

د. برهان

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
اسم المدرس	

س١: (أ) اثبت أن $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg r) \equiv p \rightarrow (r \rightarrow q)$ (درجتان)

طريقة ثانية

P	q	r	$\neg r$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow \neg r$	$r \rightarrow q$	$p \rightarrow (r \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg r)$
T	T	T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

$$\begin{aligned}
 p \rightarrow (r \rightarrow q) &= \neg p \vee (r \rightarrow q) \\
 &= \neg p \vee (\neg r \vee q) \\
 &\equiv \neg p \vee q \vee \neg r \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee q \vee \neg r \\
 &\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee \neg r) \\
 &\equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg r)
 \end{aligned}$$

٢

إذا $p \rightarrow (r \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg r)$

(ب) باستخدام الإستقراء الرياضي، أثبت أن $n^2 - 3n \geq 10$ لكل عدد صحيح $n \geq 5$. (ثلاث درجات)

نضع $P(n): "n^2 - 3n \geq 10"$

١ * خطوة الأساس: $n = 5$ ، $25 - 15 = 10 \geq 10$ إذن $P(5)$ حائب

* خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 5$ نفرض أن $P(k)$ حائب
(يعني لدينا $k^2 - 3k \geq 10$) فندرس أن $P(k+1)$ يبقى حائب.

$$(k+1)^2 - 3(k+1) = k^2 + 2k + 1 - 3k - 3$$

$$= k^2 - 3k + 2(k-1)$$

$$k \geq 5$$

$$\geq 10 + 2(k-1) \geq 10$$

فنتبع أن لكل $n \geq 5$ ، $n^2 - 3n \geq 10$

س٢: (أ) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة كمايلي:

$$mRn \Leftrightarrow m+n \geq 2$$

بين فيما إذا كانت R انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية. (أربع درجات)

① * R ليست انعكاسية على $\mathbb{Z}$ لأن $0 \not R 0$ (لا تحتوي على العلامة العكس)

① * R تناظرية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $m, n \in \mathbb{Z}$ بحيث mRn

فإن $m+n \geq 2$ هذا يؤدي إلى أن $n+m \geq 2$ لأن nRm .

① * R ليست خالتيه لأن $3R2$ و $2R3$ لكن $2 \neq 3$.

① * R ليست متعدية على $\mathbb{Z}$ لأن $0R3$ و $3R1$ لكن $0 \not R 1$.

(ب) لتكن S علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ كمايلي:

$$aSb \Leftrightarrow 2a+b \text{ يقسم } 3$$

(i) أوجد فصلي التكافؤ $[0]$ و $[1]$. (درجتان)

$$[a] = \{ b \in A / aSb \}$$

$$[0] = \{ b \in A / 0Sb \} = \{ b \in A / 3|b \}$$

① $[0] = \{0, 3\}$

$$[1] = \{ b \in A / 1Sb \} = \{ b \in A / 3|2+b \}$$

① $[1] = \{1, 4\}$

(ii) كم عدد فصول التكافؤ للعلاقة S ؟ علّل إجابتك. (درجة)

عدد فصول التكافؤ للعلاقة S هو 3 :

$$[0] = [3] = \{0, 3\}$$

① $[1] = [4] = \{1, 4\}$

$$[2] = \{2\}.$$

س٣: لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	0	1	1
xy'	1	0	0	1
$x'y'$	0	0	0	0
$x'y$	1	1	0	0

(i) اكتب f على شكل CSP. (درجة)

①

$$CSP(f) = xyzw + xyz'w' + xy'zw + xy'z'w + x'yzw + x'y'zw'$$

(ii) اكتب f على شكل MSP. (درجتان)

②

$$MSP(f) = xw + xyz' + x'y'z$$

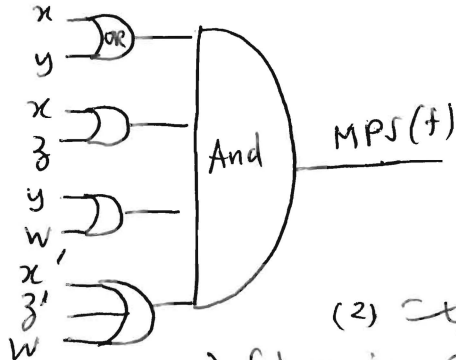
(iii) اكتب f على شكل MPS. (درجتان)

$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

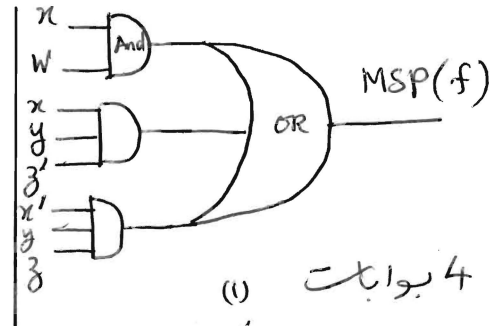
$$MSP(f') = x'y' + x'z' + y'w' + xzw'$$

$$MPS(f) = (x+y)(x+z)(y+w)(x'+z'+w')$$

(iv) صمم شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها الدالة f . (درجة)

