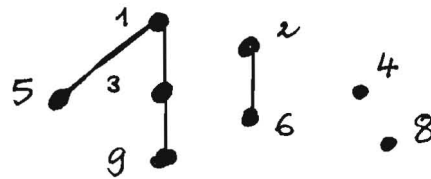
(ii) بيّن فيما إذا كانت R علاقة ترتيب كلي أم لا ؟ علل إجابتك. (درجة)

R ليست علاقة ترتيب كلي لأن عندما نأخذ $m=2$ و $n=4$ (0,2)

فإن $m \not R n$ و $n \not R m$ (0,3)
 $(2 \not R 4)$ $(4 \not R 2)$

(iii) باقتصار R على المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ، جد شكل هاس . (درجتان)

$$R|_A = \{ (1,1), (2,2), \rightarrow (9,9); (3,1); (5,1); (9,1); (6,2); (9,3) \}$$



شكل هاس .

الجزء الثالث (7 درجات)

لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو المقابل :

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	1
xy'	0	1	1	0
$x'y'$	0	1	1	0
$x'y$	0	0	1	0

(i) أوجد شكل MSP للدالة f . (درجتان)

$$MSP(f) = xy + z'w' + y'w' \quad (2)$$

(درجتان)

(ii) أوجد شكل MPS للدالة f .

$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

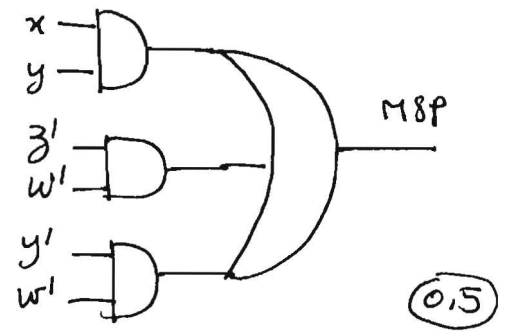
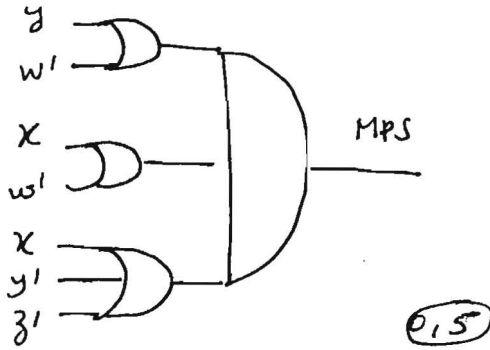
$$MSP(f') = y'w + x'w + x'y'z$$

$$MPS(f) = (y+w') \cdot (x+w') \cdot (x+y'+z')$$

(2)

(درجة ونصف)

(iii) صمم شبكة عطف و فصل أصغرية مخرجها الدالة f .



كلاهما 3 حصوي على 4 بوابات عطف وفصل لثنى كلاهما

تعتبر شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها f .

(0.5)

(درجة ونصف)

(iv) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط.

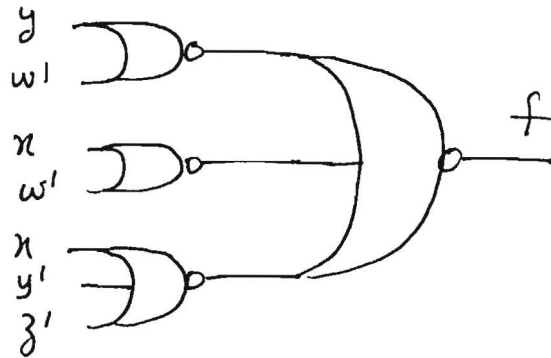
$$MPS(f) = (y+w') (x+w') (x+y'+z')$$

$$= \left[\left((y+w') (x+w') (x+y'+z') \right)' \right]'$$

$$= \left[(y+w')' + (x+w')' + (x+y'+z')' \right]'$$

(1)

(0.5)



- شبكة نفي فصل -

الجزء الرابع (14 درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

(1) إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه 56 وكان عدد أضلاع $\bar{G}$ هو 80 فاحسب n .

(3 درجات)

$$G \cup \bar{G} = K_n \quad \text{لأن}$$

①

$$|E(G)| + |E(\bar{G})| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$56 + 80 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$136 = \frac{n(n-1)}{2}$$

