

السؤال الاول

أ- بين فيما إذا كانت العبارة $(p \wedge q) \rightarrow [r \rightarrow (p \vee q)]$ مصدوقة أم لا. (3 درجات)

$$\begin{aligned} (1) \quad & (p \wedge q) \rightarrow [r \rightarrow (p \vee q)] \equiv \neg(p \wedge q) \vee [\neg r \vee (p \vee q)] \\ & \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee [\neg r \vee (p \vee q)] \\ (1) \quad & \equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \vee \neg r \\ (1) \quad & \equiv T \vee T \vee \neg r \equiv T \vee \neg r \equiv T \end{aligned}$$

فهي إذن مصدوقة

ب- دون استخدام الجدول، أثبت أن $(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv (p \vee q)$. (درجتان)

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \rightarrow q \\ (1) \quad & \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee q \\ (1) \quad & \equiv (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee q \equiv (p \wedge \neg q) \vee q \\ & \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge T \equiv (p \vee q). \end{aligned}$$

السؤال الثاني

أ- أثبت أن 4 يقسم $5^n + 3$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$. (4 درجات)

نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي: دافع

$$P(n): 4 \mid 5^n + 3 \quad \text{نخطوكم الأساس: } n=0 \quad ; \quad 5^0 = 1 \quad ; \quad 4 \mid 5^0 + 3 = 4 \quad \text{لذا } P(0) \text{ صادق}$$

خطوكم الاستقراء، نأخذ $k \geq 0$. نفترض أن $P(k)$ صادق (يعني لدينا

$$\begin{aligned} (1) \quad & 4 \mid 5^k + 3 \quad (\Rightarrow \text{يوجد عدد صحيح } c \text{ بحيث } 5^k + 3 = 4c) \\ & \text{ولنثبت أن } P(k+1) \text{ يثبتى صادق } (4 \mid 5^{k+1} + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 3 &= 5 \cdot 5^k + 3 \\ &= (4+1) 5^k + 3 \end{aligned}$$

$$= 4 \cdot 5^k + 5^k + 3$$

$$= 4 \cdot 5^k + 4c = 4(5^k + c) = 4m$$

حيث $m = 5^k + c$ وهو عدد صحيح.

ب- باستخدام المكافئ العكسي، أثبت أنه إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 1$ فإن $ab \neq a$. (درجتان)

$$p: a \neq 0 \wedge b \neq 1$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$q: ab \neq a$$

نفترض أن $ab = a$ ولنثبت أن $a = 0$ أو $b = 1$. (1)

$$ab = a \Leftrightarrow ab - a = 0 \Leftrightarrow a(b - 1) = 0 \text{ إذن}$$

$$a = 0 \text{ أو } b = 1. \quad (1)$$

السؤال الثالث

أ- لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:
 $m + n \Leftrightarrow m R n$ عدد زوجي.

1. أثبت أن R علاقة تكافؤ. (3 درجات)

• R انعكاسي على Z لأن عندما نأخذ $m \in Z$ فإن

$$m + m = 2m \text{ وهو عدد زوجي إذن } m R m. \quad (1)$$

• R تناقلي على Z لأن عندما نأخذ $n, m \in Z$ بحيث

$$m R n \text{ فإن } m + n \text{ هو عدد زوجي. أيضا } n + m \text{ هو عدد زوجي} \quad (1)$$

يعني $n R m$.

• R متعددي على Z لأن عندما نأخذ $m, n, p \in Z$ ونفترض

$$\text{أن } m R n \text{ و } n R p \text{ فإن } m + n = 2k \text{ وهو عدد زوجي}$$

$$\text{كذلك } n + p = 2l \text{ وهو عدد زوجي}$$

$$\text{بجمع (1) و (2): } m + n + n + p = 2k + 2l$$

$$m + p = 2k + 2l - 2n$$

$$= 2(k + l - n)$$

$$= 2c$$

$$\text{إذن } (m + p) \text{ هو زوجي}$$

$$\text{إذن } m R p$$

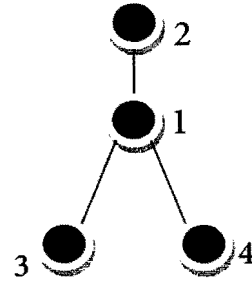
2. بين فيما إذا كان $-4 \in [11]$. (درجة واحدة)