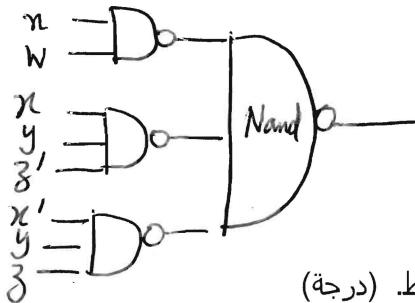


5 بوابات (2)

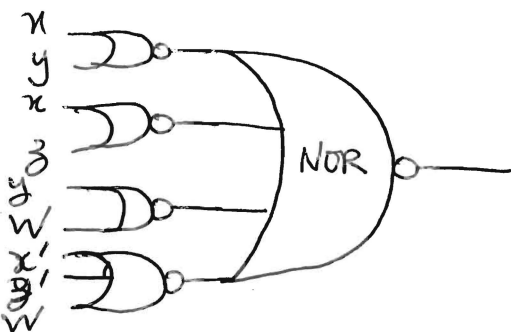


4 بوابات (1)

الرسم (v) هو شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها f (تحتوي على 9 بوابات غير بوابات x)
(v) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)



(vi) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)



$$MPS(f) = (x+y)(x+z)(y+w)(x'+z'+w')$$

$$= [(x+y)(x+z)(y+w)(x'+z'+w')]'$$

$$= [(xw)', (xyz')', (x'y'z)']'$$

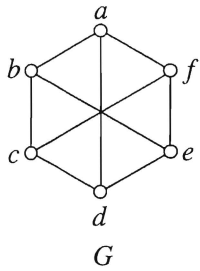
س٤ : (أ) كم عدد رؤوس الرسم التام الذي عدد أضلاعه 45 ؟ علل إجابتك. (درجتان)

K_n رسم تام ذات n رأس و عدد أضلاعه هو

$$n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45$$

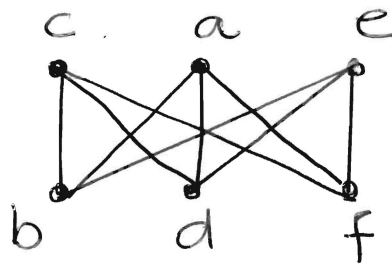
{ن: عدد رؤوس K_n هو 10} $n_1 = \frac{1-19}{2} \nexists$ $n_2 = \frac{1+19}{2} = 10$ $\Delta = \frac{1+4 \times 90}{2} = (19)^2$ (المميز)

(ب) بين فيما إذا كان الرسم G أدناه ثنائي التجزئة أم لا ، وإذا كان ثنائي التجزئة فأوجد تمثيلاً ثنائي التجزئة له. (درجتان)



* G لا يحصى على دورات فردية فهو ثنائي التجزئة.

(1)



(1)

$$G \cong K_{3,3}$$

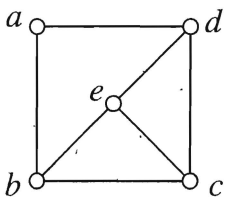
(ج) جد مع التعليل عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{10,14}$. (درجتان)

$(K_{10,14} \cup \overline{K_{10,14}})$ هو رسم تام ذات 24 رأس فان عدد أضلاعه

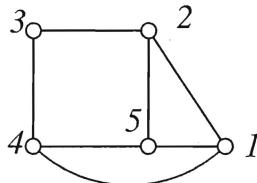
يساوي $276 = 12 \times 23 = \frac{24 \times 23}{2}$ (2)

و بما أن $K_{10,14}$ له 140 ضلع فان متمم $K_{10,14}$ له 136 ضلع

(د) بين فيما إذا كان الرسمان H, K أدناه متماثلين. (درجتان)



H



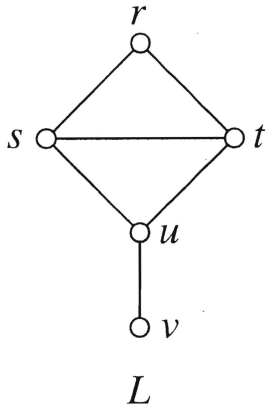
K

$$H \cong K$$

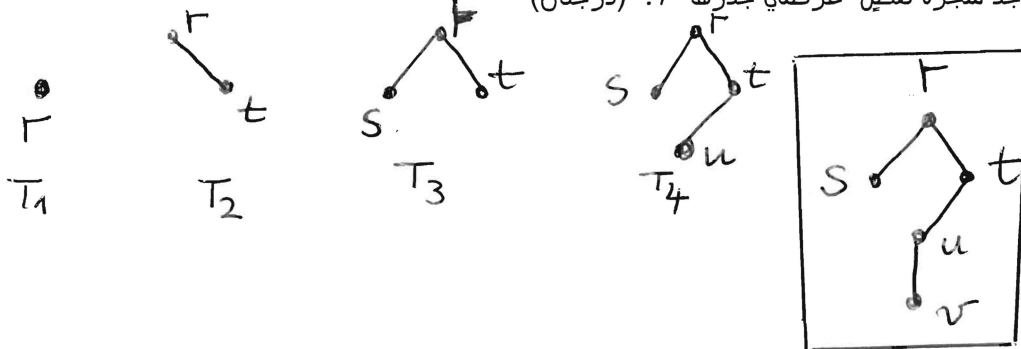
لأنه يوجد تطابق تماثلي f:

