



جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

111 رياض
حساب التكامل
مذكرة مبدئية
الفصل الأول 1438 – 1437

د طارق عبدالرحمن الفاضل
أستاذ مشارك بقسم الرياضيات
e – mail : alfadhel@ksu.edu.sa
url : <http://fac.ksu.edu.sa/alfadhel>

المحتويات

| | | |
|----|--|-----|
| 5 | التكامل المحدد | 1 |
| 5 | المجموع وخواصه | 1.1 |
| 7 | التكامل المحدد | 2.1 |
| 11 | خواص التكامل المحدد | 3.1 |
| 13 | التكامل غير المحدد | 2 |
| 13 | الدالة الأصلية | 1.2 |
| 14 | النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل | 2.2 |
| 16 | التكامل غير المحدد | 3.2 |
| 18 | التكامل بالتعويض | 4.2 |
| 21 | الدوال اللوغاريتمية والأسية | 3 |
| 21 | الدالة اللوغاريتمية الطبيعية | 1.3 |
| 26 | الدالة الأسية الطبيعية | 2.3 |
| 30 | الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة | 3.3 |
| 34 | تكامل الدوال المثلثية العكسية | 4.3 |
| 39 | الدوال الزائدية ومعكوساتها | 4 |
| 39 | الدوال الزائدية | 1.4 |
| 46 | الدوال الزائدية العكسية | 2.4 |
| 53 | طرائق التكامل | 5 |
| 53 | التكامل بالتجزئ | 1.5 |
| 57 | تكامل قوى الدوال المثلثية | 2.5 |
| 66 | التعويضات المثلثية | 3.5 |
| 71 | الكسور الجزئية | 4.5 |
| 76 | تعويضات متفرقة | 5.5 |
| 79 | صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة | 6 |
| 79 | صيغ عدم التعيين | 1.6 |
| 85 | التكاملات المعتلة | 2.6 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| المحتويات | | 4 |
| 91 | تطبيقات التكامل | 7 |
| 91 | المساحات | 1.7 |
| 97 | حجوم أجسام الدوران | 2.7 |
| 109 | طول القوس | 3.7 |
| 111 | مساحة سطح الدوران | 4.7 |
| 113 | الإحداثيات القطبية | 8 |
| 113 | الإحداثيات القطبية | 1.8 |
| 115 | العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية | 2.8 |
| 117 | المنحنيات القطبية | 3.8 |
| 128 | المساحات في الإحداثيات القطبية | 4.8 |

باب 1

التكامل المحدد

1.1 المجموع وخواصه

نرمز لمجموع الأعداد الحقيقية a_1, a_2, \dots, a_n بالرمز $\sum_{k=1}^n a_k$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ أي أن}$$

خواص المجموع :
إذا كانت $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ لكل $1 \leq k \leq n$ وكانت $m \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n m a_k = m \sum_{k=1}^n a_k \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k \quad (3)$$

مجاميع هامة :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (3)$$

مثال : أحسب $\sum_{k=1}^n (k-1)^2$

الحل : $\sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

2.1 التكامل المحدد

التجزئ المنتظم للفترة :

لتجزئ الفترة المغلقة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية بحيث يكون طول كل فترة جزئية مساوياً $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$ نضع $x_0 = a$ و $x_1 = a + \Delta_x$ و $x_k = a + k\Delta_x$ وأخيراً $x_n = a + n\Delta_x = b$ بالتحزئ المنتظم للفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية نسمي المجموعة $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n = b\}$

مثال : جزئ الفترة $[1, 3]$ إلى 5 فترات جزئية منتظمة

$$\text{الحل : } \Delta_x = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + 0.4 = 1.4, \quad x_2 = 1 + 2(0.4) = 1.8$$

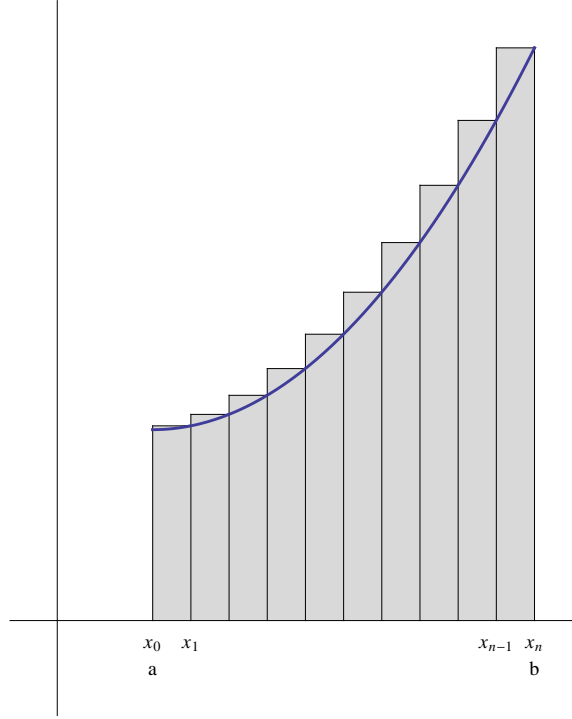
$$x_3 = 1 + 3(0.4) = 2.2, \quad x_4 = 1 + 4(0.4) = 2.6, \quad x_5 = 1 + 5(0.4) = 3$$

مجموع ريمان :

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكان $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ تجزئاً منتظماً للفترة $[a, b]$ ، نعرف

$$R_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x \text{ كالتالي : } P \text{ المنتظم}$$

$$\text{حيث } \Delta_x = \frac{b-a}{n} \text{ و } x_k = a + k\Delta_x = a + k \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

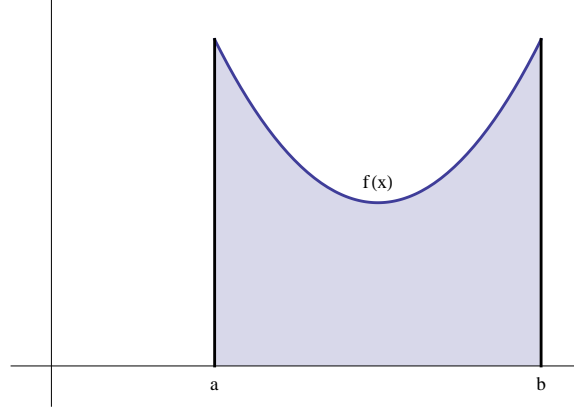


التكامل المحدد :

نرمز للتكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a, b]$ بالرمز $\int_a^b f(x) dx$ ويعرف كالتالي :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

أي أن $\int_a^b f(x) dx$ يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور x والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$



مثال (1): استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x - 3) dx$

الحل: $f(x) = 4x - 3$ و $[a, b] = [0, 2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0, 2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة:

$$\Delta_x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0, \dots, x_k = 0 + k\Delta_x = \frac{2k}{n}, \dots, x_n = 2$$

ثانياً - مجموع ريمان:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left[4\left(\frac{2k}{n}\right) - 3\right] \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{8k}{n} - 3\right) \frac{2}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{16k}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{16k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{6}{n} = \frac{16}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{16}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n} n = 8 \frac{n(n+1)}{n^2} - 6 \end{aligned}$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x - 3) dx$

$$\int_0^2 (4x - 3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 \frac{n(n+1)}{n^2} - 6\right) = 8(1) - 6 = 8 - 6 = 2$$

مثال (2): استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2 dx$

الحل: $f(x) = x^2$ و $[a, b] = [0, 2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0, 2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة:

$$\Delta_x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0, \dots, x_k = 0 + k\Delta_x = \frac{2k}{n}, \dots, x_n = 2$$

ثانياً - مجموع ريمان:

$$\begin{aligned}
 R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k^2}{n^2}\right) \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{8k^2}{n^3} \\
 &= \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{4}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}
 \end{aligned}$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2 dx$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \right) = \frac{4}{3}(2) = \frac{8}{3}$$

3.1 خواص التكامل المحدد

إذا كانت f و g دالتان متصلتان على الفترة $[a, b]$ وكانت $k \in \mathbb{R}$ فإن

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

(3) إذا كانت $a < c < b$ فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$(4) \text{ إذا كانت } f(x) \geq 0 \text{ لكل } x \in [a, b] \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(5) \text{ إذا كانت } f(x) \geq g(x) \text{ لكل } x \in [a, b] \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c \in (a, b)$ بحيث $(b - a) f(c) = \int_a^b f(x) dx$

مثال : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 2]$
الحل :

$$\text{أولاً - حساب التكامل المحدد } \int_0^2 x^2 dx$$

تم حساب هذا التكامل كمثال على مجموع ريمان ومقداره يساوي $\frac{8}{3}$

ثانياً - إيجاد قيمة العدد c من العلاقة $(b - a) f(c) = \int_a^b f(x) dx$

$$(2 - 0) f(c) = \int_0^2 x^2 dx \implies 2c^2 = \frac{8}{3}$$

$$\implies c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \implies c = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 2)$ بينما $c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0, 2)$

أي أن قيمة العدد c المطلوبة هي $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$

باب 2

التكامل غير المحدد

1.2 الدالة الأصلية

تعريف الدالة الأصلية :
تقول أن الدالة $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ إذا كانت
 $G'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

مثال : أوجد الدالة الأصلية لكل دالة فيما يلي :

$$f(x) = 2x \quad (1)$$

$$f(x) = \cos x \quad (2)$$

$$f(x) = \sec^2 x \quad (3)$$

$$f(x) = \sec x \tan x \quad (4)$$

الحل :

$$G(x) = x^2 + c \quad (1)$$

$$G(x) = \sin x + c \quad (2)$$

$$G(x) = \tan x + c \quad (3)$$

$$G(x) = \sec x + c \quad (4)$$

حيث c عدد حقيقي ثابت

ملاحظة : إذا كانت $G_1(x)$ و $G_2(x)$ دالتان أصليتان للدالة $f(x)$ فإن $G_1(x) - G_2(x) = c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

2.2 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :
لتكن $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة

(1) إذا عرفنا الدالة $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ كالتالي $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ لكل $x \in [a, b]$ فإن $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$

أي أن $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a) \quad (2)$$

مثال (1): أحسب ما يلي :

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt = \sin x \quad (2)$$

مثال (2): أحسب ما يلي :

$$\int_1^2 2x dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int_1^2 2x dx = [x^2]_1^2 = (2)^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3 \quad (1)$$

لاحظ أن x^2 هي دالة أصلية للدالة $2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1 \quad (2)$$

2.2. النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

لاحظ أن $\sin x$ هي دالة أصلية للدالة $\cos x$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g دالة قابلة للاشتقاق ومداهما محتوي في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2} dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^{3x^2} \sin t dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^{3x^2} \sin t dt = \sin(3x^2) (6x) \quad (2)$$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g و h دالتان قابلتان للاشتقاق ومداهما محتوي في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4} dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4} dt = \frac{1-(2x^2)^2}{1+(2x^2)^4} (4x) - \frac{1-(\cos x)^2}{1+(\cos x)^4} (-\sin x) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \sqrt{1+(x^2)^4} (2x) - \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (2)$$

3.2 التكامل غير المحدد

تعريف : نرسم للتكامل غير المحدد للدالة f بالرمز $\int f(x) dx$ ويعرف كالتالي $\int f(x) dx = G(x) + c$ حيث $G(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ و c عدد حقيقي ثابت

بعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$\int 1 dx = x + c \quad (1)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (2) \quad \text{حيث } n \neq -1$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (3)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c \quad (6)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad (7)$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c \quad (8)$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int (7x^2 + 5\sqrt{x}) dx \quad (1)$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \quad (2)$$

$$\int (-4 \cos x + 8 \sec^2 x) dx \quad (3)$$

$$\int (3 + 4 \sec x \tan x) dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int (7x^2 + 5\sqrt{x}) dx = \int 7x^2 dx + \int 5\sqrt{x} dx \quad (1)$$

$$= 7 \int x^2 dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 7 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \frac{5}{x^4} dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx = 5 \int \frac{1}{x^4} dx - 2 \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \quad (2)$$

$$= 5 \int x^{-4} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} = 5 \frac{x^{-3}}{-3} - 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int (-4 \cos x + 8 \sec^2 x) dx = \int -4 \cos x dx + \int 8 \sec^2 x dx \quad (3)$$

$$= -4 \int \cos x dx + 8 \int \sec^2 x dx = -4 \sin x + 8 \tan x + c$$

$$\int (3 + 4 \sec x \tan x) dx = \int 3 dx + \int 4 \sec x \tan x dx \quad (4)$$

$$= 3 \int 1 dx + 4 \int \sec x \tan x dx = 3x + 4 \sec x + c$$

4.2 التكامل بالتعويض

نظرية : إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ وكانت f دالة متصلة على فترة J تحتوي مدى g وكانت F دالة أصلية للدالة f على J فإن :

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c \quad \text{لكل } x \in [a, b]$$

مثال : حل التكامل التالي $\int (x^2 + 1)^{11} x dx$

الحل الأول : ضع $u = x^2 + 1$

$$\text{عندئذ } du = 2x dx \implies \frac{1}{2} du = x dx$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)^{11} x dx &= \int u^{11} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{11} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{12}}{12} + c = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{12}}{12} + c \end{aligned}$$

الحل الثاني : باستخدام $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

$$\int (x^2 + 1)^{11} x dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{11} (2x) dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{12}}{12} + c$$

تعميم لبعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$n \neq -1 \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (1)$$

$$n \neq -1 \quad \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (2)$$

$$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x)) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (3)$$

$$\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2(f(x)) f'(x) dx = \tan(f(x)) + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2(f(x)) f'(x) dx = -\cot(f(x)) + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c \quad (6)$$

$$\int \sec(f(x)) \tan(f(x)) f'(x) dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c \quad (7)$$

$$\int \csc(f(x)) \cot(f(x)) f'(x) dx = -\csc x + c$$

مثال : حل التكاملات التالية

$$\int \sqrt{x^2 + 2x}(x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x}(x + 1) dx = \int (x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}}(x + 1) dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}} [2(x + 1)] dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}} (2x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{x^2 + x}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x^3 + x}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3}} dx = \int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}} dx : \text{الحل}$$

$$= \int (x^4 + 2x^2 + 3)^{-\frac{1}{3}} (x^3 + x) dx = \frac{1}{4} \int (x^4 + 2x^2 + 3)^{-\frac{1}{3}} (4x^3 + 4x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(x^4 + 2x^2 + 3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \cos(5x + 7) dx \quad (3)$$

$$\int \cos(5x + 7) dx = \frac{1}{5} \int \cos(5x + 7) 5 dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{5} \sin(5x + 7) + c$$

$$\int x \sec^2(x^2 + 2) dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\int x \sec^2(x^2 + 2) dx &= \frac{1}{2} \int \sec^2(x^2 + 2) (2x) dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \tan(x^2 + 2) + c\end{aligned}$$

$$\int \sec(6x - 2) \tan(6x - 2) dx \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\int \sec(6x - 2) \tan(6x - 2) dx &= \frac{1}{6} \int \sec(6x - 2) \tan(6x - 2) (6) dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{6} \sec(6x - 2) + c\end{aligned}$$

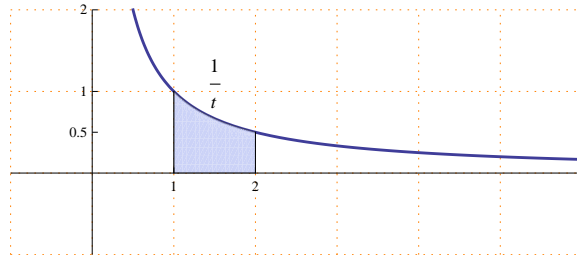
باب 3

الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.3 الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تعريف : نرسم للدالة اللوغاريتمية الطبيعية بالرمز $\ln(x)$ وتعرف كالتالي :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{لكل } x \in (0, \infty)$$



ملاحظات هامة :

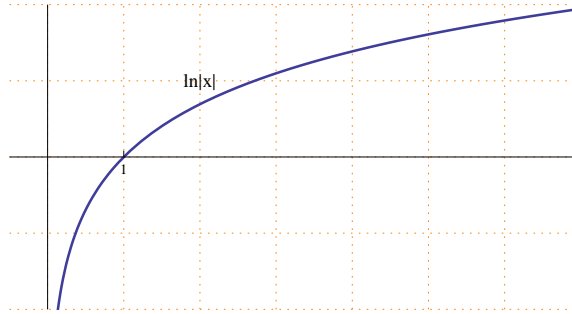
(1) مجال الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو $(0, \infty)$

$$\ln(1) = 0 \quad (2)$$

(3) $\ln(x) > 0$ لكل $x > 1$

(4) $\ln(x) < 0$ لكل $0 < x < 1$

رسم الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :



ملاحظات هامة :

$$x \in (0, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x} > 0 \quad (1)$$

أي أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية دالة تزايدية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad (3)$$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :
إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (2)$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad (3)$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال : أحسب مشتقات الدوال التالية

$$y = \sqrt{x} \ln|x| \quad (1)$$

$$\text{الحل : } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln|x| + \sqrt{x} \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln|x^2 + 3x - 1| \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1} : \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln |\sin x + 5| \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 5} : \text{الحل}$$

$$f(x) = \frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

$$\ln |f(x)| = \ln \left| \frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}} \right| : \text{الحل}$$

$$= \ln |(x^2+1)^5(x-8)^3| - \ln |(x^3-1)^{\frac{3}{2}}|$$

$$= \ln |(x^2+1)^5| + \ln |(x-8)^3| - \ln |(x^3-1)^{\frac{3}{2}}|$$

$$= 5 \ln |x^2+1| + 3 \ln |x-8| - \frac{3}{2} \ln |x^3-1|$$

باشتقاق الطرفين :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 5 \frac{2x}{x^2+1} + 3 \frac{1}{x-8} - \frac{3}{2} \frac{3x^2}{x^3-1}$$

$$f'(x) = f(x) \left[\frac{10x}{x^2+1} + \frac{3}{x-8} - \frac{3}{2} \frac{3x^2}{x^3-1} \right]$$

$$f'(x) = \left(\frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}} \right) \left[\frac{10x}{x^2+1} + \frac{3}{x-8} - \frac{3}{2} \frac{3x^2}{x^3-1} \right]$$

$$f(x) = (\sin x)^x \quad (5)$$

$$\ln |f(x)| = \ln |(\sin x)^x| = x \ln |\sin x| : \text{الحل}$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1) \ln |\sin x| + x \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = f(x) \left[\ln |\sin x| + x \frac{\cos x}{\sin x} \right]$$

$$f'(x) = (\sin x)^x \left[\ln |\sin x| + x \frac{\cos x}{\sin x} \right]$$

تكامل الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 8} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 8} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x + 8} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x + 8| + c$$

$$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2 \sin x| + c$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln |x| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx &= \int \frac{1}{x (\ln x)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \int (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

