جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر 151 ريض	الفصل الصيفي 1433/1432 هـ الزمن: ثلاث ساعات
الاسم:	الرقم:	رقم الشعبة:

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
رمز الجواب	أ	ج	د	ج	د	ب	أ	ج	د	ب	ب	ب

الجزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة (درجتان لكل سؤال).

(1) العبارة $\neg(p\to q)\to p$ **هي :**

أ) مصدوقة ب) تناقض ج) مخلوطة د) لا شيء مما ذكر.

(2) العبارة $(p\wedge q)\to r$ **متكافئة منطقيا لـ:**

أ) $(p\vee\neg q)\to r$ ب) $(p\wedge\neg r)\to q$ ج) $(p\wedge\neg r)\to\neg q$ د) $\neg(p\to r)\wedge q$

(3) المكافئ العكسي للعبارة التالية " إذا كان $a+b=0$ **و** $a>0$ **فإن** $b<0$ **" هي:**

أ) إذا كان $a+b\neq 0$ و $a\le 0$ فإن $b\ge 0$ ب) إذا كان $b\ge 0$ فإن $a+b\neq 0$ و $a\le 0$

ج) إذا كان $b<0$ فإن $a+b\neq 0$ أو $a\le 0$ د) إذا كان $b\ge 0$ فإن $a+b\neq 0$ أو $a\le 0$.

(4) إذا كانت R **علاقة تكافؤ على** $A=\{a,b,c,d\}$ **بحيث فصول التكافؤ هي :** $\{\{a,d\},\{b\},\{c\}$ **, فإن** R **هي:**

أ) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ ب) $\{(a,d),(d,a),(b,b),(c,c)\}$

ج) $\{(a,a),(a,d),(b,b),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ د) $A\times A$.

(5) إذا كانت R **علاقة تكافؤ على** $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعرفة بالقاعدة:**

$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow$ **عدد زوجي و** $(b+d)$ **عدد زوجي** **فإن** $\left|A/R\right|$ **يساوي:**

أ) 2 ب) ∞ ج) 6 د) 4.

(6) الإغلاق المتعدي للعلاقة $T=\{(1,1),(1,2),(3,1)\}$ **المعرفة على المجموعة** $A=\{1,2,3\}$ **يساوي:**

أ) T ب) T^2 ج) $A\times A$ د) لا شيء مما ذكر.

(7) إذا كان B **جبر بولي و** $x,y\in B$ **بحيث** $xy=y$ **فإن :**

أ) $x+y=x$ ب) $x+y=y$ ج) $x=1$ د) لا شيء مما ذكر.

(8) الشكل CSP **للدالة البولية** $f(x,y,z)=(xy+z)(xz+y')$ **هو:**

أ) $xyz + xy\acute{z} + y\acute{z}$ ب) $xyz + xy\acute{z} + x\acute{y}z + x\acute{y}\acute{z}$

ج) $xyz + xy\acute{z} + x\acute{y}\acute{z}$ د) $xy\acute{z} + x\acute{y}\acute{z} + x\acute{y}\acute{z}'$.

(9) إذا كانت $g(x,y,z) = xy\acute{z}' + x\acute{y} + yz + y\acute{z}$ دالة بولية, فإن $MSP(g)$ هو :

أ) $xy' + x\acute{y} + yz + y\acute{z}$ ب) $xy' + xz + x\acute{y} + x\acute{z}$

ج) $xy' + x\acute{y} + y'$ د) $xy' + x\acute{y} + z$.

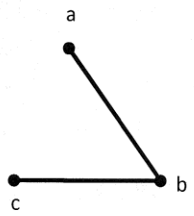
(10) ليكن G رسما منتظم من نوع 3 عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 15 فإن n يساوي :

أ) 5 ب) 10 ج) 30 د) 45.

(11) ليكن G رسما بسيطا عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه 56 و عدد أضلاع متمم G يساوي 80 فإن n يساوي :

أ) 16 ب) 17 ج) 18 د) لا شيء مما ذكر.

(12) عدد المسارات المختلفة من a إلى b طولها 3 للرسم التالي هو:



أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4.