$$[11] = \{ m \in Z / m R 11 \}$$

$$-4 + 11 = 7 \text{ وهو عدد فردي يعني } -4 \not R 11$$

$$\text{إذن } -4 \notin [11]$$

ب- لتكن S علاقة ترتيب جزئي على المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ ممثلة بشكل هاس



1. اكتب S كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

② $S = \{ (4,1); (2,2); (3,3); (4,4); (3,1); (1,2); (4,1); (3,2); (4,2) \}$

2. هل S علاقة ترتيب كلي؟ (علّل). (درجة واحدة)

S ليست علاقة ترتيب كلي لأنها لا تلتصق بخاصية المقارنة

① $3 \not\leq 4$ و $4 \not\leq 3$.

السؤال الرابع

أ- إذا كان B جبراً بولياً، فأثبت أن $x + y = xy + xy' + x'y$ لكل $x, y \in B$. (درجتان)

$$xy + xy' + x'y = x(y + y') + x'y$$

$$= x \cdot 1 + x'y$$

$$= x + x'y = (x + x') \cdot (x + y)$$

$$= 1(x + y) = x + y$$

ب- لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	1
xy'	1	0	0	0
$x'y'$	1	0	0	0
$x'y$	1	0	1	1

1. اكتب f على شكل CSP. (درجة واحدة)

$$CSP(f) = xyzw + xyzw' + xyz'w' + xyz'w + xy'zw + xy'zw' + x'y'zw + x'y'zw' + x'y'zw' + x'y'zw'$$

①

2. اكتب f على شكل MSP. (درجتان)

$$MSP(f) = xy + zw + yz'$$

②

3. اكتب f على شكل MPS. (درجتان)

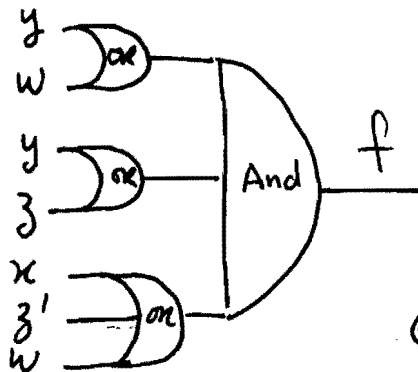
$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

$$MSP(f') = y'w' + y'z' + x'zw'$$

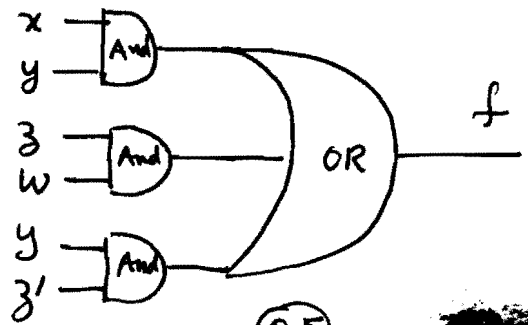
$$MPS(f) = (y+w) \cdot (y+z) \cdot (x+z'+w)$$

②

4. صمم شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها $f(x, y, z, w)$. (درجة واحدة)



②,5



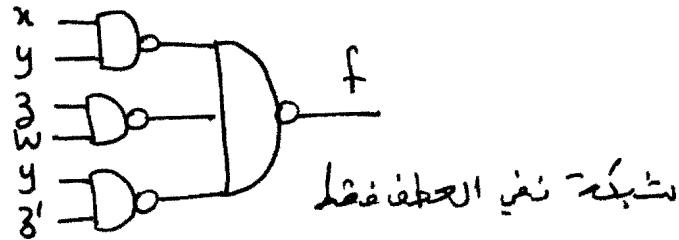
②,5

كلاهما 3 حوى على 4 بوابات. إذن كلاهما 3 حوى 4 بوابات عطف وفصل أصغرية مخرجها f .