تكاملات مهمة :

$$\int \tan x dx = \ln |\sec x| + c \quad (1)$$

$$\int \tan(f(x)) f'(x) dx = \ln |\sec(f(x))| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c \quad (2)$$

$$\int \cot(f(x)) f'(x) dx = \ln |\sin(f(x))| + c$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c \quad (3)$$

$$\int \sec(f(x)) f'(x) dx = \ln |\sec(f(x)) + \tan(f(x))| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c \quad (4)$$

$$\int \csc(f(x)) f'(x) dx = \ln |\csc(f(x)) - \cot(f(x))| + c$$

مثال : أحسب ما يلي

$$\int \tan(3x) dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \tan(3x) dx = \frac{1}{3} \int \tan(3x) (3) dx = \frac{1}{3} \ln |\sec(3x)| + c$$

$$\int x \sec(x^2 - 3) dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int x \sec(x^2 - 3) dx &= \frac{1}{2} \int \sec(x^2 - 3) (2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sec(x^2 - 3) + \tan(x^2 - 3)| + c \end{aligned}$$

2.3 الدالة الأسية الطبيعية

تعريف : الدالة الأسية الطبيعية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية الطبيعية ، نرمز للدالة الأسية الطبيعية بالرمز e^x حيث e عدد حقيقي غير نسبي

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية الطبيعيه هو \mathbb{R}

(2) مدى الدالة الأسية الطبيعية هو الفترة $(0, \infty)$

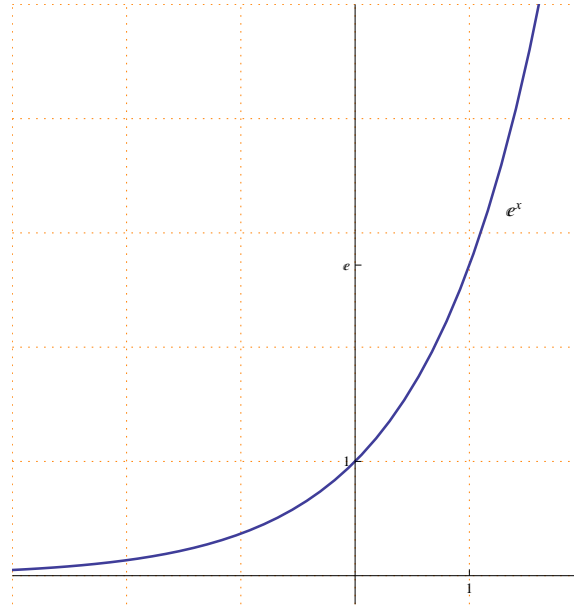
أي أن الدالة الأسية الطبيعية موجبة دائماً

$$e^0 = 1 \text{ و } e \approx 2.718128 \quad (3)$$

$$\ln(e^x) = x \text{ لكل } x \in \mathbb{R} \text{ وبالتالي } \ln(e) = 1 \quad (4)$$

$$e^{\ln(x)} = x \text{ لكل } x \in (0, \infty)$$

(5) رسم الدالة الأسية الطبيعية :



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad (6)$$

بعض خواص الدالة الأسية الطبيعية :

إذا كانت $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

2.3 . الدالة الأسية الطبيعية

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (3)$$

مثال (1): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $e^{x-1} = 3$
 الحل: $e^{x-1} = 3 \implies \ln(e^{x-1}) = \ln(3)$
 $\implies x - 1 = \ln(3) \implies x = 1 + \ln(3)$

مثال (2): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\ln|x+2| = 5$
 الحل: $\ln|x+2| = 5 \implies e^{\ln|x+2|} = e^5$
 $\implies x + 2 = e^5 \implies x = e^5 - 2$

إشتقاق الدالة الأسية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي :

$$f(x) = e^{x^2+x} \quad (1)$$

$$f'(x) = e^{x^2+x}(2x+1) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = e^{\sin x} + \frac{1}{e^x} \quad (2)$$

$$f(x) = e^{\sin x} + e^{-x} \quad \text{الحل}$$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x + e^{-x}(-1)$$

$$f(x) = (e^{5x} + x^2)^3 \quad (3)$$

$$f'(x) = 3(e^{5x} + x^2)^2 (e^{5x}(5) + 2x) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln|e^{\tan x} + 4x^3| \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{e^{\tan x} \sec^2 x + 12x^2}{e^{\tan x} + 4x^3} \quad \text{الحل}$$

تكامل الدالة الأسية الطبيعية :

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int e^{7x+1} dx \quad (1)$$

$$\text{الحل : } \int e^{7x+1} dx = \frac{1}{7} \int e^{7x+1} (7) dx = \frac{1}{7} e^{7x+1} + c$$

$$\int x e^{x^2-3} dx \quad (2)$$

$$\text{الحل : } \int x e^{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2-3} (2x) dx = \frac{1}{2} e^{x^2-3} + c$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad (3)$$

$$\text{الحل : } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2 \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 e^{\sqrt{x}} + c$$

$$\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x} dx \quad (4)$$

$$\text{الحل : } \int \frac{e^{\sin x}}{\sec x} dx = \int e^{\sin x} \frac{1}{\sec x} dx$$

$$= \int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + c$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (5)$$

$$\text{الحل : } \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int e^{\tan x} \sec^2 x dx = e^{\tan x} + c$$

$$\int_0^{\ln(5)} e^x dx \quad (6)$$

$$\text{الحل : } \int_0^{\ln(5)} e^x dx = [e^x]_0^{\ln(5)} = e^{\ln(5)} - e^0 = 5 - 1 = 4$$

$$\int e^x \cos(e^x) dx \quad (7)$$

$$\int e^x \cos(e^x) dx = \int \cos(e^x) e^x dx = \sin(e^x) + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{e^{5x}}{e^{5x} + 4} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{e^{5x}}{e^{5x} + 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{e^{5x} (5)}{e^{5x} + 4} dx = \frac{1}{5} \ln |e^{5x} + 4| + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{e^{5x}}{(e^{5x} + 4)^3} dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{5x}}{(e^{5x} + 4)^3} dx &= \int (e^{5x} + 4)^{-3} e^{5x} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{5} \int (e^{5x} + 4)^{-3} e^{5x} (5) dx = \frac{1}{5} \frac{(e^{5x} + 4)^{-2}}{-2} + c \end{aligned}$$

3.3 الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة

الدالة الأسية العامة :

إذا كان $a > 0$ عدداً حقيقياً ، نرسم للدالة الأسية العامة للأساس a بالرمز a^x وتعرف كالتالي $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظات عامة :

$$(1) \text{ مجال الدالة الأسية العامة هو } \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ مدى الدالة الأسية العامة هو الفترة } (0, \infty)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \text{ حيث } a > 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \text{ حيث } a > 1$$

إشتقاق الدالة الأسية العامة :

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x) \ln a$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$(1) f(x) = 3^{x^2+x}$$

$$\text{الحل : } f'(x) = 3^{x^2+x} (2x+1) \ln(3)$$

$$(2) f(x) = 5^{\sqrt{x}}$$

$$\text{الحل : } f'(x) = 5^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \ln(5)$$

$$(3) f(x) = \pi^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{الحل : } f'(x) = \pi^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right) \ln(\pi)$$

$$(4) f(x) = 3^{\tan(x^2+1)}$$

$$\text{الحل : } f'(x) = 3^{\tan(x^2+1)} \sec^2(x^2+1) (2x)$$

$$(5) f(x) = (4^{x^2} + 7^{3x+1})^6$$

$$\text{الحل : } f'(x) = 6 (4^{x^2} + 7^{3x+1})^5 (4^{x^2} (2x) \ln(4) + 7^{3x+1} (3) \ln(7))$$

$$f(x) = \ln |5^{x^2} + x^3| \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{5^{x^2}(2x)\ln(5) + 3x^2}{5^{x^2} + x^3} : \text{الحل}$$

تكامل الدالة الأسية العامة :

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int x^2 6^{x^3-2} dx \quad (1)$$

$$\int x^2 6^{x^3-2} dx = \frac{1}{3} \int 6^{x^3-2} (3x^2) dx = \frac{1}{3} \frac{6^{x^3-2}}{\ln 6} + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} dx &= \int 3^{\cot x} \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int 3^{\cot x} \csc^2 x dx : \text{الحل} \\ &= - \int 3^{\cot x} (-\csc^2 x) dx = - \frac{3^{\cot x}}{\ln 3} + c \end{aligned}$$

$$\int \left(5^x + \frac{1}{2^x} \right) dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int \left(5^x + \frac{1}{2^x} \right) dx &= \int (5^x + 2^{-x}) dx = \int 5^x dx + \int 2^{-x} dx : \text{الحل} \\ &= \int 5^x dx + \frac{1}{-1} \int 2^{-x} (-1) dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + c \end{aligned}$$

$$\int (7^x + 4)^{10} 7^x dx \quad (4)$$

$$\int (7^x + 4)^{10} 7^x dx = \frac{1}{\ln 7} \int (7^x + 4)^{10} (7^x \ln 7) dx : \text{الحل}$$

$$= \frac{1}{\ln 7} \frac{(7^x + 4)^{11}}{11} + c$$

$$\int \frac{2^x}{2^x + 1} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{2^x}{2^x + 1} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} dx = \frac{1}{\ln 2} \ln |2^x + 1| + c : \text{الحل}$$

$$\int 3^x (1 + \cos(3^x)) dx \quad (6)$$

$$\int 3^x (1 + \cos(3^x)) dx = \int [3^x + \cos(3^x) 3^x] dx : \text{الحل}$$

$$= \int 3^x dx + \int \cos(3^x) 3^x dx = \int 3^x dx + \frac{1}{\ln 3} \int \cos(3^x) (3^x \ln 3) dx$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} \sin(3^x) + c$$

$$\int 4^x 5^{4^x} dx \quad (7)$$

$$\int 4^x 5^{4^x} dx = \frac{1}{\ln 4} \int 5^{4^x} (4^x \ln 4) dx = \frac{1}{\ln 4} \frac{5^{4^x}}{\ln 5} + c : \text{الحل}$$

الدالة اللوغاريتمية العامة :
نرمز للدالة اللوغاريتمية للأساس a بالرمز $\log_a x$ وهي الدالة العكسية للدالة الأسية a^x حيث $a > 0$ عدداً حقيقياً

ملاحظات عامة :

$$\ln x = \log_e x \text{ و } \log x = \log_{10} x \quad (1)$$

$$\log_a x = y \iff x = a^y \quad (2)$$

$$\log_a a = 1 \quad (3)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (4)$$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية العامة :
إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (1)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (2)$$

$$\log_a x^r = r \log_a x \quad (3)$$

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $\log(x+1) = 2$
الحل : $\log(x+1) = 2 \implies 10^{\log(x+1)} = 10^2$
 $\implies x+1 = 100 \implies x = 100 - 1 = 99$

3.3 الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $3^{2x-1} = 7$

الحل : $3^{2x-1} = 7 \implies \log_3 3^{2x-1} = \log_3 7$

$$2x - 1 = \log_3 7 \implies 2x = 1 + \log_3 7 \implies x = \frac{1 + \log_3 7}{2}$$

إشتقاق الدالة اللوغاريتمية العامة :

$$\frac{d}{dx} \log_a |x| = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a |f(x)| = \frac{1}{\ln a} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \log_5 |x^3 + \sin 5x| \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \frac{3x^2 + \cos 5x (5)}{x^3 + \sin 5x} \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = [\log_3 |x^2 - 1| + e^{3x}]^8 \quad (2)$$

$$f'(x) = 8 [\log_3 |x^2 - 1| + e^{3x}]^7 \left(\frac{1}{\ln 3} \frac{2x}{x^2 - 1} + e^{3x} (3) \right) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = \sin(\log_7 |2x + 3|) \quad (3)$$

$$f'(x) = \cos(\log_7 |2x + 3|) \left(\frac{1}{\ln 7} \frac{2}{2x + 3} \right) \quad \text{الحل}$$

$$f(x) = \sin(x^2) \log_7 |2x + 3| \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = \cos(x^2) (2x) \log_7 |2x + 3| + \sin(x^2) \frac{1}{\ln 7} \frac{2}{2x + 3}$$

4.3 تكامل الدوال المثلثية العكسية

مراجعة اشتقاق الدوال المثلثية العكسية :

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad |x| < 1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} , \quad |f(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad |x| < 1 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} , \quad |f(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} , \quad |x| > 1 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} (f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} , \quad |f(x)| > 1$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} , \quad |x| > 1 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} (f(x)) = -\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} , \quad |f(x)| > 1$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \sin^{-1} (\sqrt{x}) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \quad \text{الحل :}$$

$$f(x) = \tan^{-1}(2x^2 + 3) \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (2x^2 + 3)^2} (4x) = \frac{4x}{1 + (2x^2 + 3)^2} : \text{الحل}$$

$$f(x) = \sec^{-1}(\sin 3x) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin 3x \sqrt{(\sin 3x)^2 - 1}} (\cos 3x) \quad (3)$$

$$f(x) = e^{\cos^{-1}(4x+1)} \quad (4)$$

$$f'(x) = e^{\cos^{-1}(4x+1)} \frac{-1}{\sqrt{1 - (4x+1)^2}} \quad (4) : \text{الحل}$$

$$f(x) = \ln |e^{5x} + \sec^{-1}(3x)| \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{e^{5x} (5) + \frac{1}{3x\sqrt{(3x)^2 - 1}} (3)}{e^{5x} + \sec^{-1}(3x)} : \text{الحل}$$

$$f(x) = (5^x + \tan^{-1}(2x + 1))^5 \quad (6)$$

: الحل

$$f'(x) = 5 (5^x + \tan^{-1}(2x + 1))^4 \left(5^x \ln 5 + \frac{1}{1 + (2x + 1)^2} (2) \right)$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c, \quad |x| < a \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c, \quad |f(x)| < a$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (2)$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c, \quad |x| > a \quad (3)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x) \sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c, \quad |f(x)| > a$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^2}{9+x^6} dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{9+x^6} dx &= \int \frac{x^2}{3^2+(x^3)^2} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{3^2+(x^3)^2} dx = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x^3}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}} dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx &= \int (16-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{-2} \int (16-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) dx = \frac{1}{-2} \frac{(16-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx &= \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1^2-(\ln x)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{\ln x}{1} \right) + c = \sin^{-1} (\ln x) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}} dx \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}} dx &= \int \frac{e^{2x}}{5^2+(e^{2x})^2} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x} (2)}{5^2+(e^{2x})^2} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{e^{2x}}{5} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{25-\cos^2 x}} dx \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sqrt{25 - \cos^2 x}} dx &= \int \frac{\sin x}{\sqrt{5^2 - (\cos x)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{-1} \int \frac{-\sin x}{\sqrt{5^2 - (\cos x)^2}} dx = -\sin^{-1} \left(\frac{\cos x}{5} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{1}{x^2 + 6x + 25} dx \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 6x + 25} dx &= \int \frac{1}{(x^2 + 6x + 9) + 16} dx : \text{الحل} \\ &= \int \frac{1}{(x + 3)^2 + 4^2} dx = \frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x + 3}{4} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx &= \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{(x^2 - 2x + 1) - 4}} dx : \text{الحل} \\ &= \int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{(x - 1)^2 - 2^2}} dx = \frac{1}{2} \sec^{-1} \left(\frac{x - 1}{2} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x + c \\ &\qquad \int \frac{x + 2}{\sqrt{16 - x^2}} dx \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 2}{\sqrt{16 - x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{16 - x^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{-2} \int (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{4^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{-2} \frac{(16 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) + c \\ &\qquad \int \frac{x + \tan^{-1} x}{x^2 + 1} dx \quad (11) \end{aligned}$$

$$\int \frac{x + \tan^{-1} x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{\tan^{-1} x}{x^2 + 1} dx : \text{الحل}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int (\tan^{-1} x)^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} + c \\
 &\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}} dx \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2-6^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{(e^x)^2-6^2}} dx = \frac{1}{6} \sec^{-1} \left(\frac{e^x}{6} \right) + c$$

باب 4

الدوال الزائدية ومعكوساتها

1.4 الدوال الزائدية

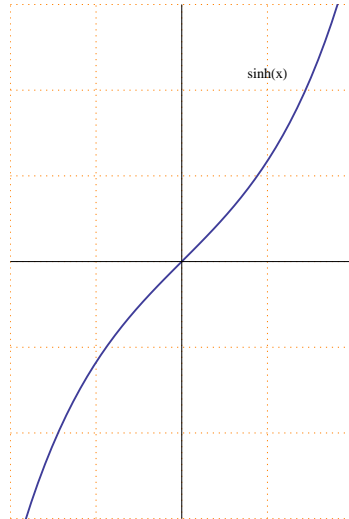
(1) دالة الجيب الزائدية :

نرمز لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh x$ وتعرف كالتالي :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

- 1 مجال دالة الجيب الزائدية \mathbb{R} ومداه \mathbb{R}
- 2 دالة الجيب الزائدية دالة فردية (متناظرة حول نقطة الأصل) و $\sinh(0) = 0$
- 3 رسم دالة الجيب الزائدية



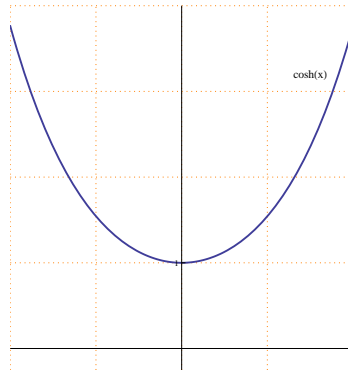
(2) دالة جيب التمام الزائدية :

نرمز لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh x$ وتعرف كالتالي :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

- 1 مجال دالة جيب التمام الزائدية \mathbb{R} ومداهما الفترة $[1, \infty)$
- 2 دالة جيب التمام الزائدية دالة زوجية (متناظرة حول محور y) و $\cosh(0) = 1$
- 3 رسم دالة جيب التمام الزائدية