(2)

$x \in V(H)$	a	b	c	d	e
$f(x) \in V(K)$	3	4	5	2	1

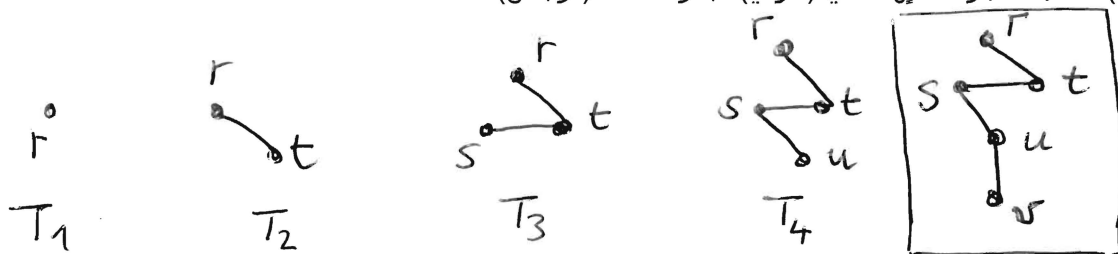


(i) جد شجرة تقصي عرضي جذرها r . (درجتان)



(2)

(ii) شجرة تقصي عمقي جذرها r . (درجتان)
جد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها r . (درجتان)



(2)

شجرة تقصي عمقي جذرها r

(ب) جد، مع التعليل، عدد رؤوس الشجرة التي فيها درجة أحد الرؤوس 31 ودرجة كل رأس آخر 1. (درجتان)

T_n شجرة ذات n رأس. فإن عدد أحلافها

تساوي $(n-1)$.

$$\sum_{x \in T_n} \deg x = 2|T_n| \quad \text{بما أن}$$

$$31 + (n-1) \times 1 = 2(n-1)$$

$$31 = n-1$$

$$n = 32 \quad \text{فإن}$$

(2)

س6: بين صحة أو خطأ كل واحدة من العبارات التالية مع التعليل (درجة لكل عبارة)

(i) يوجد رسم ثنائي التجزئة عدد رؤوسه 6 وعدد أضلاعه 10.

لا يوجد رسم ثنائي التجزئة عدد رؤوسه 6 وعدد أضلاعه 10. $|E| > \frac{n^2}{4}$ و n رؤوسه $G=(V,E)$ رسم ثنائي التجزئة عدد رؤوسه 6. $10 > \frac{6^2}{4} = 9$

①

(ii) لا يوجد رسم (بسيط) متتالية درجات رؤوسه 1,1,1,2,2,3,5.

نعم! $\sum_{x \in V(G)} \deg x = 1+1+1+2+2+3+5 = 15$

①

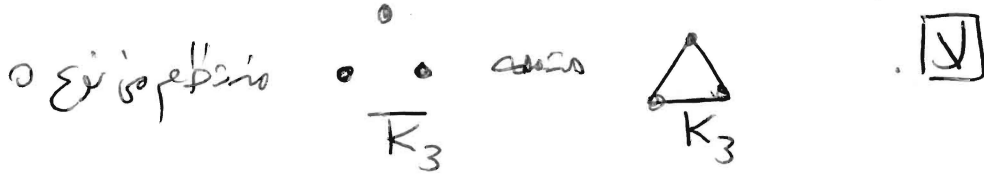
و هو عدد فردي لا يكون مضاعف لعدد صحيح.

(iii) يوجد رسم مترابط عدد رؤوسه 15 وعدد أضلاعه 12.

لا. ليكون رسم مترابط ≥ 15 رأس لابد على الأقل 14 ضلع.

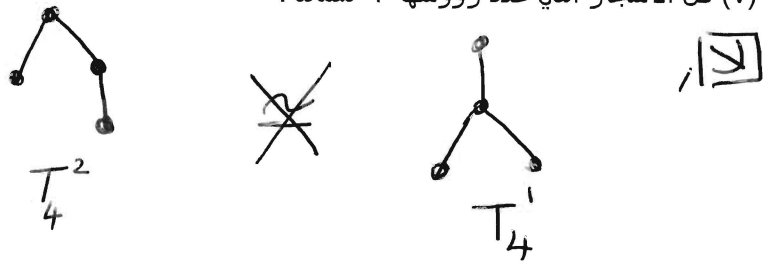
①

(iv) الرسم K_3 رسم ذاتي التتيم.



$K_3 \not\sim \overline{K_3}$ ليس متماثل لنفسه

(v) كل الأشجار التي عدد رؤوسها 4 متماثلة.



شجرتين ذات 4 رؤوس لكن غير متماثلتين

(vi) كل شجرة ذات رأسين أو أكثر هي رسم ثنائي التجزئة.

نعم! نعلم أن كل شجرة هي رسم مترابط لا تحتوي على دورات

لأن لا يوجد دورات فريضة فليكن ثنائي التجزئة: ①