①

$$272 = n(n-1) \Leftrightarrow n^2 - n - 272 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \times 272 \quad \text{المميز}$$

$$= 1089 = (33)^2$$

①

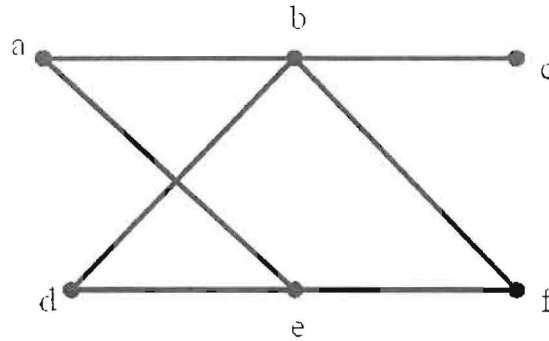
$$\boxed{n = 17} \quad \text{لأن}$$

$$n_1 = \frac{1+33}{2} = 17 > 0$$

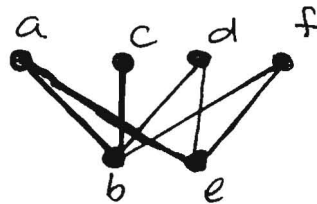
$$n_2 < 0$$

(3 درجات)

(2) بين فيما إذا كان الرسم H التالي ثنائي التجزئة أم لا ؟ علل إجابتك ؟

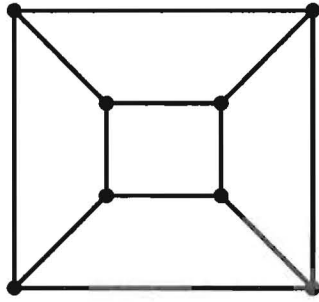


نعم H هو ثنائي التجزئة لأن جميع "سوراته" زوجية.

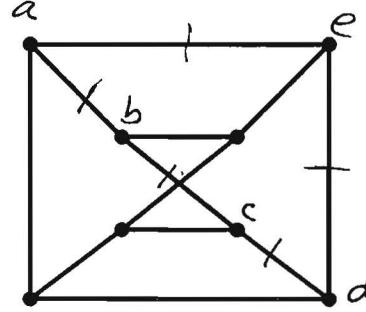


و متماثل للرسم :

(3) بين فيما إذا كان الرسمان G و H متماثلين أم لا ؟ علل إجابتك ؟ (3 درجات)



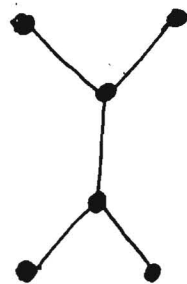
G



H

① G و H ليس متماثلين $G \not\cong H$
 لأن جميع دورات G هي زوجية لنز H يحتوي
 على دورة فردية طولها 5 : $a b c d e a$.
 ②

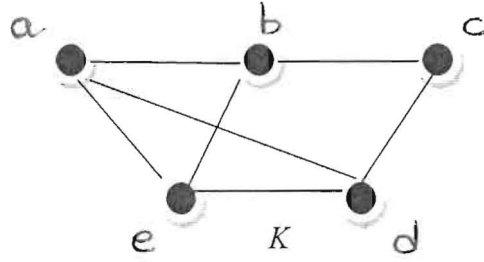
(4) هل يوجد شجرة متتالية درجات رؤوسها 3, 3, 1, 1, 1, 1 ؟ علل إجابتك ؟ (درجتان)



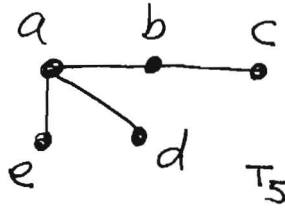
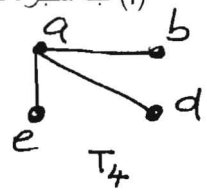
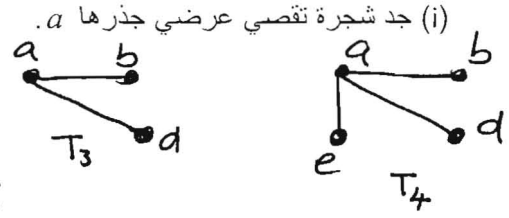
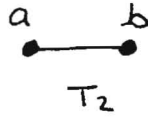
نعم ، خذ الشجرة التالية :

②

(5) ليكن K هو الرسم المبين أدناه



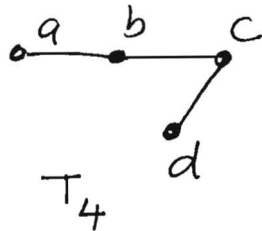
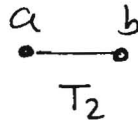
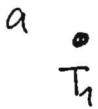
(درجة ونصف)



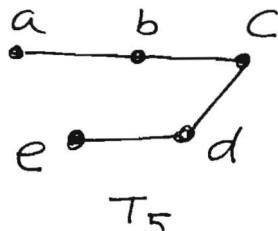
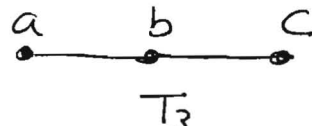
شجرة تقصي عرضي جذرها a

(1,5)

(درجة ونصف)



(ii) جد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها a .



شجرة تقصي عمقي
جذرها a

(1,5)