تعرف باقي الدوال الزائدية على النحو التالي :

(3) دالة الظل الزائدية :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(4) دالة ظل التمام الزائدية :

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(5) دالة القاطع الزائدية :

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(6) دالة قاطع التمام الزائدية :

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

قوانين هامة :

$$x \in \mathbb{R} \text{ لكل } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ لكل } 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x \quad (3)$$

إشتقاق الدوال الزائدية :

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh (f(x)) = \cosh (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh (f(x)) = \sinh (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh (f(x)) = \operatorname{sech}^2 (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \coth (f(x)) = -\operatorname{csch}^2 (f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}(f(x)) = -\operatorname{sech}(f(x)) \tanh(f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}(f(x)) = -\operatorname{csch}(f(x)) \coth(f(x)) f'(x)$$

أمثلة : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \operatorname{sech}(1 + \sqrt{x}) \quad (1)$$

الحل :

$$f'(x) = -\operatorname{sech}(1 + \sqrt{x}) \tanh(1 + \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$f(x) = e^{\sinh 4x} \quad (2)$$

الحل :

$$f'(x) = e^{\sinh 4x} \cosh 4x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln |\cosh(1 - x^2)| \quad (3)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\sinh(1 - x^2) (-2x)}{\cosh(1 - x^2)}$$

$$f(x) = \tanh(5^x) \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = \operatorname{sech}^2(5^x) 5^x \ln 5$$

$$f(x) = (\coth(3x) + e^{6x})^4 \quad (5)$$

الحل :

$$f'(x) = 4 (\coth(3x) + e^{6x})^3 (-\operatorname{csch}^2(3x) (3) + e^{6x} (6))$$

$$f(x) = x^{cschx} \quad (6)$$

الحل :

$$\ln |f(x)| = \ln |x^{cschx}| = cschx \ln |x|$$

ياشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (cschx \coth x) \ln |x| + cschx \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) [(cschx \coth x) \ln |x| + cschx \frac{1}{x}]$$

$$f'(x) = x^{cschx} [(cschx \coth x) \ln |x| + cschx \frac{1}{x}]$$

تكامل الدوال الزائدية :

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c \quad (1)$$

$$\int \cosh (f(x)) f'(x) \, dx = \sinh (f(x)) + c$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c \quad (2)$$

$$\int \sinh (f(x)) f'(x) \, dx = \cosh (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c \quad (3)$$

$$\int \operatorname{sech}^2 (f(x)) f'(x) \, dx = \tanh (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c \quad (4)$$

$$\int \operatorname{csch}^2 (f(x)) f'(x) \, dx = -\coth (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c \quad (5)$$

$$\int \operatorname{sech} (f(x)) \tanh (f(x)) f'(x) \, dx = -\operatorname{sech} (f(x)) + c$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c \quad (6)$$

$$\int \operatorname{csch} (f(x)) \coth (f(x)) f'(x) \, dx = -\operatorname{csch} (f(x)) + c$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + c \quad (7)$$

$$\int \tanh (f(x)) f'(x) \, dx = \ln |\cosh (f(x))| + c$$

$$\int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + c \quad (8)$$

$$\int \coth (f(x)) f'(x) \, dx = \ln |\sinh (f(x))| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int x^2 \cosh(x^3) \, dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cosh(x^3) \, dx &= \frac{1}{3} \int \cosh(x^3) (3x^2) \, dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{3} \sinh(x^3) + c \end{aligned}$$

$$\int e^x \tanh(e^x) \, dx \quad (2)$$

$$\int e^x \tanh(e^x) \, dx = \int \tanh(e^x) e^x \, dx = \ln |\cosh(e^x)| + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx &= \int \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx : \text{الحل} \\ &= 2 \int \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = 2 \tanh(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{\operatorname{csch}(\frac{1}{x}) \coth(\frac{1}{x})}{x^2} \, dx \quad (4)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{csch}(\frac{1}{x}) \coth(\frac{1}{x})}{x^2} \, dx &= \int \operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \coth\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x^2}\right) \, dx \\ &= \int -\operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) \coth\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) \, dx = \operatorname{csch}\left(\frac{1}{x}\right) + c \end{aligned}$$

$$\int e^{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x \, dx \quad (5)$$

$$\int e^{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x \, dx = e^{\tanh x} + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} \, dx \quad (6)$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} \, dx = \ln |1 + \cosh x| + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh^2 x} \, dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh^2 x} \, dx = \int \frac{\sinh x}{1 + (\cosh x)^2} \, dx = \tan^{-1}(\cosh x) + c : \text{الحل}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sech} x \sqrt{4 - \sinh^2 x}} \, dx \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sech} x \sqrt{4 - \sinh^2 x}} \, dx &= \int \frac{\cosh x}{\sqrt{2^2 - (\sinh x)^2}} \, dx : \text{الحل} \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{\sinh x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

2.4 الدوال الزائدية العكسية

(1) الدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sinh y = x \iff y = \sinh^{-1} x$$

(2) الدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\cosh^{-1} : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\cosh y = x \iff y = \cosh^{-1} x$$

(3) الدالة العكسية لدالة الظل الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الظل الزائدية بالرمز $\tanh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\tanh^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tanh y = x \iff y = \tanh^{-1} x$$

(4) الدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية بالرمز $\coth^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\coth^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - [-1, 1]$$

$$\coth y = x \iff y = \coth^{-1} x$$

(5) الدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية بالرمز $\operatorname{sech}^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1] \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\operatorname{sech} y = x \iff y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

(6) الدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية بالرمز $csch^{-1}x$ وتعرف كالتالي

$$csch^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

$$cschy = x \iff y = csch^{-1}x$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

$$x \in (1, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (2)$$

$$f(x) \in (1, \infty) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \cosh^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}$$

$$x \in (-1, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (3)$$

$$f(x) \in (-1, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$

$$x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (4)$$

$$f(x) \in \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ لكل } \frac{d}{dx} \tanh^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$

$$x \in (0, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} sech^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (5)$$

$$f(x) \in (0, 1) \text{ لكل } \frac{d}{dx} sech^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{x\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \frac{d}{dx} csch^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \quad (6)$$

$$f(x) \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ لكل } \frac{d}{dx} sech^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \sinh^{-1}(5x - 1) \quad (1)$$

: الحل

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (5x - 1)^2}} \quad (5)$$

$$f(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{x}) \quad (2)$$

: الحل

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \operatorname{csch}^{-1}(e^{3x}) \quad (3)$$

: الحل

$$f'(x) = -\frac{1}{e^{3x}\sqrt{1 + (e^{3x})^2}} (e^{3x} (3)) = -\frac{3}{\sqrt{1 + e^{6x}}}$$

$$f(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)} \quad (4)$$

: الحل

$$f'(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)} \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 1}} (2) \ln 6$$

$$f(x) = \ln|x^2 + \coth^{-1}(2x)| \quad (5)$$

: الحل

$$f'(x) = \frac{2x + \frac{1}{1-(2x)^2}}{x^2 + \coth^{-1}(2x)} (2)$$

$$f(x) = [\operatorname{sech}^{-1}(3x) + 7^x]^5 \quad (6)$$

: الحل

$$f'(x) = 5 [\operatorname{sech}^{-1}(3x) + 7^x]^4 \left[\frac{-1}{3x\sqrt{1 - (3x)^2}} (3) + 7^x \ln 7 \right]$$

$$f(x) = \sqrt{x} \sinh^{-1}(5x) \quad (7)$$

: الحل

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sinh^{-1}(5x) + \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{1 + (5x)^2}} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{\cosh^{-1}(x^2)}{e^{3x}} \quad (8)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^2)^2-1}} (2x) e^{3x} - \cosh^{-1}(x^2) e^{3x}}{(e^{3x})^2} \quad (3)$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$x > a \text{ حيث } \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (2)$$

$$f(x) > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (3)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$|x| > a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (4)$$

$$|f(x)| > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + c \quad (5)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) + c$$

$$|x| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + c \quad (6)$$

$$|f(x)| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2)^2 - 4^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{25 - e^{2x}} dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{25 - e^{2x}} dx &= \int \frac{e^x}{5^2 - (e^x)^2} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{5} \tanh^{-1} \left(\frac{e^x}{5} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 25}} dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 25}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{(2x)^2 + 5^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2x}{5} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4+x}} dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4+x}} dx &= 2 \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{x})^2}} dx : \text{الحل} \\ &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}} dx \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}} dx &= \int \frac{x}{x^2\sqrt{4^2 - (x^2)^2}} dx : \text{الحل} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2\sqrt{4^2 - (x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \frac{-1}{4} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{1^2 + (e^x)^2}} dx : \text{الحل}$$

$$= -\operatorname{csch}^{-1}(e^x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x + 1) - 9}} dx : \text{الحل}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 3^2}} dx = \operatorname{cosh}^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{3 - (x^2 - 2x)}} dx : \text{الحل}$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4 - (x^2 - 2x + 1)}} dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{2^2 - (x-1)^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

باب 5

طرائق التكامل

1.5 التكامل بالتجزئ

مبرهنة : إذا كانت $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ و كانت كل من f' و g' متصلة فإن :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

$$\int x \cos x dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos x dx \\ du &= dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + c = x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\int x^2 e^x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= e^x dx \\ du &= 2x dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^x dx \\ du &= dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right] \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln|x| dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \ln|x| & v &= x^2 dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln|x| dx &= \frac{x^3}{3} \ln|x| - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c \end{aligned}$$

$$\int \ln(1+x^2) dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \ln(1+x^2) & dv &= dx \\ du &= \frac{2x}{1+x^2} dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{(2x^2+2)-2}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2} dx - \int \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - \int 2 dx - 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2x - 2 \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

$$\int \tan^{-1} x dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x \, dx &= x \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} x \, dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \\ &\int \sin^{-1} x \, dx \quad (6) \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \sin^{-1} x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^{-1} x \, dx &= x \sin^{-1} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \sin^{-1} x - \frac{1}{-2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) \, dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\ &\int e^x \cos x \, dx \quad (7) \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \cos x & dv &= e^x \, dx \\ du &= -\sin x \, dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int -\sin x e^x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x e^x \, dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{aligned} u &= \sin x & dv &= e^x \, dx \\ du &= \cos x \, dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + \int \sin x e^x \, dx \\ \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ 2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\ \int e^x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} [e^x \cos x + e^x \sin x] + c \end{aligned}$$

تمارين : أحسب التكاملات التالية

$$\int x \cosh x \, dx \quad (1)$$

$$\int x \sec^2 x \, dx \quad (2)$$

$$\int x^2 \sin x \, dx \quad (3)$$

$$\int \ln |x| \, dx \quad (4)$$

$$\int x^{-5} \ln |x| \, dx \quad (5)$$

$$\int e^x \sin x \, dx \quad (6)$$

2.5 تكامل قوى الدوال المثلثية

أولاً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x dx$ و $\int \cos^n x dx$

(1) إذا كان n عدداً فردياً فيمكن حل التكامل بالتعويض

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل $\int \sin^n x dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل $\int \cos^n x dx$

(2) إذا كان n عدداً زوجياً

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \sin^n x dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \cos^n x dx$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \cos^3 x dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x dx$$

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - u^2) du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$\int \sin^5 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x dx \implies -du = \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = -\int (1 - u^2)^2 du \\ &= -\int (1 - 2u^2 + u^4) du = -\left(u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + c \\ &= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$\int \cos^4 2x dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام متطابقة ضعف الزاوية $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned} \int \cos^4 2x dx &= \int (\cos^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4} [1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x] dx \\ &= \int \frac{1}{4} \left[1 + 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 8x\right] dx \\ &= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right] dx \\ &= \int \frac{3}{8} dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx + \frac{1}{8} \int \cos 8x dx \\ &= \int \frac{3}{8} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int \cos 4x (4) dx + \frac{1}{8} \frac{1}{8} \int \cos 8x (8) dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + c \end{aligned}$$

ثانياً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x \cos^m x dx$

(1) إذا كان n فردياً نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل

(2) إذا كان m فردياً نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل

(3) إذا كان كل من m و n زوجياً

نستخدم $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ لحل التكامل

مثال : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x dx \implies -du = \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx &= - \int (1 - u^2)^2 u^2 du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 du = - \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= - \left(\frac{u^3}{3} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + 2 \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx &= \int \sqrt{\sin x} \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \sqrt{\sin x} (1 - \sin^2 x) \cos x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} (1 - \sin^2 x) \cos x dx &= \int \sqrt{u} (1 - u^2) du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} (1 - u^2) du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}} \right) du \\ &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} (\sin x)^{\frac{7}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int \sin^5 x \cos^7 x dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^7 x dx &= \int \sin^4 x \cos^7 x \sin x dx \\ &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^7 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^7 x \sin x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x dx \implies -du = \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^7 x \sin x dx &= - \int (1 - u^2)^2 u^7 du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) u^7 du = - \int (u^7 - 2u^9 + u^{11}) du \\ &= - \left(\frac{u^8}{8} - 2 \frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{12}}{12} \right) + c = - \frac{\cos^8 x}{8} + 2 \frac{\cos^{10} x}{10} - \frac{\cos^{12} x}{12} + c \end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) (\cos^2 x)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x) (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx + \frac{1}{8} \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \cos 2x (2) dx \\ &= \frac{1}{16} \int 1 dx - \frac{1}{16} \frac{1}{4} \int \cos 4x (4) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cos 2x (2) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + c$$

ثالثاً - التكاملات من النوع $\int \tan^m x \sec^n x dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \tan^m x \sec^n x dx = \int \sec^n x dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\begin{aligned} \int \tan^m x \sec^n x dx &= \int \tan^m x dx = \int \tan^{m-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{m-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{m-2} x dx \\ &= \frac{1}{m-1} \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x dx \end{aligned}$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \tan x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \sec x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\sec x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \sec^3 x dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx$$

$$\begin{aligned} u &= \sec x & dv &= \sec^2 x dx \\ du &= \sec x \tan x dx & v &= \tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 - 1) \sec x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\
 &2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx \\
 \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + c
 \end{aligned}$$

$$\int \tan^4 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
 \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx \\
 &= \int (\tan x)^2 \sec^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int (\tan x)^2 \sec^2 x dx - \int \sec^2 x dx + \int 1 dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c
 \end{aligned}$$

$$\int \tan^2 x \sec^6 x dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
 \int \tan^2 x \sec^6 x dx &= \int \tan^2 x \sec^4 x \sec^2 x dx \\
 &= \int \tan^2 x (\sec^2 x)^2 \sec^2 x dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x dx
 \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \tan x$

$$du = \sec^2 x dx$$

$$\begin{aligned}
 \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x dx &= \int u^2 (1 + u^2)^2 du \\
 &= \int u^2 (1 + 2u^2 + u^4) du = \int (u^2 + 2u^4 + u^6) du \\
 &= \frac{u^3}{3} + 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + 2 \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c
 \end{aligned}$$

$$\int \tan^5 x \sec^3 x dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x dx \\ &= \int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \sec x$

$$du = \sec x \tan x dx$$

$$\begin{aligned} \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx &= \int (u^2 - 1)^2 u^2 du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^2 du = \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= \frac{u^7}{7} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sec^7 x}{7} - 2 \frac{\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

رابعاً - التكاملات من النوع $\int \cot^m x \csc^n x dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \cot^m x \csc^n x dx = \int \csc^n x dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\begin{aligned} \int \cot^m x \csc^n x dx &= \int \cot^m x dx = \int \cot^{m-2} x (\csc^2 x - 1) dx \\ &= \int \cot^{m-2} x \csc^2 x dx - \int \cot^{m-2} x dx \\ &= -\frac{1}{m-1} \cot^{m-1} x - \int \cot^{m-2} x dx \end{aligned}$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cot x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \csc x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\csc x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$\int \cot^4 x \csc^4 x dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \cot^4 x \csc^4 x dx &= \int \cot^4 x \csc^2 x \csc^2 x dx \\ &= \int \cot^4 x (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \cot x$

$$du = -\csc^2 x dx \implies -du = \csc^2 x dx$$

$$\begin{aligned} \int \cot^4 x (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx &= - \int u^4 (1 + u^2) du \\ &= - \int (u^4 + u^6) du = - \left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + c = - \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^7 x}{7} + c \end{aligned}$$

$$\int \cot^5 x \csc^5 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \cot^5 x \csc^5 x dx &= \int \cot^4 x \csc^4 x \csc x \cot x dx \\ &= \int (\cot^2 x)^2 \csc^4 x \csc x \cot x dx \\ &= \int (\csc^2 x - 1)^2 \csc^4 x \csc x \cot x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \csc x$

$$du = -\csc x \cot x dx \implies -du = \csc x \cot x dx$$

$$\begin{aligned} \int (\csc^2 x - 1)^2 \csc^4 x \csc x \cot x dx &= - \int (u^2 - 1)^2 u^4 du \\ &= - \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^4 du = - \int (u^8 - 2u^6 + u^4) du \\ &= - \left(\frac{u^9}{9} - 2 \frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} \right) + c = - \frac{\csc^9 x}{9} + 2 \frac{\csc^7 x}{7} - \frac{\csc^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

خامساً - التكاملات $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$ تكامل هذه التكاملات باستخدام المتطابقات التالية :

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x])$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} (\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$\int \sin 7x \cos 5x \, dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin 7x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} (\sin[(7-5)x] + \sin[(7+5)x]) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 12x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \sin 2x \, (2) \, dx + \frac{1}{2} \frac{1}{12} \int \sin 12x \, (12) \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{24} \cos 12x + c \end{aligned}$$

$$\int \sin 4x \sin 3x \, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \sin 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} (\cos[(4-3)x] - \cos[(4+3)x]) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 7x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \frac{1}{7} \int \cos 7x \, (7) \, dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + c \end{aligned}$$

3.5 التعويضات المثلثية

تستخدم التعويضات المثلثية لحل التكاملات التي تحتوي على الجذور $\sqrt{x^2 - a^2}$ ، $\sqrt{a^2 + x^2}$ ، $\sqrt{a^2 - x^2}$ حيث $a > 0$ تقوم التعويضات المثلثية بتحويل هذه التكاملات إلى تكاملات لقوى دوال مثلثية وبشكل تفصيلي :

$$(1) \text{ نستخدم التعويض } x = a \sin \theta \text{ حيث } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ للتخلص من } \sqrt{a^2 - x^2} \text{ كالتالي :}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

$$(2) \text{ نستخدم التعويض } x = a \tan \theta \text{ حيث } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ للتخلص من } \sqrt{a^2 + x^2} \text{ كالتالي :}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta$$

$$(3) \text{ نستخدم التعويض } x = a \sec \theta \text{ حيث } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ للتخلص من } \sqrt{x^2 - a^2} \text{ كالتالي :}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{4^2 - x^2}} dx$$