الجزء الثاني : أجب عن الأسئلة التالية:

(1) أثبت أن $\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\frac{2^2}{4\times2^2-1}+\frac{3^2}{4\times3^2-1}+\ldots+\frac{n^2}{(4n^2-1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ لكل $n\geq 1$ ($n\in\mathbb{N}$). **(4 درجات)**

نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي :

نضع $P(n)$: " $\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\cdots+\frac{n^2}{(4n^2-1)}=\frac{n(n+2)}{2(2n+1)}$ "

• الخطوة الأساسية: $n=1$; $\frac{1^2}{4\times1^2-1}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}=\frac{2}{2\times3}$ إذن $P(1)$ صائب .

• خطوة الاستقراء : ناخذ $k\geq 1$ نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني $\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\cdots+\frac{k^2}{4k^2-1}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$)

ونثبت أن $P(k+1)$ يبقى صائب .

$$\frac{1^2}{(4\times1^2-1)}+\frac{2^2}{(4\times2^2-1)}+\cdots+\frac{k^2}{(4k^2-1)}+\frac{(k+1)^2}{(4(k+1)^2-1)}\stackrel{?}{=}\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\frac{2^2}{4\times2^2-1}+\cdots+\frac{k^2}{(4k^2-1)}+\frac{(k+1)^2}{(4(k+1)^2-1)}=$$

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2-1}=\frac{(k+1)}{2}\left[\frac{k}{2k+1}+\frac{(k+1)}{2(k+1)^2-1/2}\right]$$

$$=\frac{(k+1)}{2}\left[\frac{k}{2k+1}+\frac{k+1}{2k^2+4k+3/2}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{k+1}\frac{n^2}{4n^2-1}=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\frac{k}{2k+1}+\frac{2k+2}{4k^2+8k+3}\right]=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\frac{k}{(2k+1)}+\frac{2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\right]=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{2k^2+5k+2}{(2k+1)(2k+3)}\right)=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{(2k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)}\right)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

إذن $P(k+1)$ هو خطوة صائب.

(2) أثبت أن $\sqrt{7}$ عدد غير كسري. **(3 درجات)**

نستخدم طريقة البرهان بالتناقض

نفترض أن $\sqrt{7}$ هو عدد كسري إذن يوجد $a,b\in\mathbb{N}$, $b\neq0$ (1)

بحيث $\sqrt{7}=\frac{a}{b}$ و $gcd(a,b)=1$

بما أن $\sqrt{7}=\frac{a}{b}$ فإن $\frac{a^2}{b^2}=7$ يعني $a^2=7b^2$ إذن

$7\mid a^2 \Leftarrow 7\mid a$ (1) يعني يوجد $c\in\mathbb{N}$ بحيث $a=7c$

بالتعويض في (2) $49c^2=7b^2 \Leftrightarrow b^2=7c^2$ فإن $7\mid b^2$ (1)

هذا يؤدي إلى أن $7\mid b$ و (1) و (2) $\Leftarrow gcd(a,b)\geq7$ ↯ (1)

ولهذا تناقض مع $gcd(a,b)=1$. نستنتج أن $\sqrt{7}$ هو عدد غير كسري.

(3) إذا كانت R علاقة معرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ كالتالي: $a\,R\,b \Leftrightarrow a\mid b$.

(5 درجات)

أ) أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي. يكفي أن نثبت أن R انعكاسية، تخالفية ومتعدية على $\mathbb{N}$.

• R انعكاسية على $\mathbb{N}$. بما أن لكل $a\in\mathbb{N}$, $a\mid a$ فإن aRa. (1)

• R تخالفية على $\mathbb{N}$. ليكن $a,b\in\mathbb{N}$ نفترض أن $a\mid b$ و $b\mid a$

فلنثبت أن $a=b$.

بما أن $b\mid a$ فإن يوجد $k\in\mathbb{N}$ بحيث $b=ak$ (1) (1)

كذلك $a\mid b$ فإن يوجد $k'\in\mathbb{N}$ بحيث $a=bk'$ (2)

بالتعويض قيمة b في (2) نحصل $a=akk'$ $\Leftrightarrow a(1-kk')=0$

بما أن $a\neq0$ فإن $kk'=1$ و بما أن $k,k'\in\mathbb{N}$ فإن $k=k'=1$

نستنتج من كل (1) و (2) أن $a=b$

لنثبت aRb و bRC نفترض أن R متعدية على ℕ . أن aRC .