5. صمم شبكة مخرجها $f(x, y, z, w)$ باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)

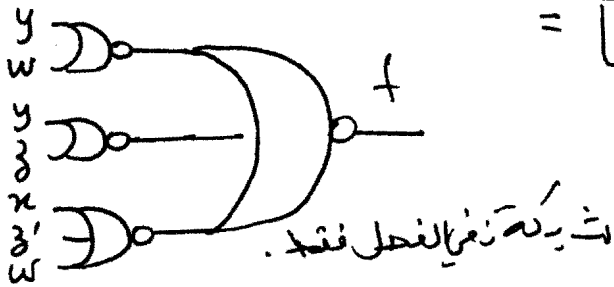
$$\begin{aligned} \text{MSP}(f) &= xy + zw + yz' \\ &= [(xy + zw + yz')']' = [(xy)' \cdot (zw)' \cdot (yz')']' \end{aligned}$$

①



6. صمم شبكة مخرجها $f(x, y, z, w)$ باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

$$\begin{aligned} \text{MPS}(f) &= (y + w)(y + z)(x + z' + w) \\ &= [(y + w)(y + z)(x + z' + w)]' \\ &= [(y + w)' + (y + z)' + (x + z' + w)']' \end{aligned}$$



①

السؤال الخامس

أ- ليكن G رسماً درجات رؤوسه هي 1, 2, 2, 2, 3. أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم $\bar{G}$

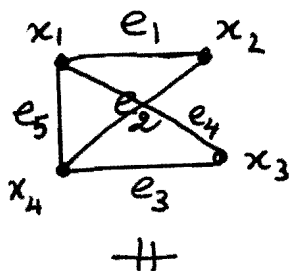
لرسم G . (درجتان) $G \cup \bar{G} = K_5$ هو رسم تام

$$\begin{aligned} |E| + |\bar{E}| &= \frac{5 \times 4}{2} = 10 & G &= (V, E) \\ 1 + 2 + 2 + 2 + 3 &= 10 = 2|E| & \bar{G} &= (V, \bar{E}) \\ |E| &= 5 \quad \text{فإن} \end{aligned}$$

ونستج أن عدد أضلاع $\bar{G}$ هو 5.

②

ب- مثل الرسم H ذا مصفوفة الوقوع



①

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
x_1	1	0	0	1	1
x_2	1	1	0	0	0
x_3	0	0	1	1	0
x_4	0	1	1	0	1

ثم بيّن فيما إذا كان هذا الرسم منتظماً. (درجتان)

هذا الرسم منتظم لأن درجات رؤوسه متساوية.

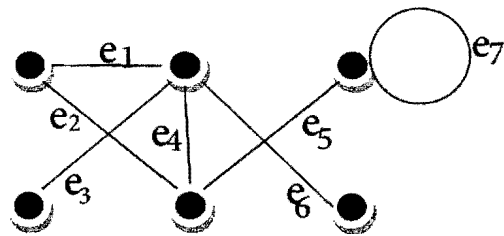
①

ج- بين فيما إذا كان الرسم التام K_{100} يماثل الرسم ثنائي التجزئة التام $K_{50,50}$. (علل إجابتك). (درجة)

K_{100} و $K_{50,50}$ ليس متماثلين

لأن عدد أحلاع K_{100} هو $\frac{100 \times 99}{2}$ و عدد أحلاع $K_{50,50}$ هو $50 \times 50 = 2500$

د- أوجد جسر الرسم. (درجة)



①

الجسور هم e_3, e_5, e_6 .