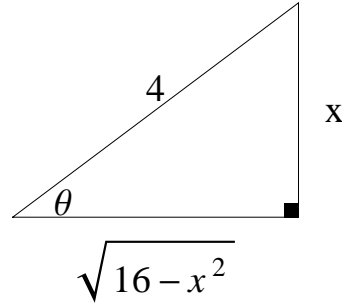
$$x = 4 \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{x}{4}$$

$$dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx = \int \frac{4 \cos \theta}{16 \sin^2 \theta \sqrt{16 - 16 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{4 \cos \theta}{16 \sin^2 \theta \sqrt{16 \cos^2 \theta}} d\theta = \int \frac{4 \cos \theta}{16 \sin^2 \theta 4 \cos \theta} d\theta$$

$$= \int \frac{1}{16 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{16} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{16} \cot \theta + c$$



$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx = -\frac{1}{6} \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3^2}} dx$$

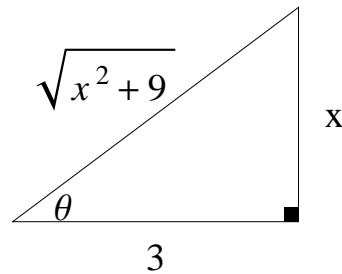
$$x = 3 \tan \theta \implies \tan \theta = \frac{x}{3} \quad \text{نستخدم التعويض}$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{\sqrt{9 \tan^2 \theta + 9}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{\sqrt{9 (\tan^2 \theta + 1)}} d\theta$$

$$= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{\sqrt{9 \sec^2 \theta}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3 \sec \theta} d\theta$$

$$= \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3} \right| + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx = \int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{(x^2)^2} dx$$

$$x = 5 \sec \theta \implies \sec \theta = \frac{x}{5}$$

$$dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{(x^2)^2} dx = \int \frac{\sqrt{25 \sec^2 \theta - 25}}{(5^2 \sec^2 \theta)^2} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

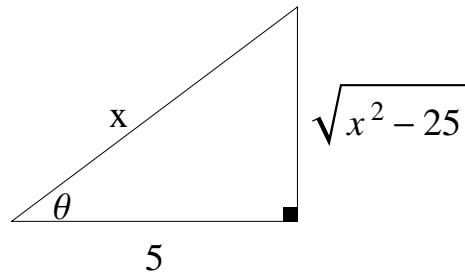
$$= \int \frac{\sqrt{25(\sec^2 \theta - 1)}}{5^4 \sec^4 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{25 \tan^2 \theta}}{5^4 \sec^4 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{5 \tan \theta}{5^4 \sec^4 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta = \int \frac{5^2 \sec \theta \tan^2 \theta}{5^4 \sec^4 \theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2 \theta}{5^2 \sec^3 \theta} d\theta = \frac{1}{25} \int \tan^2 \theta \frac{1}{\sec^3 \theta} d\theta = \frac{1}{25} \int \frac{\sin^2 \theta \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{25} \int (\sin \theta)^2 \cos \theta d\theta = \frac{1}{25} \frac{(\sin \theta)^3}{3} + c = \frac{1}{75} (\sin \theta)^3 + c$$



$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx = \frac{1}{75} \left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{x} \right)^3 + c$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (4)$$

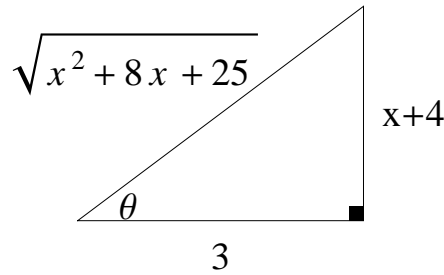
الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{1}{((x^2 + 8x + 16) + 9)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \int \frac{1}{((x + 4)^2 + 3^2)^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned}$$

$$x + 4 = 3 \tan \theta \implies \tan \theta = \frac{x + 4}{3} \text{ نستخدم التعويض}$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{((x + 4)^2 + 3^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9 \tan^2 \theta + 9)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9(\tan^2 \theta + 1))^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(3^2 \sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3^3 \sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3^2} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{9} \sin \theta + c \end{aligned}$$



$$\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{9} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x + 25}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - x^2}} dx$$

نستخدم التعويض $x = 2 \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{x}{2}$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4(1-\sin^2 \theta)}} d\theta = \int \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = \int 1 d\theta = \theta + c = \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c$$

لاحظ أن $\sin \theta = \frac{x}{2} \implies \theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right)$

4.5 الكسور الجزئية

تستخدم الكسور الجزئية لحساب تكاملات الدوال الكسرية ، والدالة الكسرية هي حاصل قسمة كثيرتي حدود .

العامل الخطي : هو كثيرة حدود من الدرجة الأولى ، أي أنه على الصورة $ax + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

مثال : $2x$ ، $x - 3$ ، $4x + 1$ جميعها عوامل خطية .

المقدار التربيعي غير القابل للاختزال : هو كثيرة حدود من الدرجة الثانية ليس لها حلول حقيقية ، أي أنه على الشكل $ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac < 0$.

مثال : $x^2 + 1$ ، $x^2 + 9$ ، $x^2 + x + 1$ جميعها مقادير تربيعية غير قابلة للاختزال .

أما المقدار التربيعي $x^2 - 4$ فهو قابل للاختزال

$$\text{لأن } x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

مبرهنة : إذا كانت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ دالة كسرية ودرجة $g(x)$ أصغر من درجة $h(x)$ ، فإن هناك كسوراً F_1, F_2, \dots, F_n تحقق

$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_n(x)$ وتكون كل $F_i(x)$ إما على الصورة $\frac{A}{(ax + b)^m}$ (حيث $m \in \mathbb{N}$) أو على الصورة

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^m} \text{ حيث } b^2 - 4ac < 0$$

مساهمة العامل الخطي $(ax + b)^m$ تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_m}{(ax + b)^m}$$

حيث A_1, A_2, \dots, A_m ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مساهمة المقدار التربيعي غير القابل للاختزال $(ax^2 + bx + c)^m$ تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1 + B_1x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2x}{(ax^2 + bx + c)^2} \dots + \frac{A_m + B_mx}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

حيث $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مثال : أكتب الدوال الكسرية التالية على هيئة كسور جزئية

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3} \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x - 3}$$

$$\frac{x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+4x} = \frac{x+4}{x(x+2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} \quad (3)$$

الحل :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x-2}{x^4+x^2} \quad (4)$$

الحل :

$$\frac{x-2}{x^4+x^2} = \frac{x-2}{x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x^2+9)} \quad (5)$$

الحل :

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+9} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+1} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4+2}{x^3+x} \quad (6)$$

الحل : باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\frac{x^4+2}{x^3+x} = x + \frac{-x^2+2}{x(x^2+1)} = x + \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3}$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A_1(x+3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{A_2(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$x - 7 = A_1(x + 3) + A_2(x - 2)$$

$$\text{ضع } x = 2$$

$$2 - 7 = A_1(2 + 3) \implies -5 = 5A_1 \implies A_1 = -1$$

$$\text{ضع } x = -3$$

$$-3 - 7 = A_2(-3 - 2) \implies -10 = -5A_2 \implies A_2 = 2$$

$$\frac{x - 7}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{-1}{x - 2} + \frac{2}{x + 3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 7}{x^2 + x - 6} dx &= \int \left(\frac{-1}{x - 2} + \frac{2}{x + 3} \right) dx \\ &= \int \frac{-1}{x - 2} dx + \int \frac{2}{x + 3} dx = - \int \frac{1}{x - 2} dx + 2 \int \frac{1}{x + 3} dx \\ &= -\ln|x - 2| + 2\ln|x + 3| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} dx \quad (2)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} &= \frac{7x^2 + 11x + 5}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{7x^2 + 11x + 5}{x(x + 1)^2} \\ &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A_1(x + 1)^2}{x(x + 1)^2} + \frac{A_2 x(x + 1)}{(x + 1)x(x + 1)} + \frac{A_3 x}{x(x + 1)^2}$$

$$7x^2 + 11x + 5 = A_1(x + 1)^2 + A_2 x(x + 1) + A_3 x$$

$$7x^2 + 11x + 5 = A_1(x^2 + 2x + 1) + A_2x^2 + A_2x + A_3x$$

$$7x^2 + 11x + 5 = A_1x^2 + 2A_1x + A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x$$

$$7x^2 + 11x + 5 = (A_1 + A_2)x^2 + (2A_1 + A_2 + A_3)x + A_1$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$A_1 + A_2 = 7 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$2A_1 + A_2 + A_3 = 11 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A_1 = 5 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$A_2 = 7 - A_1 = 7 - 5 = 2$$

من المعادلة (2) نستنتج أن

$$10 + 2 + A_3 = 11 \implies A_3 = 11 - 12 = -1$$

$$\frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx - \int (x+1)^{-2} dx$$

$$= 5 \ln |x| + 2 \ln |x+1| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x} dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x-2 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$A+B=0 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$C=1 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A=-2 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$-2+B=0 \implies B=2$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= -2 \ln |x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + 4}$$

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{(B_1x + C_1)(x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} + \frac{(B_2x + C_2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$$

$$3 = (B_1x + C_1)(x^2 + 4) + (B_2x + C_2)(x^2 + 1)$$

$$3 = B_1x^3 + 4B_1x + C_1x^2 + 4C_1 + B_2x^3 + B_2x + C_2x^2 + C_2$$

$$3 = (B_1 + B_2)x^3 + (C_1 + C_2)x^2 + (4B_1 + B_2)x + (4C_1 + C_2)$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$B_1 + B_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$4B_1 + B_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (3)$$

$$4C_1 + C_2 = 3 \quad \rightarrow \quad (4)$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (3) نحصل على :

$$3B_1 = 0 \implies B_1 = 0$$

من المعادلة (1) نستنتج أن : $B_2 = 0$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (4) نحصل على :

$$3C_1 = 3 \implies C_1 = 1$$

من المعادلة (2) نستنتج أن : $C_2 = -1$

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

5.5 تعويضات متفرقة

أولاً - التكاملات التي تحتوي على قوى كسرية
إذا كان التكامل يحتوي على قوى كسرية للمتغير x ، نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{n}}$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه القوى فنستبدل القوى الكسرية بقوى صحيحة .

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} dx$$

نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow x = u^6$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} dx = \int \frac{6u^5}{u^3 + u^2} du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(u+1)} du = \int \frac{6u^3}{u+1} du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^3}{u+1} du = \int \left(6u^2 - 6u + 6 - \frac{6}{u+1} \right) du$$

$$= 6 \frac{u^3}{3} - 6 \frac{u^2}{2} + 6u - 6 \ln |u+1| + c = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6 \ln |u+1| + c$$

$$= 2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 - 3 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} + 1 \right| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} + 1 \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} dx$$

نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow x = u^6$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} dx &= \int \frac{6u^5}{u^3 + u} du \\
&= \int \frac{6u^5}{u(u^2 + 1)} du = \int \frac{6u^4}{u^2 + 1} du \\
&\text{باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود} \\
\int \frac{6u^4}{u^2 + 1} du &= \int \left(6u^2 - 6 + \frac{6}{u^2 + 1} \right) du \\
&= 6 \frac{u^3}{3} - 6u + 6 \tan^{-1} u + c = 2u^3 - 6u + 6 \tan^{-1} u + c \\
&= 2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \tan^{-1} \left(x^{\frac{1}{6}} \right) + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \tan^{-1} \left(x^{\frac{1}{6}} \right) + c
\end{aligned}$$

ثانياً - التكاملات التي تحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$:
إذا كان التكامل يحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$ نستخدم التعويض $u = \sqrt[n]{g(x)}$ لحل التكامل .

مثال : أحسب التكاملين التاليين :

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx \quad (1)$$

الحل : نستخدم التعويض

$$\begin{aligned}
u = \sqrt{1 + \sqrt{x}} &\implies 1 + \sqrt{x} = u^2 \implies \sqrt{x} = u^2 - 1 \implies x = (u^2 - 1)^2 \\
dx &= 2(u^2 - 1)(2u) du = (4u^3 - 4u) du \\
\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx &= \int u(4u^3 - 4u) du = \int (4u^4 - 4u^2) du \\
&= 4 \frac{u^5}{5} - 4 \frac{u^3}{3} + c = \frac{4}{5} \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right)^5 - \frac{4}{3} \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right)^3 + c
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} dx \quad (2)$$

الحل : نستخدم التعويض

$$\begin{aligned}
u = \sqrt{e^x + 1} &\implies e^x + 1 = u^2 \implies e^x = u^2 - 1 \implies x = \ln |u^2 - 1| \\
dx &= \frac{2u}{u^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2 - 1} du = \int \frac{2}{u^2 - 1} du$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{2}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{A_1}{u - 1} + \frac{A_2}{u + 1}$$

$$\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{A_1(u + 1)}{(u - 1)(u + 1)} + \frac{A_2(u - 1)}{(u + 1)(u - 1)}$$

$$2 = A_1(u + 1) + A_2(u - 1)$$

$$\text{ضع } u = 1$$

$$2 = A_1(1 + 1) \implies 2A_1 = 2 \implies A_1 = 1$$

$$\text{ضع } u = -1$$

$$2 = A_2(-1 - 1) \implies -2A_2 = 2 \implies A_2 = -1$$

$$\int \frac{2}{u^2 - 1} du = \int \left(\frac{1}{u - 1} + \frac{-1}{u + 1} \right) du$$

$$= \ln |u - 1| - \ln |u + 1| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \ln |\sqrt{e^x + 1} - 1| - \ln |\sqrt{e^x + 1} + 1| + c$$

باب 6

صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة

1.6 صيغ عدم التعيين

أولاً - حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$
مبرهنة (قاعدة لوبيتال):

إذا كانت الدالتان $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابلتين للاشتقاق على فترة I تحوي c (باستثناء ربما عند c) وكانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I - \{c\}$

. وكان الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الصيغة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وكانت $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

أمثلة : أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (4)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

لاحظ أن $e^x \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$

ثانياً - حالة عدم التعيين $0 \cdot \infty$

يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

1.6 . صيغ عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (\infty \cdot 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

لاحظ أن $e^{x^2} \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad (0 \cdot -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

ثالثاً - حالة عدم التعيين $\infty - \infty$

يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{(x-1) \frac{1}{x} + \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\left(\frac{x-1+x \ln x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x-1+x \ln x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \end{aligned}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x-1+x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{1+1+\ln x} = \frac{-1}{1+1+0} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + x e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(x+1)e^x - 1} \right) \quad \left(\frac{0}{0} \right) \end{aligned}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(x+1)e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x + (x+1)e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x (1 + (x+1))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

رابعاً - حالات عدم التعيين 0^0 , ∞^0 , 1^∞
باستخدام الدالة اللوغاريتمية تحول جميع هذه الحالات إلى صيغة عدم التعيين $0 \cdot \infty$

مثال : أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad (0^0)$$

$$y = x^x \text{ ضع}$$

$$\ln |y| = \ln |x^x| = x \ln |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln |y| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln |x| \quad (0 \cdot -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |x|}{x^{-1}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |x|}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \quad (\infty^0)$$

$$y = (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \text{ ضع}$$

$$\ln |y| = \ln \left| (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \right| = \frac{1}{x} \ln |1 + e^{2x}| = \frac{\ln |1 + e^{2x}|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |y| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |1 + e^{2x}|}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |1 + e^{2x}|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \quad (\infty^0)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{2x})^{\frac{1}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad (1^\infty)$$

$$y = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad \text{ضع}$$

$$\ln |y| = \ln \left| \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \right| = x \ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |y| = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right| \quad (\infty \cdot 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| 1 + \frac{3}{x} \right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-\frac{3}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{1 + 0} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

2.6 التكاملات المعتلة

أولاً - حالة الفترة غير المحدودة :

(1) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, \infty)$. نعرف التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $(-\infty, b]$. نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

$$\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t (x-1)^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(x-1)} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{t-1} - \frac{-1}{2-1} \right] = (0+1) = 1 \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |x-1|]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |t-1| - \ln(1)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln |t-1| = \infty \end{aligned}$$

التكامل المعتل متباعد

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{2x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_t^0 e^{2x} (2) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^0}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+9} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{x^2+9} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{x^2+3^2} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+3^2} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_s^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_0^t \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{0}{3} \right) - \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{s}{3} \right) \right] \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{t}{3} \right) - \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{0}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \left[0 - \frac{1}{3} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right) - 0 \right] = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

ثانياً - حالة الدالة غير المحدودة

(1) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $(a, b]$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ماعدا عند $c \in (a, b)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x) dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \infty \text{ لاحظ أن}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(- \int_0^t (2-x)^{-\frac{1}{2}} (-1) dx \right) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(- \left[\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^t \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(-2 \left[(2-t)^{\frac{1}{2}} - (2-0)^{\frac{1}{2}} \right] \right) = -2[0 - \sqrt{2}] = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_3^4 \frac{1}{x-3} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty \text{ لاحظ أن}$$

$$\begin{aligned}
&\int_3^4 \frac{1}{x-3} dx = \lim_{x \rightarrow 3^+} \int_t^4 \frac{1}{x-3} dx = \lim_{x \rightarrow 3^+} [\ln|x-3|]_t^4 \\
&= \lim_{x \rightarrow 3^+} [\ln(1) - \ln|t-3|] = \lim_{x \rightarrow 3^+} [0 - \ln|t-3|] = -(-\infty) = \infty
\end{aligned}$$

التكامل المعتل متباعد

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \infty \text{ لاحظ أن}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t (x-1)^{-\frac{1}{3}} dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^3 (x-1)^{-\frac{1}{3}} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_0^t + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_s^3 \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(0-1)^{\frac{2}{3}} \right] + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{2}(3-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}} \right] \\
&= \left[\frac{3}{2}(0) - \frac{3}{2}(1) \right] + \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}(0) \right] = \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \infty \text{ لاحظ أن}$$