بما أن aRb إذن $a|b$ يعني يوجد $k\in\mathbb{N}$ بحيث $b=ka$ (1)
كذلك bRC إذن $b|c$ يعني يوجد $k'\in\mathbb{N}$ بحيث $c=k'b$
هذا يؤدي إلى $c=k'a$ حيث $m=kk'\in\mathbb{N}$ يعني $a|c$ يعني aRC

ب) هل R علاقة ترتيب كلي ؟ لماذا ؟

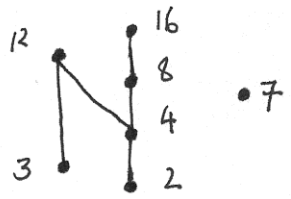
لا , لأن الخاصية المقارنة لم تتحقق .

(1) مثال $3R5$ لأن $3|5$
و $5R3$ لأن $5|3$.

ج) أوجد شكل هاس إذا كانت R معرفة فقط على المجموعة $A=\{2,3,4,7,8,12,16\}$.

بما أن $A\subset\mathbb{N}$ فإن (A,R) هي مجموعة مرتبة جزئيا .

(1)



شكل هاس.

(4) ليكن الشكل التالي هو شكل كارنو للدالة f: (7 درجات)

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	0	0	1	1
xy'	0	1	1	0
$x'y'$	0	0	1	1
$x'y$	0	0	1	1

(أ) جد $MSP(f)$. (2 درجتان)

(2) $MSP(f) = yz' + x'z' + xy'w'$

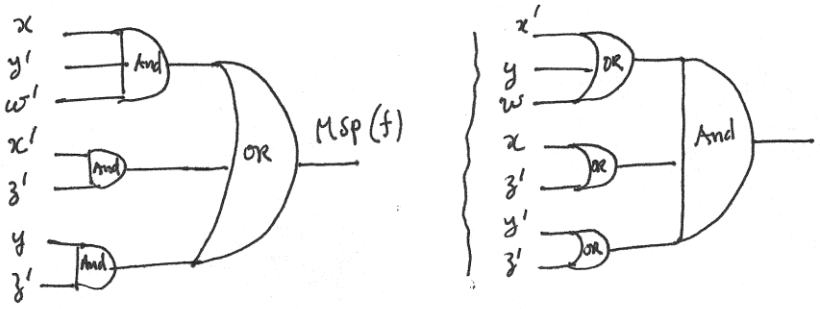
(ب) جد $MPS(f)$. (2 درجتان)

$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

$$MSP(f') = x'z + yz + xy'w$$

$$MPS(f) = (x+z').(y'+z').(x'+y+w')$$

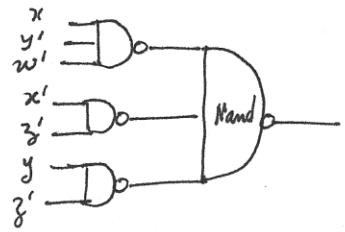
(ج) صمم دارة عطف و فصل أصغرية مخرجها f. (درجة واحدة)



كلّ من الدارتين تحتوي على نفس عدد البوابات وهي 4.
إذن كلّ من الدارتين تعتبر دارة عطف وفصل أصغرية مخرجها f

(د) صمم دارة مخرجها f مستخدما بوابات نفي العطف فقط. (درجة واحدة)

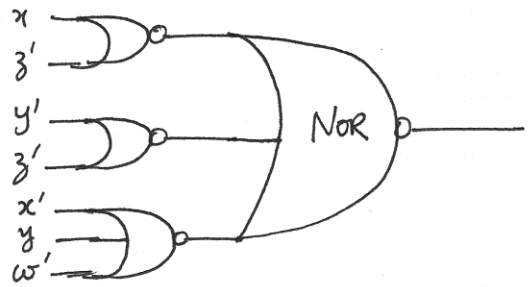
$$MSP(f) = xy'w' + x'z' + yz'$$
$$= [(xy'w' + x'z' + yz')']' = [(xy'w')'.(x'z')'.(yz')']'$$