السؤال السادس

أ- إذا كانت T شجرة درجات رؤوسها هي $1, 1, 1, 1, 3, d$. فأوجد قيمة d . (درجتان)

$$1 + 1 + 1 + 1 + 3 + d = 2|E(T)|$$

بما أن T شجرة ذات 6 رؤوس فإن عدد أحلاعها هو 5

①

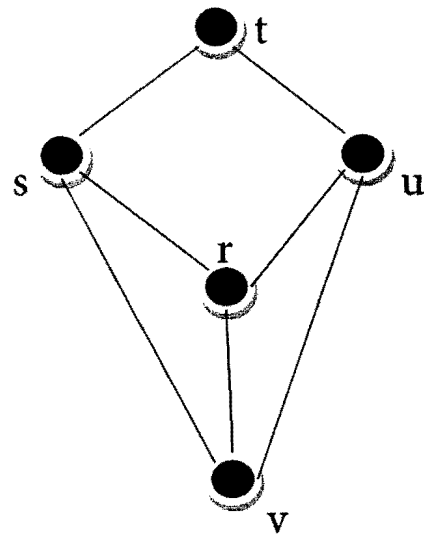
$$|E(T)| = 5$$

$$7 + d = 2 \times 5 = 10$$

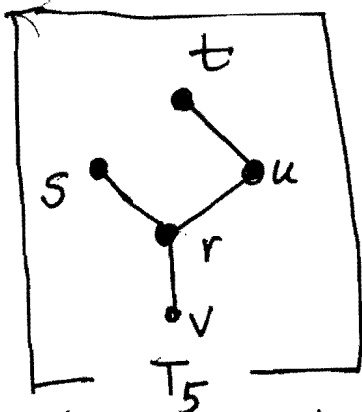
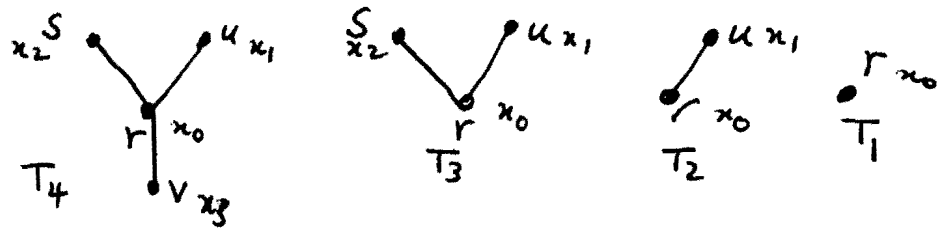
①

$$d = 3$$

ب- للرسم



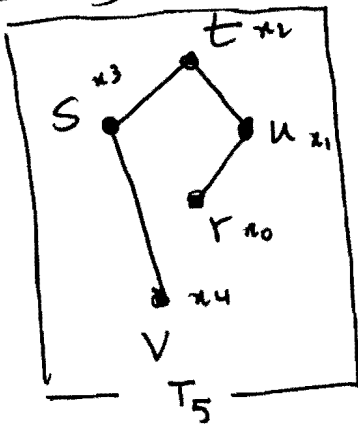
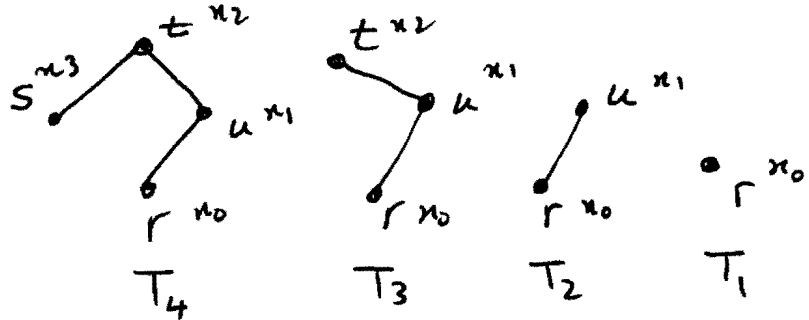
1- جد شجرة تقصي عرضي جذرها الرأس r . (درجتان)



شجرة تقصي عرضي
جذرها الرأس r

(2)

2- جد شجرة تقصي عمقي جذرها الرأس r . (درجتان)



شجرة تقصي عمقي جذرها
الرأس r

(2)