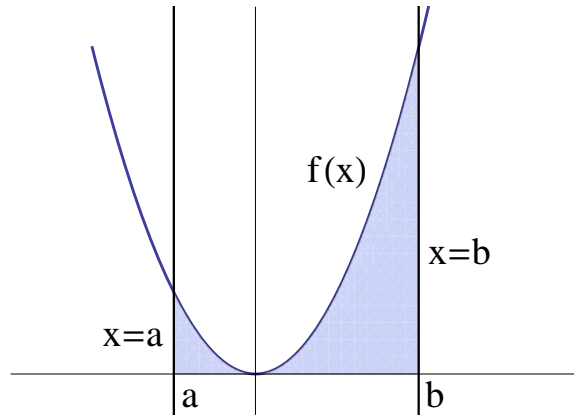
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 \int_t^1 \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2 + 1} dx \right) + \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 \int_1^s \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2 + 1} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{x})]_t^1 \right) + \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{x})]_1^s \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{1}) - \tan^{-1}(\sqrt{t})] \right) \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 [\tan^{-1}(\sqrt{s}) - \tan^{-1}(\sqrt{1})] \right) \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] + 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) + 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب

باب 7

تطبيقات التكامل

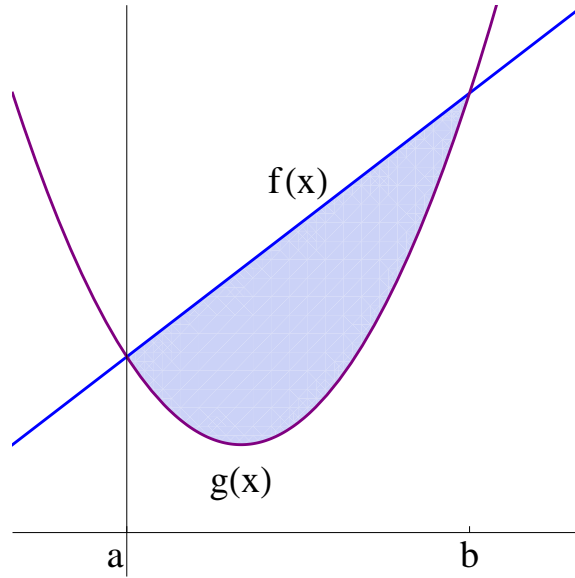
1.7 المساحات



إذا كانت f دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور السينات

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي



إذا كانت الدالتان f و g متقاطعتين عند $x = a$ و $x = b$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in (a, b)$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ هي $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $x = -1$ و $x = 2$ و $y = 0$

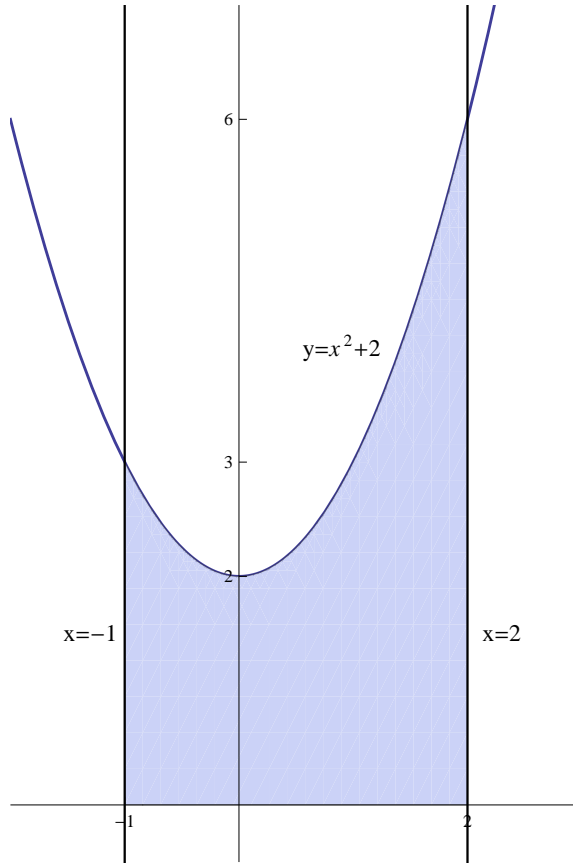
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1, 0)$

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x



$$A = \int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^2$$

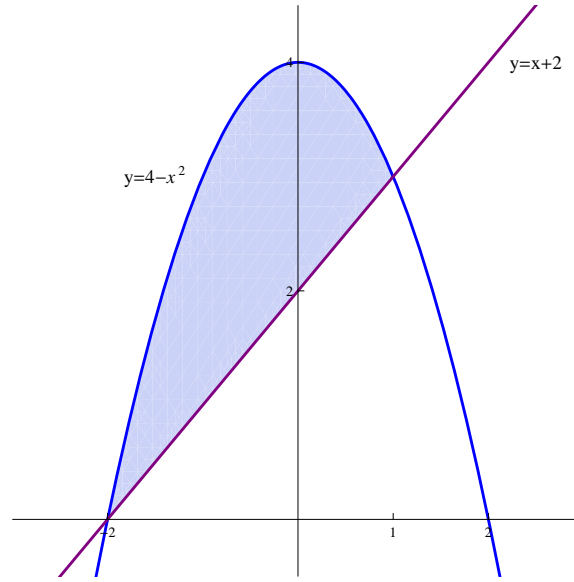
$$= \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2(2) \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right) \right] = \left[\left(\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{-1}{3} - 2 \right) \right] = \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 2 = 9$$

(2) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\implies x = -2, x = 1$$

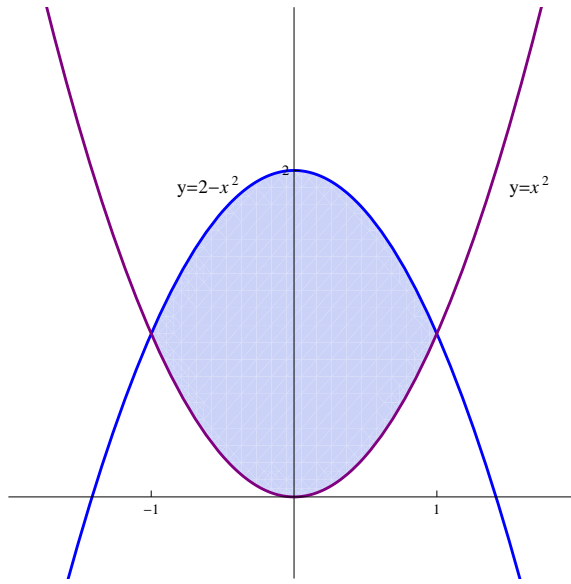
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(3) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$

الحل :

المنحنى $y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0$$

$$\implies (x - 1)(x + 1) = 0 \implies x = -1, x = 1$$

$$A = \int_{-1}^1 [(2 - x^2) - x^2] dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

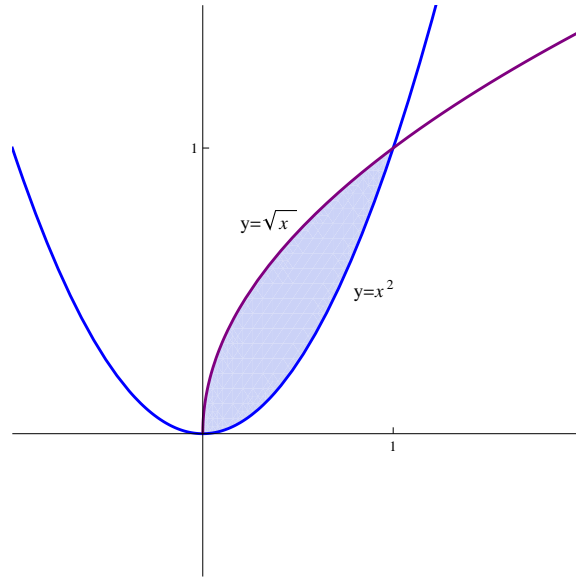
$$= \left[\left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) \right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}$$

(4) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$

الحل:

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي من القطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه النقطة $(0, 0)$ وفتحته لليمين



نقاط تقاطع المنحنيين $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$:

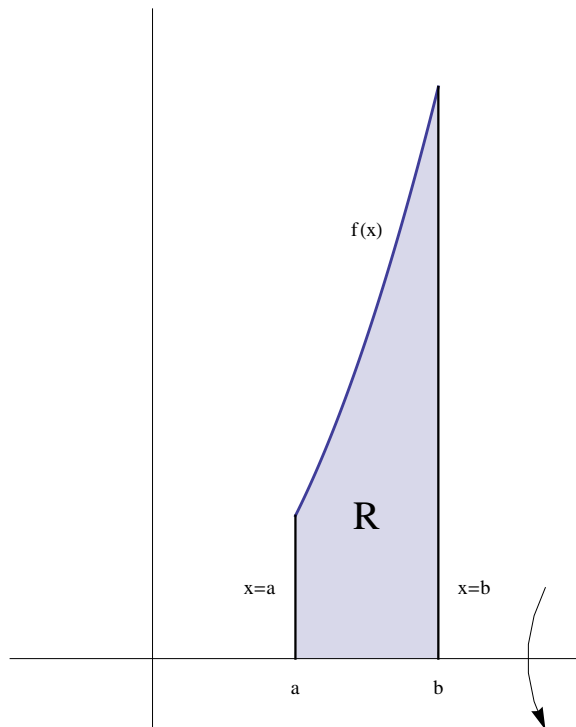
$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0$$

$$\implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0, x = 1$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \int_0^1 [x^{\frac{1}{2}} - x^2] dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - (0 - 0) \right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.7 حجم أجسام الدوران

أولاً - الأقراص الأسطوانية :



إذا كانت الدالة f موجبة ومتصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت R المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور x والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

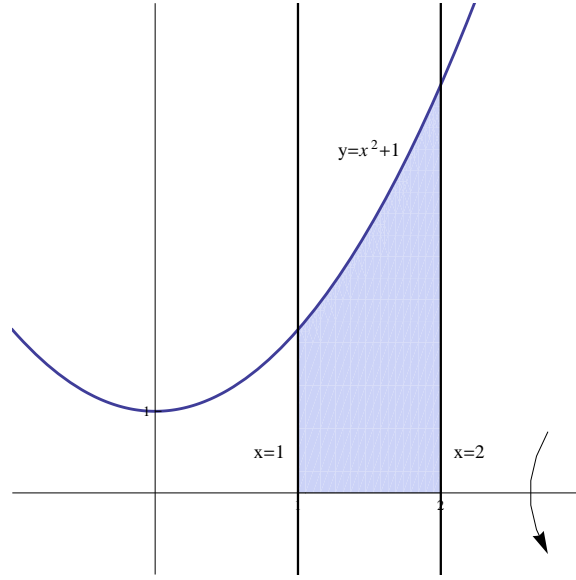
ملاحظة : نستخدم طريقة الأقراص الأسطوانية عندما تكون منطقة الدوران R تلامس بالكامل محور الدوران .

مثال :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $x = 1$ و $x = 2$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

- المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .
- المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.
- المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.
- المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراس الأسطوانية :

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x \right]_1^2 = \pi \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) \right] \\
 &= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 1 \right] = \pi \left(\frac{31}{5} + \frac{14}{3} + 1 \right) \\
 &= \left(\frac{93 + 70 + 15}{15} \right) \pi = \frac{178}{15} \pi
 \end{aligned}$$

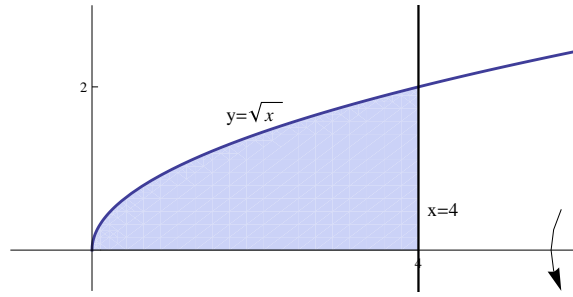
(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$ و $x = 4$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0, 0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $x = 4$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(4, 0)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

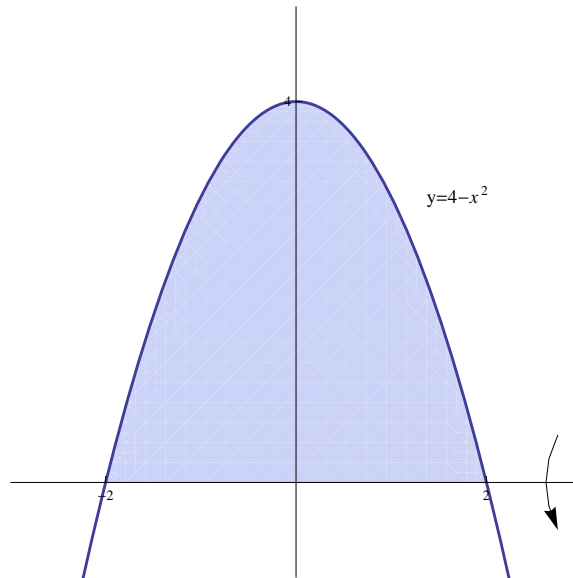
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2} \right) = 8\pi \end{aligned}$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = 4 - x^2$ مع $y = 0$:

$$4 - x^2 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = -2, x = 2$$

باب 7. تطبيقات التكامل

باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

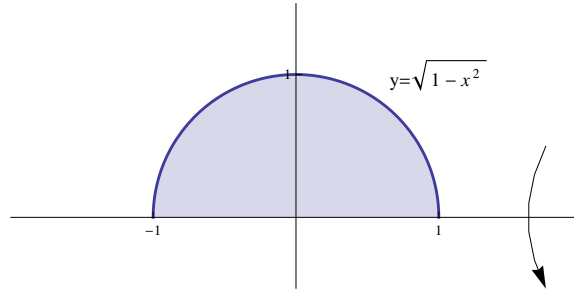
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx - \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\
 &= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \pi \left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) - \left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{5} \right) \right] \\
 &= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \pi \left(64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5} \right) = \frac{512}{15} \pi
 \end{aligned}$$

(4) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = \sqrt{1-x^2}$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ يمثل النصف العلوي للدائرة $y^2 + x^2 = 1$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .

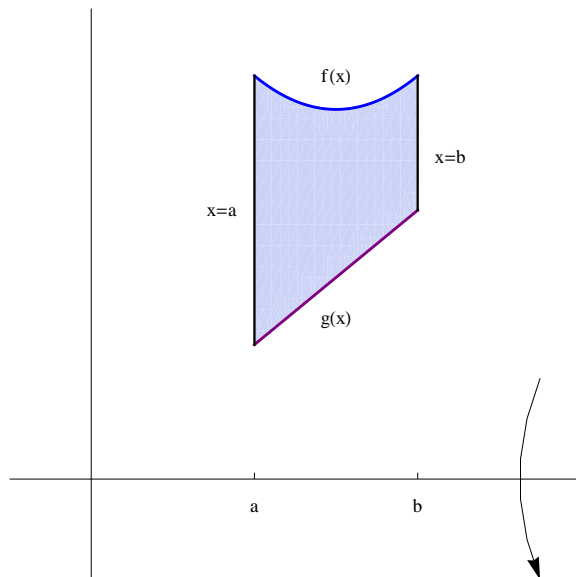


نقاط تقاطع المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ مع $y = 0$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-x^2} = 0 &\implies 1-x^2 = 0 \implies x^2 = 1 \\
 &\implies x = -1, x = 1
 \end{aligned}$$

باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 &= \pi \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi
 \end{aligned}$$



إذا كانت f و g دالتين موجبتين ومتصلتين على الفترة $[a, b]$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in [a, b]$ ، وكانت R هي المنطقة المحصورة بالمنحنيات $f(x)$ و $g(x)$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول

$$\text{محور } x \text{ يساوي } V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

ملاحظة : نستخدم طريقة الوردات حينها لا تكون منطقة الدوران ملاصقة بالكامل لمحور الدوران .

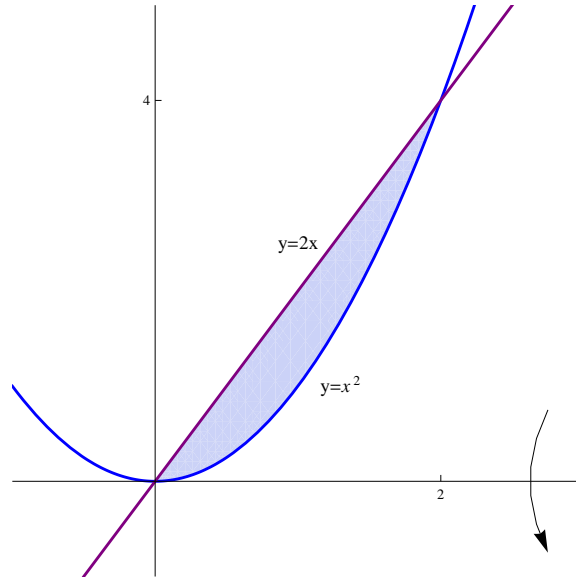
أمثلة :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويبرر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2x$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0$$

$$\implies x = 0, x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات:

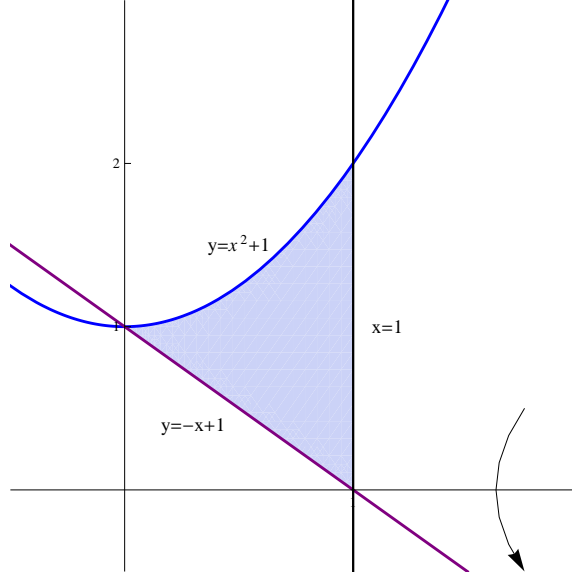
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5} \right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5} \right) \right] \\ &= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{64}{15}\pi \end{aligned}$$

(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $y = -x + 1$ و $x = 1$ حول محور x .

الحل:

المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى.