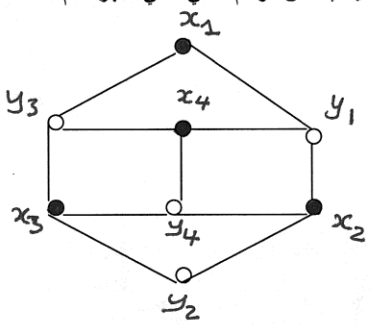
(ه) صمم دارة مخرجها f مستخدما بوابات نفي الفصل فقط. (درجة واحدة)

$$MPS(f) = (x+z')(y'+z')(x'+y+w')$$
$$= [((x+z').(y'+z').(x'+y+w')')']'$$
$$= [(x+z')' + (y'+z')' + (x'+y+w')']'$$

①

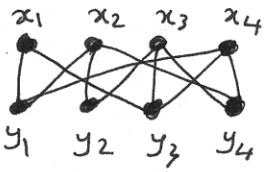


(5) بيّن فيما إذا كان الرسم التالي ثنائي التجزئة أم لا ؟ (درجتان)

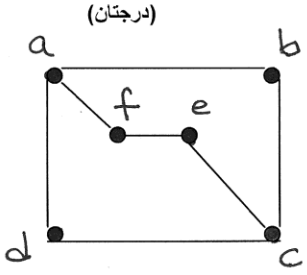


- بما أن الرسم لا يحتوي على دورات فردية فهو ثنائي التجزئة.

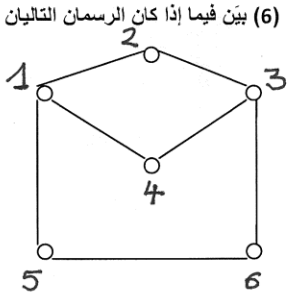
②



(6) بيّن فيما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا ؟ (درجتان)



G



H

• نعم G و H متماثلين لأنه يوجد تطبيق تقابلي f يحقق الخاصية: $e=\{x,y\}\in E(G)$ فإن $\{f(x),f(y)\}\in E(H)$.

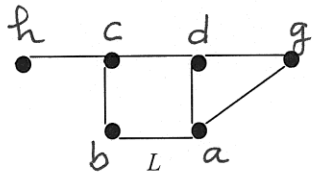
①

(1)

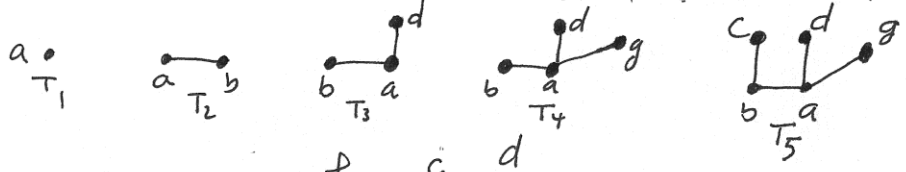
x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	1	2	3	4	6	5

$G \cong H$

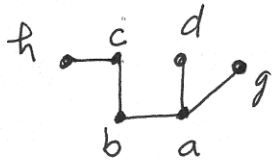
(7) ليكن L هو الرسم المقابل (3 درجات)



أ) أوجد شجرة تقصّ عرضي للرسم L جذرها a .

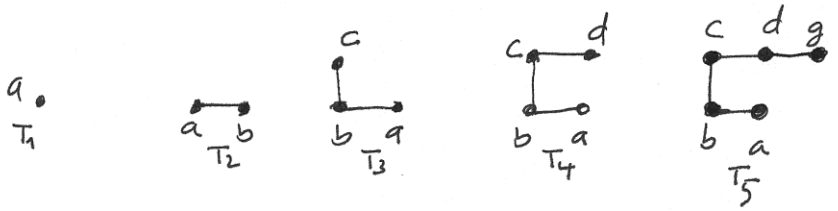


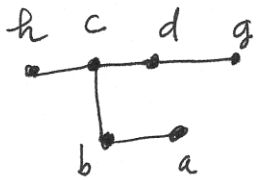
(1,5)



شجرة تقصي عرضي لـ L جذرها a .

ب) أوجد شجرة تقصّ عمقي للرسم L جذرها a .





شجرة تقصي عمقي للرسم L جذرها a .

(1,5)