المنحنى $y = -x + 1$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0, 1)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنى $y = x^2 + 1$ مع المنحنى $y = -x + 1$:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 1 \implies x^2 + x = 0 \implies x(x + 2) = 0 \\ &\implies x = -2, x = 0 \end{aligned}$$

نقطة تقاطع المستقيمين $y = -x + 1$ و $x = 1$ هي النقطة $(1, 0)$

باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(x^2 + 1)^2 - (-x + 1)^2] dx \\ &= \pi \int_0^1 [(x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1)] dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 + x^2 + 2x) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \right) - (0 + 0 + 0) \right] = \frac{23}{15} \pi \end{aligned}$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $y = 1$ و $x = 1$ و $x = 0$ حول محور x .

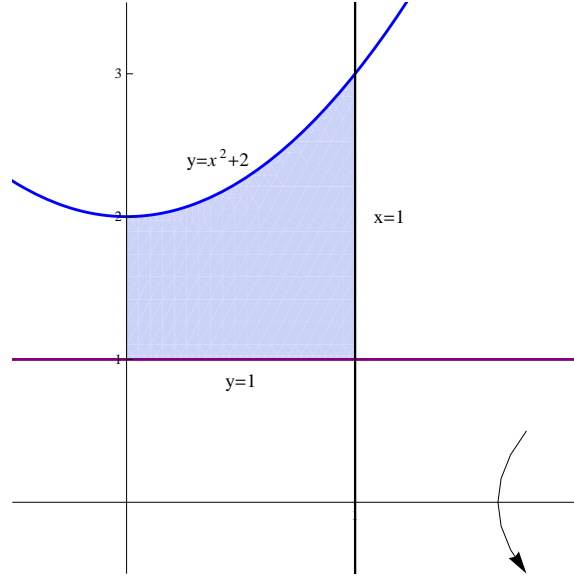
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, 1)$.

باب 7. تطبيقات التكامل

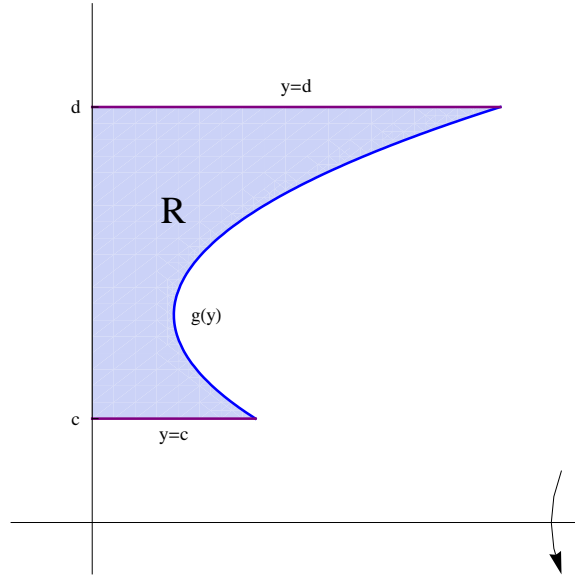
المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.
المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 [(x^2 + 2)^2 - (1)^2] dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4 - 1) dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 3) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 + 3x \right]_0^1 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 3 \right) - (0 + 0 + 0) \right] = \frac{68}{15}\pi
 \end{aligned}$$

ثالثاً - طريقة الشرائح الأسطوانية :



إذا كانت الدالة $g(y)$ دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[c, d]$ و كانت R هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = c$ و $y = d$ و

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y) dy$$

تساوي حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x تساوي

أمثلة :

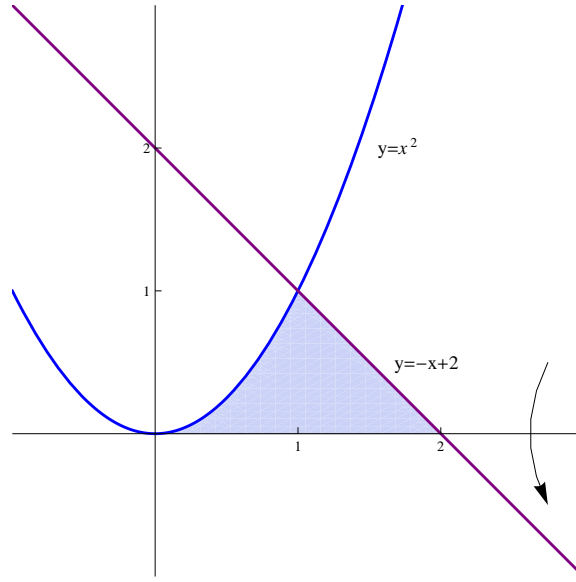
(1) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = -x + 2$ و $y = 0$ ، حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = -x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0, 2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحني $y = x^2$ مع $y = -x + 2$:

$$x^2 = -x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\implies x = -2, x = 1 \implies y = 4, y = 1$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية:

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = -x + 2 \implies x = -y + 2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y [(-y + 2) - \sqrt{y}] dy = 2\pi \int_0^1 y (-y - y^{\frac{1}{2}} + 2) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-y^2 - y^{\frac{3}{2}} + 2y) dy = 2\pi \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + y^2 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + 1 \right) - (0 - 0 + 0) \right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{-5 - 6 + 15}{15} \right) = 2\pi \left(\frac{4}{15} \right) = \frac{8\pi}{15}$$

(2) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x-1}$ و $y = 2$ و $y = 0$ و $x = 0$ ، حول محور x .

الحل:

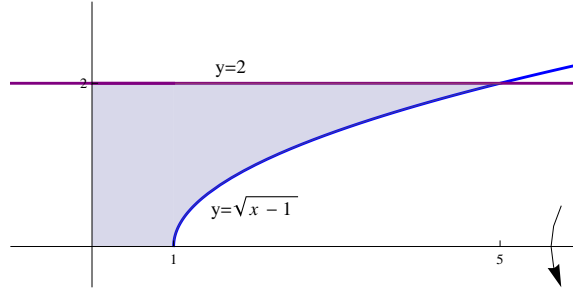
المنحني $y = \sqrt{x-1}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2 + 1$ الذي رأسه $(1, 0)$ وفتحته لليمين.

2.7. حجم أجسام الدوران

المنحنى $y = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, 2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .

المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = \sqrt{x-1} \implies y^2 = x-1 \implies x = y^2 + 1$$

$$V = 2\pi \int_0^2 y (y^2 + 1) dy = 2\pi \int_0^2 (y^3 + y) dy = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right]_0^2$$

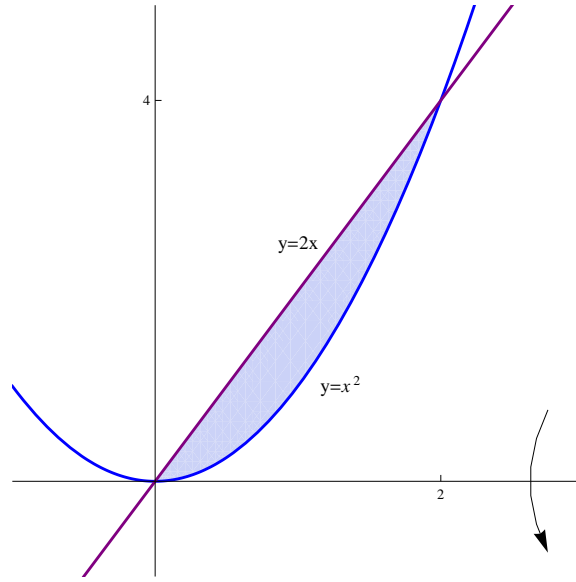
$$= 2\pi \left[\left(\frac{16}{4} + \frac{4}{2} \right) - (0 + 0) \right] = 2\pi (4 + 2) = 12\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى.

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل.



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2x$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0$$

$$\implies x = 0, x = 2 \implies y = 0, y = 4$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية:

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = 2x \implies x = \frac{1}{2}y$$

$$V = 2\pi \int_0^4 y \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y \right) dy = 2\pi \int_0^4 \left(y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 2\pi \left[\left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{(4)^3}{6} \right) - (0 - 0) \right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{64}{5} - \frac{64}{6} \right) = 128\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{128}{30}\pi = \frac{64}{15}\pi$$

3.7 طول القوس

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ فإن طول منحنى الدالة f من $x = a$ إلى $x = b$ يساوي $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

أمثلة :

$$(1) \text{ أحسب طول القوس للدالة } y = 1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \text{ من } x = 0 \text{ إلى } x = 3.$$

الحل :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \int_0^3 (1 + x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}(1 + 3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 0)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{16 - 2}{3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ أحسب طول القوس للدالة } y = \cosh x \text{ من } x = 0 \text{ إلى } x = \ln 2.$$

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x dx = [\sinh x]_0^{\ln 2} \\ &= \sinh(\ln 2) - \sinh(0) = \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

$$(3) \text{ أحسب طول القوس للدالة } y = \sqrt{4 - x^2} \text{ من } x = -2 \text{ إلى } x = 2.$$

الحل :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{(4-x^2) + x^2}{4-x^2}} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx = 2 \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 2 \left[\sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right]_{-2}^2 = 2 [\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)] = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = 2\pi \end{aligned}$$

4.7 مساحة سطح الدوران

إذا كانت الدالة f موجبة وقابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران الدالة f من $x = a$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

إلى $x = b$ حول محور x تساوي

أمثلة :

(1) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \frac{1}{3}x^3$ ، $0 \leq x \leq 1$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \implies f'(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1 + (x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} dx \\ &= \frac{2\pi}{3} \frac{1}{4} \int_0^1 (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} (4x^3) dx = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{3}(1 + x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{3}(1 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 0)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{8} - 1) \end{aligned}$$

(2) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ ، $1 \leq x \leq 4$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x + 1}{4x}} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \frac{\sqrt{4x + 1}}{2\sqrt{x}} dx \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4x + 1} dx = \pi \int_1^4 (4x + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \pi \frac{1}{4} \int_1^4 (4x + 1)^{\frac{1}{2}} (4) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}(4x + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}(17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{6} \left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

(3) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{9 - x^2}$ ، $-3 \leq x \leq 3$ حول محور x .

الحل :

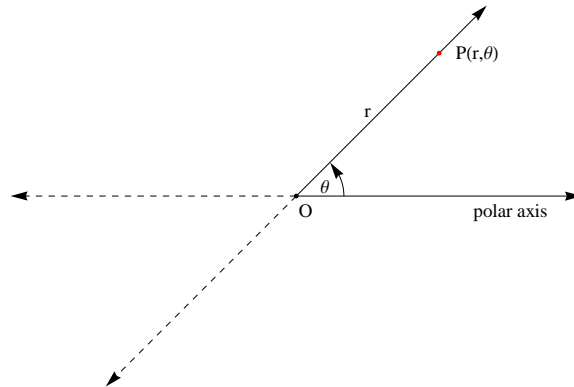
$$\begin{aligned}
f(x) = \sqrt{9-x^2} &\implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\
S &= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9-x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{\frac{(9-x^2)+x^2}{9-x^2}} dx = 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \sqrt{\frac{9}{9-x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dx = 6\pi \int_{-3}^3 1 dx \\
&= 6\pi [x]_{-3}^3 = 6\pi[3 - (-3)] = 6\pi(6) = 36\pi
\end{aligned}$$

باب 8

الإحداثيات القطبية

1.8 الإحداثيات القطبية

تمثل أي نقطة في المستوى الديكارتي بواسطة الزوج المرتب (a, b) حيث يرمز للإحداثي x بينما يرمز للإحداثي y . يمكن تمثيل أي نقطة بطريقة أخرى تسمى الإحداثيات القطبية. يتكون المستوى القطبي من القطب والمحور القطبي. القطب هو نقطة الأصل في المستوى الديكارتي، والمحور القطبي هو محور x في المستوى الديكارتي. إذا كانت P أي نقطة في المستوى نحرك المحور القطبي في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) حتى نصل إلى النقطة P نرسم للمسافة بين P والقطب بالرمز r ، ونرمز للزاوية التي يصنعها المحور بعد تحريكه حتى نصل إلى P بالرمز θ ، نسمي الزوج المرتب (r, θ) بالتمثيل القطبي للنقطة P .



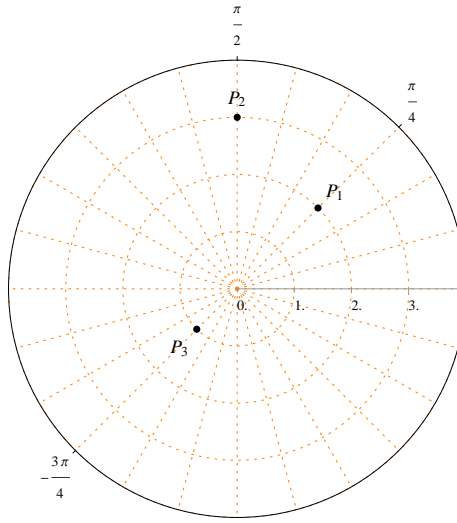
ملاحظات :

- في التمثيل القطبي لنقاط المستوى نستخدم القياس الدائري للزوايا .
 - التمثيل القطبي لنقطة الأصل أو القطب هو $(0, \theta)$ لأي زاوية θ .
 - التمثيل القطبي لأي نقطة ليس وحيداً .
- الإحداثيات القطبية $(-2, -\frac{3\pi}{4})$, $(-2, \frac{5\pi}{4})$, $(2, \frac{\pi}{4})$ تمثل نفس النقطة في المستوى .

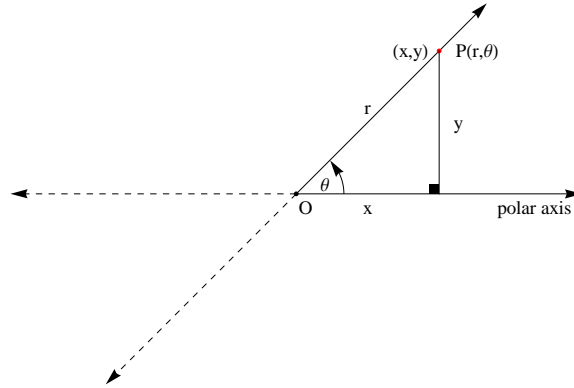
مثال : أرسم النقاط التالية

$$P_1 \left(2, \frac{\pi}{4} \right) , P_2 \left(3, \frac{\pi}{2} \right) , P_3 \left(1, -\frac{3\pi}{4} \right)$$

الحل :



2.8 العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية



- إذا كان (x, y) هو التمثيل الديكارتية للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات القطبية للنقطة P من العلاقتين :

$$r^2 = x^2 + y^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \implies \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

- إذا كان (r, θ) هو التمثيل القطبي للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات الديكارتية للنقطة P من العلاقتين :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \implies x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \implies y = r \sin \theta$$

مثال :

(1) أوجد الإحداثيات القطبية للنقطة التي إحداثياتها الديكارتية هي $(1, \sqrt{3})$

الحل :

$$x = 1, y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \implies \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

الإحداثيات القطبية هي $(2, \frac{\pi}{3})$

(2) أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة التي إحداثياتها القطبية هي $(2, \frac{3\pi}{4})$

الحل :

$$r = 2, \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الإحداثيات الديكارتية هي $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

مثال :

(1) حول المعادلة القطبية $r = 3 \sec \theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 3 \sec \theta \implies r = \frac{3}{\cos \theta} \implies r \cos \theta = 3 \implies x = 3$$

المعادلة الديكارتية $x = 3$ تمثل خط عمودي .

(2) حول المعادلة القطبية $r = 2$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2 \implies r^2 = 4 \implies x^2 + y^2 = 4$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + y^2 = 4$ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .

(3) حول المعادلة القطبية $r = 2 \sin \theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2 \sin \theta \implies r^2 = 2(r \sin \theta) \implies x^2 + y^2 = 2y$$

$$\implies x^2 + y^2 - 2y = 0 \implies x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 1 \implies x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(0, 1)$ ونصف قطرها 1 .

3.8 المنحنيات القطبية

اختبار التناظر :

(1) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المحور القطبي إذا كان $r(\theta) = r(-\theta)$.(2) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كان $r(\theta) = -r(-\theta)$.(3) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول القطب إذا كان $r(\theta) = -r(\theta)$.

أولاً - الخطوط المستقيمة :

(1) الخط المستقيم المار بالقطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية للخط المستقيم المار بالقطب هي $\theta = \theta_0$.

$$\theta = \theta_0 \implies \tan(\theta) = \tan(\theta_0) \implies \frac{y}{x} = \tan(\theta_0) \implies y = \tan(\theta_0) x$$

 $\theta = \theta_0$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب ويميله $\tan(\theta_0)$.

(2) الخط المستقيم العمودي على المحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم العمودي على المحور القطبي هي $r = a \sec \theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$r = a \sec \theta = \frac{a}{\cos \theta} \implies r \cos \theta = a \implies x = a$$

 $r = a \sec \theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r, \theta) = (a, 0)$.

(3) الخط المستقيم الموازي للمحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم الموازي للمحور القطبي هي $r = a \csc \theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in (0, \pi)$.

$$r = a \csc \theta = \frac{a}{\sin \theta} \implies r \sin \theta = a \implies y = a$$

 $r = a \csc \theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r, \theta) = \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

مثال : حول المعادلات القطبية التالية إلى معادلات ديكارتية وارسمها :

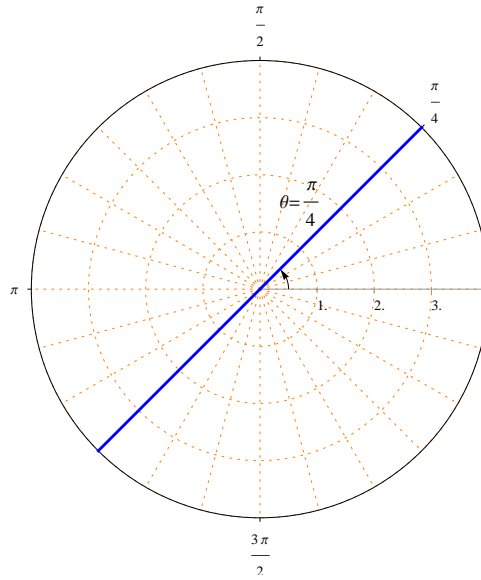
$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

الحل :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \implies \tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \frac{y}{x} = 1 \implies y = x$$

باب 8. الإحداثيات القطبية

المعادلة $\theta = \frac{\pi}{4}$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب وميله 1.

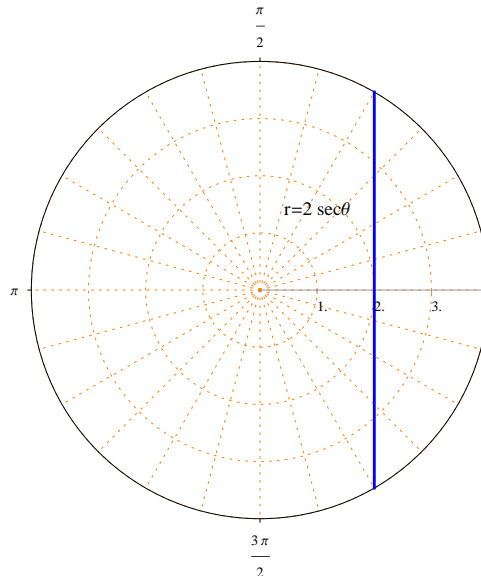


$$r = 2 \sec \theta \quad (2)$$

الحل :

$$r = 2 \sec \theta = \frac{2}{\cos \theta} \implies r \cos \theta = 2 \implies x = 2$$

المعادلة $r = 2 \sec \theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r, \theta) = (2, 0)$.

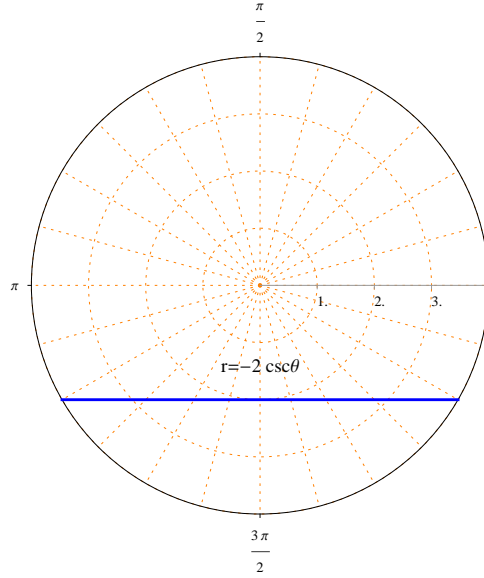


$$r = -2 \csc \theta \quad (3)$$

الحل :

$$r = -2 \csc \theta = \frac{-2}{\sin \theta} \implies r \sin \theta = 2 \implies y = -2$$

المعادلة $r = -2 \csc \theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r, \theta) = (-2, \frac{\pi}{2})$.



ثانياً - الدوائر

(1) الدوائر التي مركزها القطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية $r = a$ حيث $a \neq 0$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها $|a|$.

$$r = a \implies r^2 = a^2 \implies x^2 + y^2 = a^2$$

(2) الدوائر على الصورة $r = a \cos \theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$r = a \cos \theta \implies r^2 = a(r \cos \theta) \implies x^2 + y^2 = ax$$

$$\implies (x^2 - ax) + y^2 = 0 \implies \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a \cos \theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(\frac{a}{2}, 0)$ ونصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a \cos \theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a \cos \theta$ تقع على يمين الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a \cos \theta$ تقع على يسار الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(3) الدوائر على الصورة $r = a \sin \theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$r = a \sin \theta \implies r^2 = a(r \sin \theta) \implies x^2 + y^2 = ay$$

$$\implies x^2 + y^2 - ay = 0 \implies x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a \sin \theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a \sin \theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a \sin \theta$ تقع أعلى المحور القطبي .

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a \sin \theta$ تقع أسفل المحور القطبي .

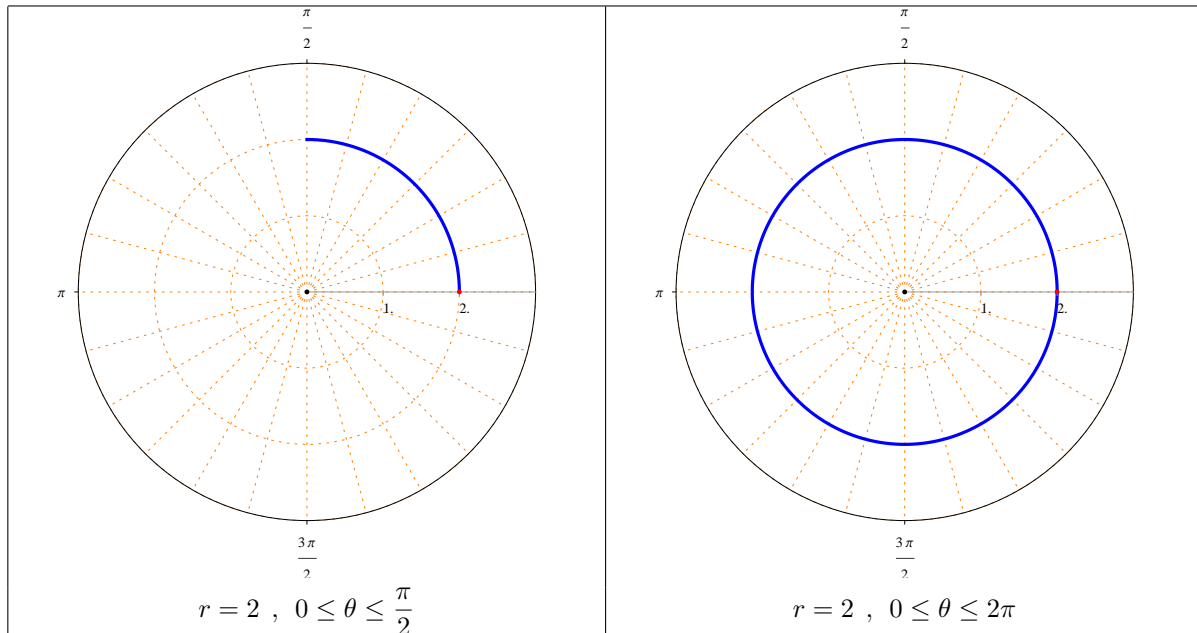
مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية :

$$r = 2 \quad (1)$$

الحل :

المعادلة $r = 2$ تمثل دائرة مركزها القطب و نصف قطرها 2 .

لاحظ أن نقطة البداية هي $(r, \theta) = (2, 0)$.



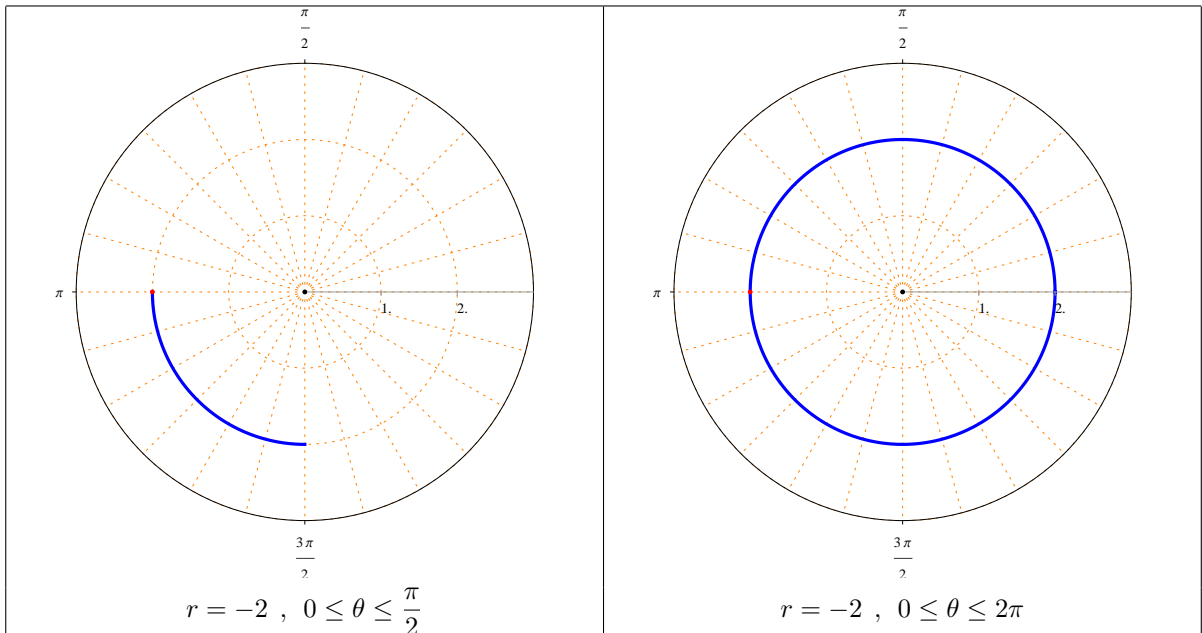
$$r = -2 \quad (2)$$

الحل :

المعادلة $r = -2$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.

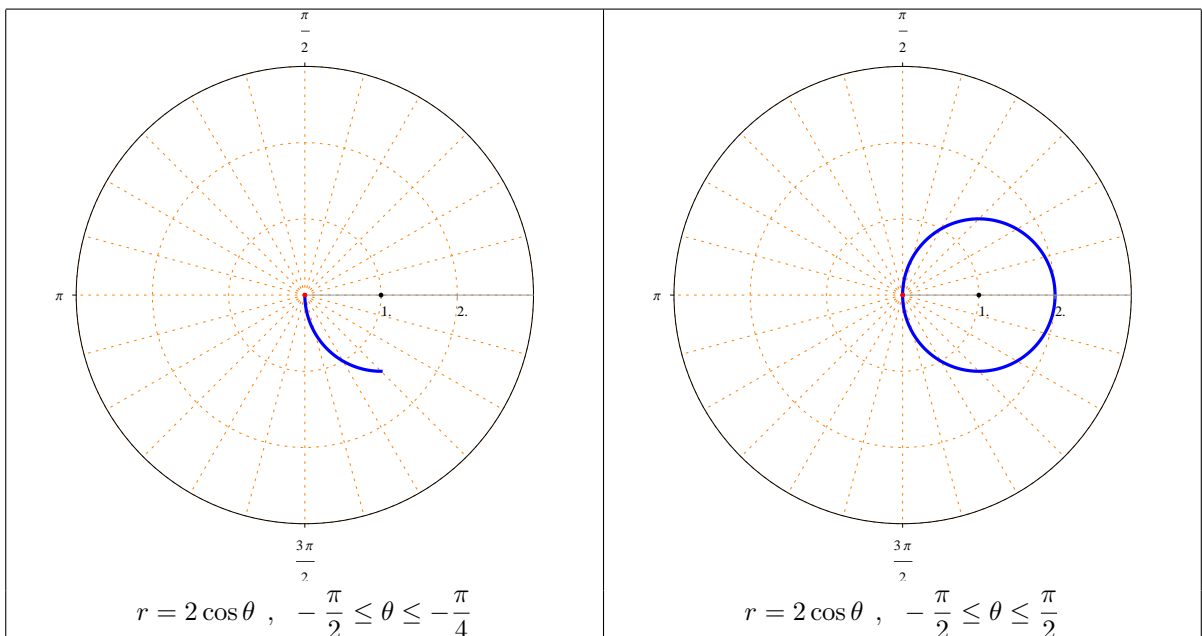
لاحظ أن نقطة البداية هي $(r, \theta) = (-2, 0)$.

باب 8. الإحداثيات القطبية



$$r = 2 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

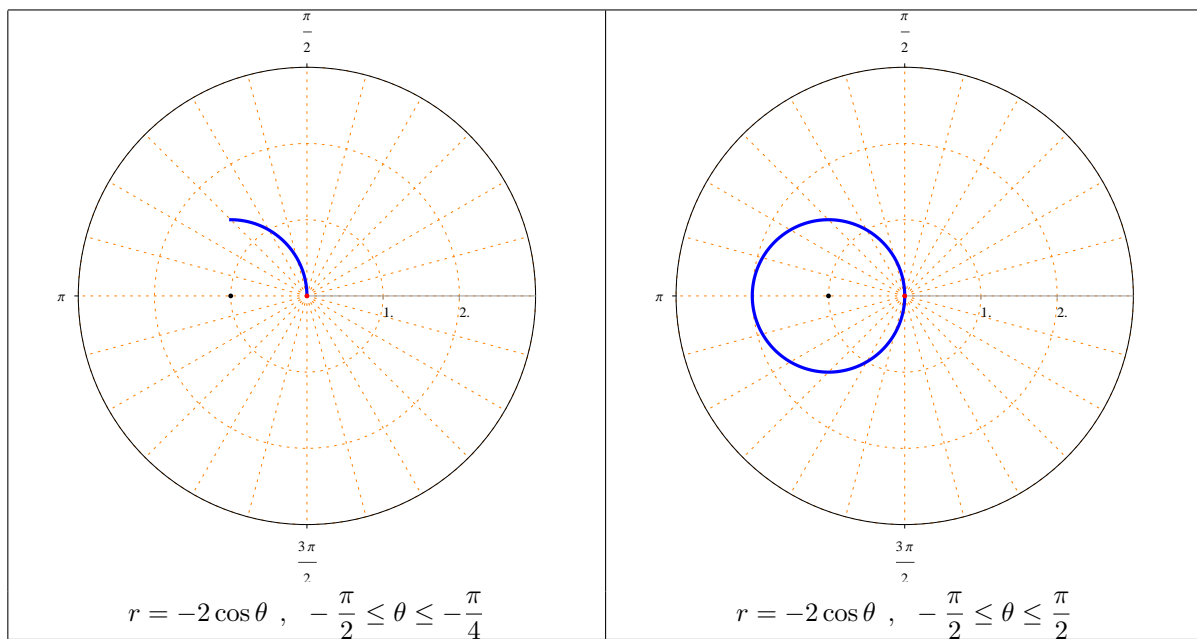
الحل:

المعادلة $r = 2 \cos \theta$ تمثل دائرة مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها 1.

$$r = -2 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

الحل :

المعادلة $r = -2 \cos \theta$ تمثل دائرة مركزها $(r, \theta) = (-1, 0)$ ونصف قطرها 1.

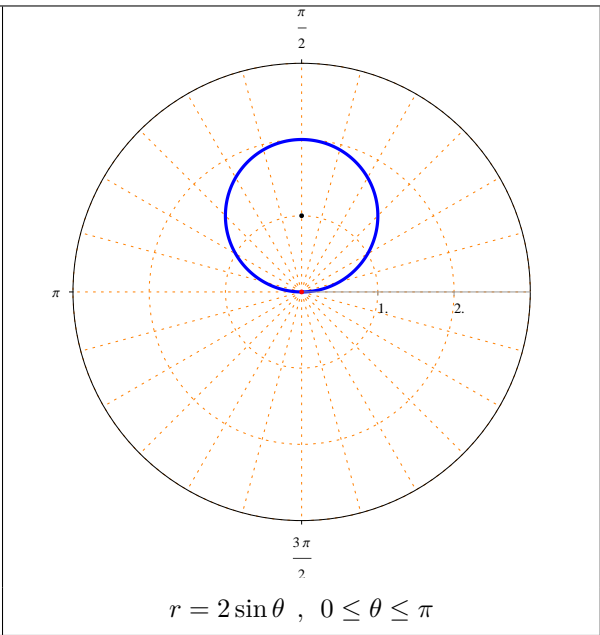
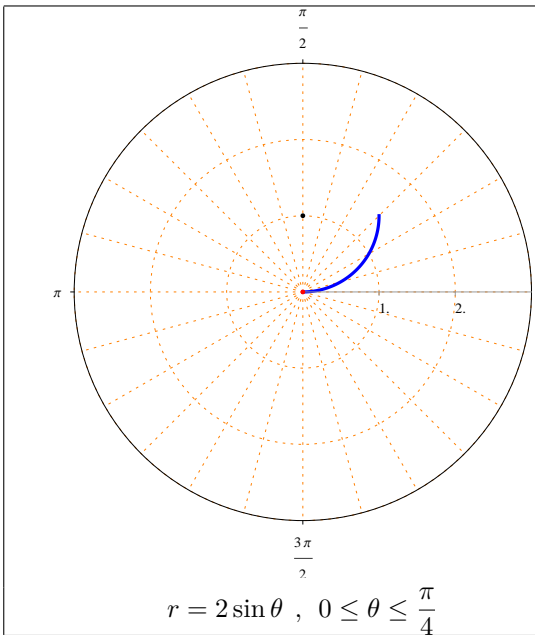


$$r = 2 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (5)$$

الحل :

المعادلة $r = 2 \sin \theta$ تمثل دائرة مركزها $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 1.

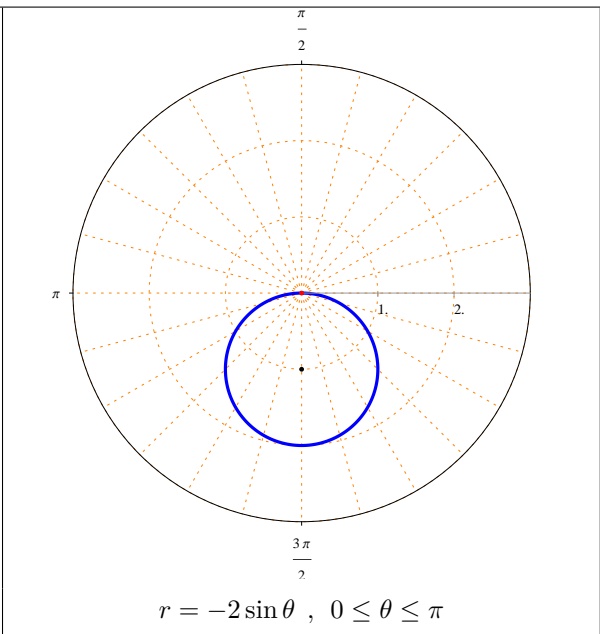
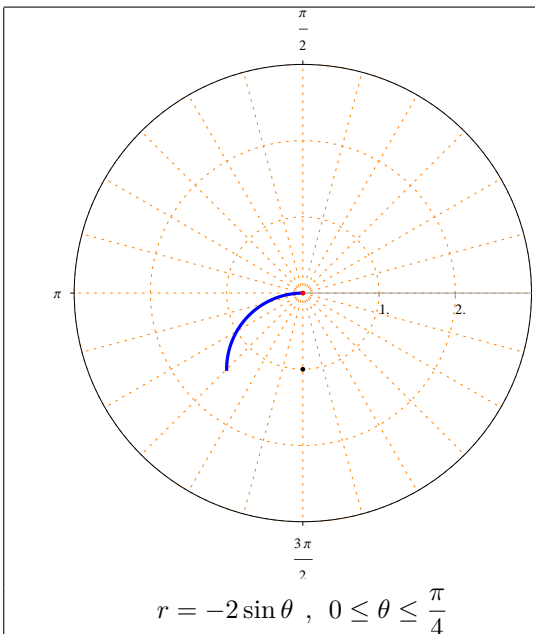
باب 8. الإحداثيات القطبية



$r = -2 \sin \theta , 0 \leq \theta \leq \pi$ (6)

الحل :

المعادلة $r = -2 \sin \theta$ تمثل دائرة مركزها $(-1, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 1.



ثالثاً - المنحنيات القلبية :

(1) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \cos \theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

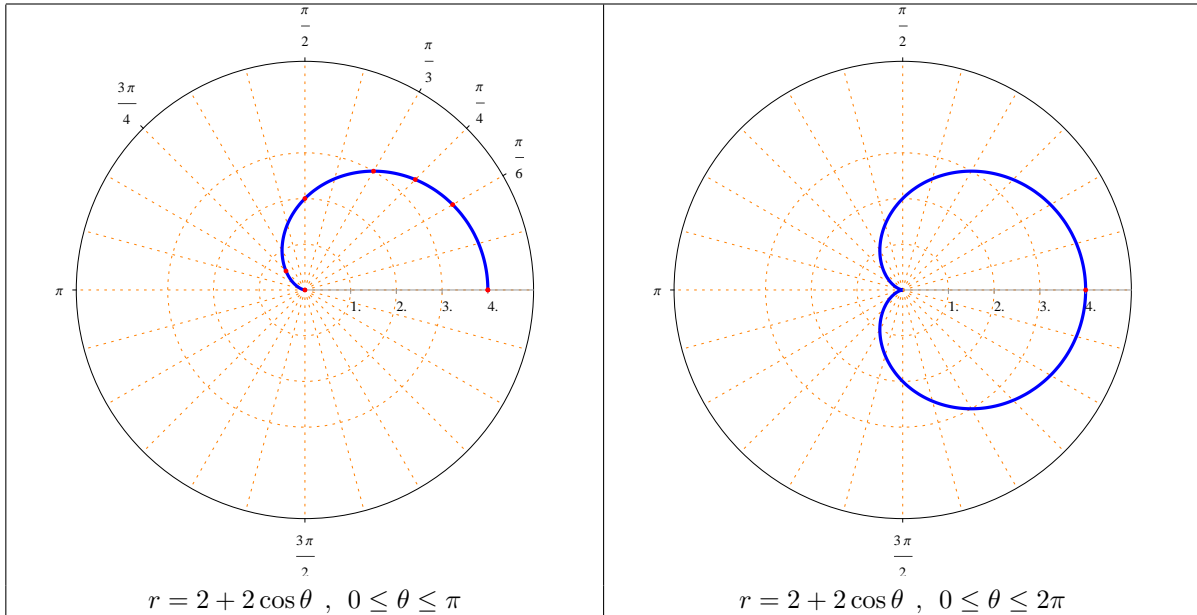
(2) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \sin \theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول الخط المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية

$$r = 2 + 2 \cos \theta \quad (1)$$

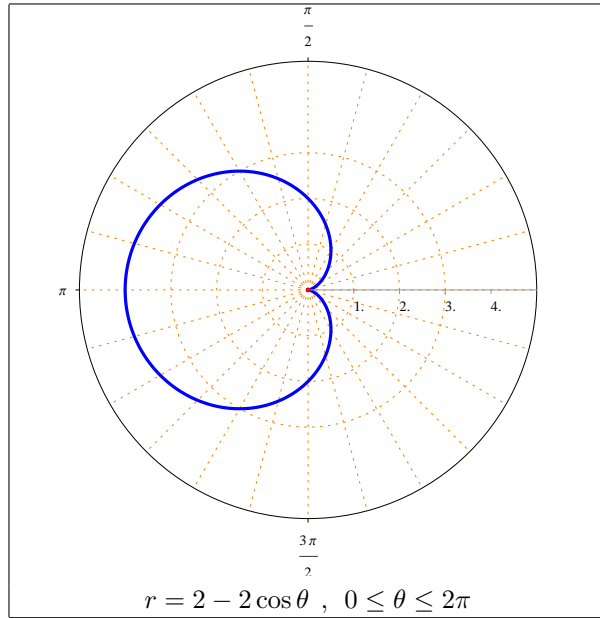
لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .

| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π |
|-------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| $r(\theta)$ | 4 | $2 + \sqrt{3}$ | $2 + \sqrt{2}$ | 3 | 2 | $2 - \sqrt{2}$ | 0 |



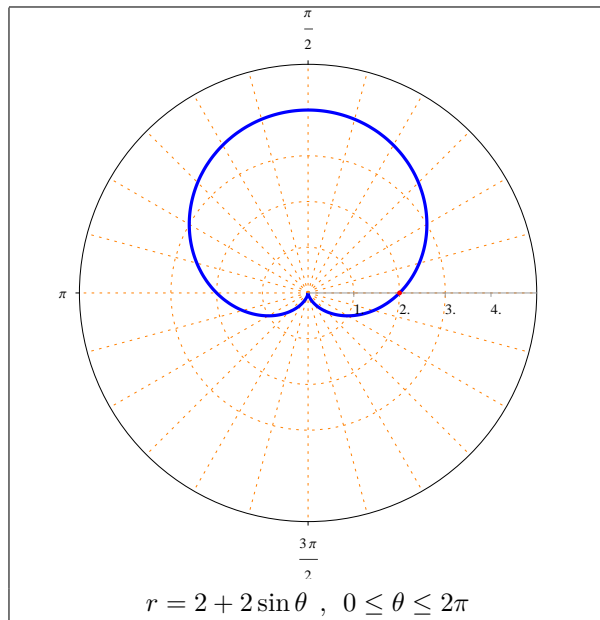
$$r = 2 - 2 \cos \theta \quad (2)$$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .



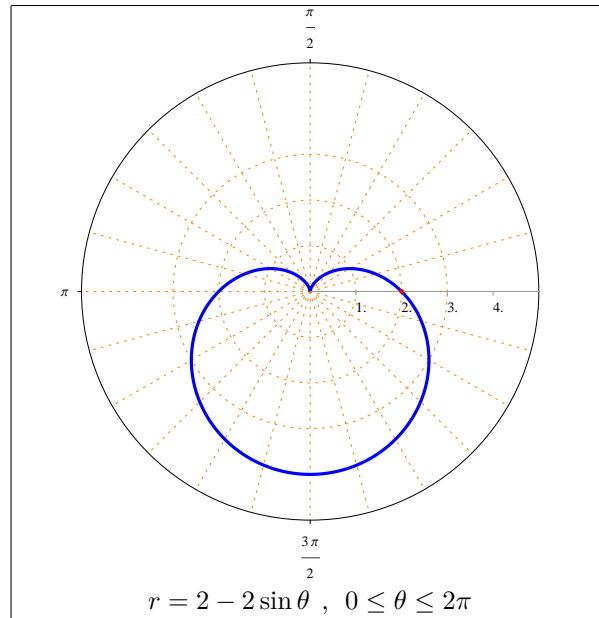
$$r = 2 + 2 \sin \theta \quad (3)$$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

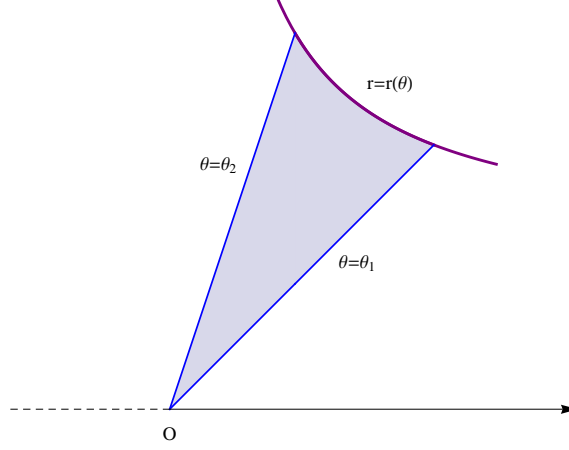


$$r = 2 - 2 \sin \theta \quad (4)$$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

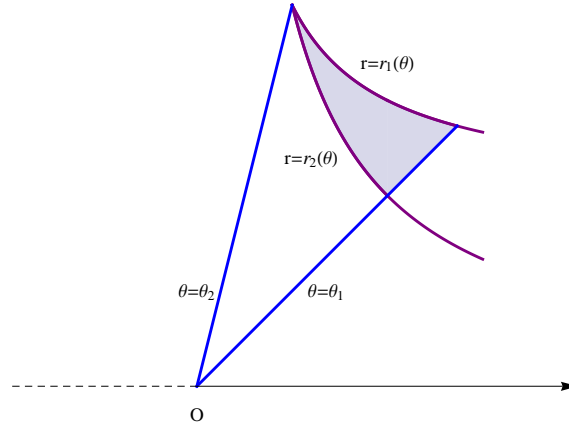


4.8 المساحات في الإحداثيات القطبية



إذا كانت الدالة $r = r(\theta)$ دالة متصلة و موجبة فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $r(\theta)$ والمستقيمين $\theta = \theta_1$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [r(\theta)]^2 d\theta \text{ تساوي } \theta = \theta_2 \text{ و}$$

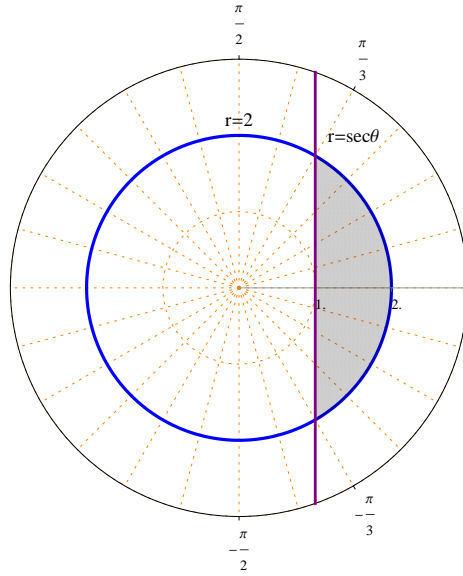


مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات القطبية $r_1(\theta)$ و $r_2(\theta)$ و $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ تساوي $A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ([r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2) d\theta$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2$ وإلى اليمين من المستقيم $r = \sec \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.المنحنى $r = \sec \theta$ يمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r, \theta) = (1, 0)$.نقاط تقاطع المنحنى $r = 2$ مع المنحنى $r = \sec \theta$:

$$\sec \theta = 2 \implies \frac{1}{\cos \theta} = 2 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

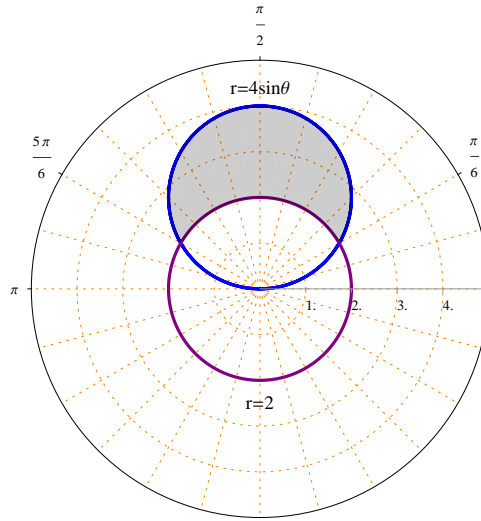
$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(2)^2 - (\sec \theta)^2] d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 - \sec^2 \theta) d\theta$$

$$= [4\theta - \tan \theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(4 \left(\frac{\pi}{3} \right) - \tan \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) - (4(0) - \tan(0)) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

(2) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.المنحنى $r = 4 \sin \theta$ يمثل دائرة مركزها $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{2} \right)$ ونصف قطرها 2.



نقاط تقاطع المنحني $r = 4 \sin \theta$ مع المنحني $r = 2$:

$$4 \sin \theta = 2 \implies \sin \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

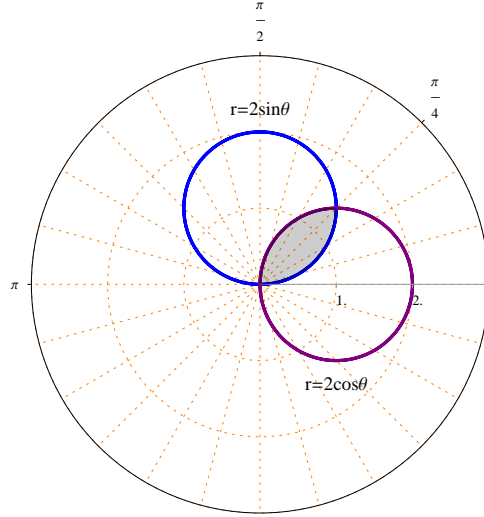
$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [(4 \sin \theta)^2 - (2)^2] d\theta \right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (16 \sin^2 \theta - 4) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[16 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) - 4 \right] d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8 \cos \theta - 4) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8 \cos \theta) d\theta = [4\theta - 4 \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[4 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 4 \sin \left(4 \frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[4 \left(\frac{\pi}{6} \right) - 4 \sin \left(2 \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= (2\pi - 4 \sin(2\pi)) - \left(\frac{2\pi}{3} - 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= 2\pi - 0 - \frac{2\pi}{3} + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(3) أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين المنحنيين $r = 2 \sin \theta$ و $r = 2 \cos \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2 \sin \theta$ يمثل دائرة مركزها $(1, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 1.

المنحنى $r = 2 \cos \theta$ يمثل دائرة مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها 1.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 \sin \theta$ مع المنحنى $r = 2 \cos \theta$:

$$2 \sin \theta = 2 \cos \theta \implies \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1 \implies \tan \theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \sin^2 \theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[4 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[4 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - 2 \cos 2\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2 \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} [2\theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} [2\theta + \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - (0 - 0) \right] + \frac{1}{2} \left[(\pi + 0) - \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

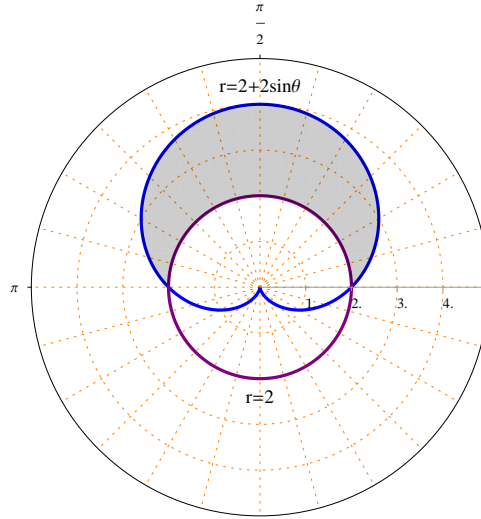
باب 8. الإحداثيات القطبية

(4) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$2 + 2 \sin \theta = 2 \implies \sin \theta = 0 \implies \theta = 0, \theta = \pi$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

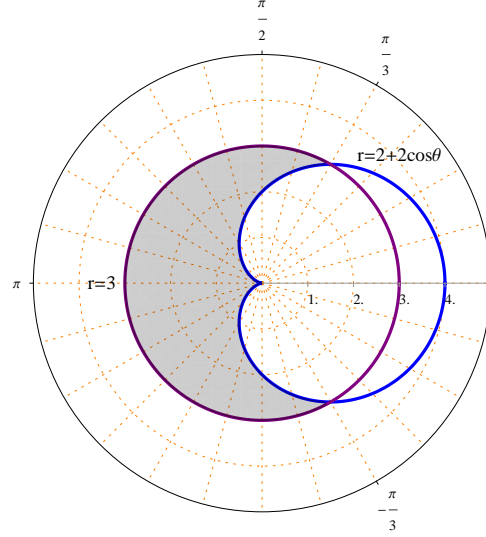
$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2 + 2 \sin \theta)^2 - (2)^2] d\theta \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(4 + 8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) - 4] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8 \sin \theta + 4 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 8 \sin \theta - 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= [2\theta - 8 \cos \theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 8 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(2 \frac{\pi}{2} \right) \right] - [2(0) - 8 \cos(0) - \sin(2(0))] \\ &= (\pi - 0 - 0) - (0 - 8 - 0) = 8 + \pi \end{aligned}$$

(5) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3$ وخارج المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2 \cos \theta = 3 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(3)^2 - (2 + 2 \cos \theta)^2] d\theta \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [9 - (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[5 - 8 \cos \theta - 4 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 - 8 \cos \theta - 2 \cos 2\theta) d\theta = [3\theta - 8 \sin \theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left[3 \left(\frac{\pi}{3} \right) - 8 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(2 \frac{\pi}{3} \right) \right] - [3(0) - 8 \sin(0) - \sin(2(0))] \end{aligned}$$

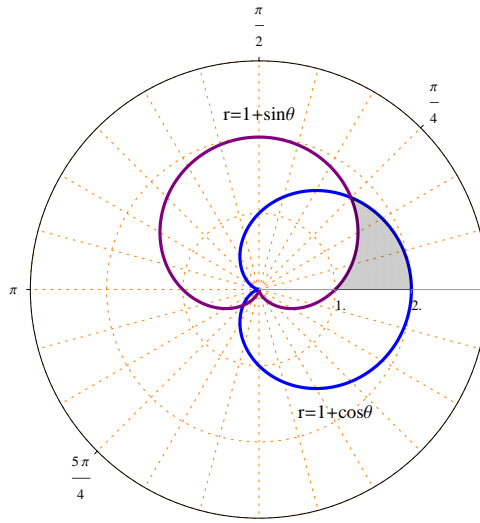
$$= \pi - 8 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(6) أحسب مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول و داخل المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ و خارج المنحنى $r = 1 + \sin \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 1 + \sin \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ مع المنحنى $r = 1 + \sin \theta$:

$$1 + \cos \theta = 1 + \sin \theta \implies \cos \theta = \sin \theta \implies \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \cos \theta)^2 - (1 + \sin \theta)^2] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) - (1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 \cos \theta - 2 \sin \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 \cos \theta - 2 \sin \theta + \cos 2\theta] d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[2 \sin \theta + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(2(0) + 2(1) + \frac{1}{2}(0) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - 0 - 2 - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = \sqrt{2} - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$