جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

King Saud University

فيزياء عامة (2) فيز 102

الفصل التاسع: الحركة الاهتزازية

Oscillatory Motion

الفصل التاسع: الحركة الاهتزازية
Oscillatory Motion

٩–١ مقدمة

٩–٢ الخواص العامة للحركة الاهتزازية البسيطة

٩–٣ الحركة الاهتزازية في منظومة كتلة –نابض

٩–٤ الطاقة الحركية لمهتز توافقي بسيط

٩–٥ الحركة الاهتزازية البسيطة في منظومة البندول البسيط

1-9 المقدمة

- سندرس في هذا الفصل:
- الحركة الاهتزازية

هي الحركة التي يعملها الجسم المهتز حول موضع اتزانه في اتجاهين متضادين, وفي فترات زمنية متساوية وتكون فيها قوة الإرجاع في اتجاه معاكس لاتجاه الإزاحة دائماً .

- أو هي الحركة التي يصنعها الجسم المهتز على جانبي موضع سكونه أو اتزانه الاصلي .

١ – التعرف على الحركات الاهتزازية وخواصها العامة .

٢ – التعرف على الحركة الاهتزازية لمنظومة .

٣ – دراسة الطاقة الحركية لمهتز توافقي بسيط .

٤ – حل بعض المسائل .

٩-٢ الخواص العامة للحركة الاهتزازية البسيطة

الحركة التوافقية البسيطة هي أحد أشكال الحركة الاهتزازية التي تنشأ نتيجة استجابة منظومة لقوة استعادة تتناسب طرديًا مع مقدار الازاحة عن موضع الاتزان حسب قانون هوك. وتوصف الحركة التي تتغير فيها الازاحة مع الزمن حسب العلاقة التالية:

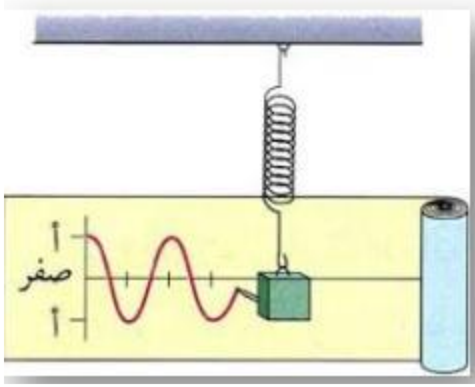
الطور

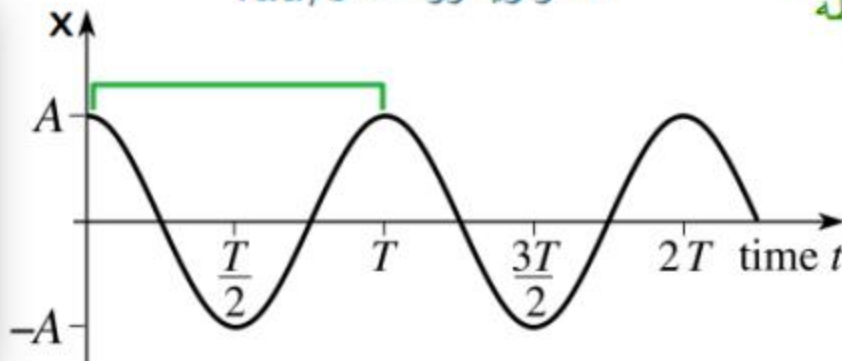
$$x = A\cos(\omega t + \emptyset)$$

سعة الاهتزازة وهي الازاحة القصوى عن موضع الاتزان، سواءً في الاتجاه الموجب أو السالب للمحور السيني

التردد الزاوي للحركة الاهتزازية ووحدته rad/s

زاوية أو ثابت الطور وتحدد قيمتها الازاحة الابتدائية وسرعة المهتز. اذا كانت الازاحة القصوى (x=A) في اللحظة t=0، فهذا يعني أن ϕ=0.
أما اذا كانت (x≠A) في اللحظة t=0، فإن ϕ لها قيمة معينة.





الخواص العامة للحركة الاهتزازية البسيطة

- **الدورة الكاملة (الذبذبة , الاهتزازة)** : هي الحركة التي يعملها الجسم المهتز عندما يمر على نقطة ما في مسار حركته مرتين متتاليتين في اتجاه واحد .
- **الإزاحة (X)** : هي بعد الجسم المهتز في أية لحظة عن موضع اتزانه (سكونه) , و تقاس بـ (m) .
- **سعة الاهتزازة (A)** : هي أقصى إزاحة يصل إليها الجسم المهتز من موضع الإتزان, أو هي المسافة بين نقطتين في مسار حركة الجسم تكون سرعته في إحداهما أقصاها وفي الأخرى منعدمة و تقاس بـ (m) .
- **الزمن الدوري (T)** : هو الزمن اللازم لإتمام دورة كاملة , و يقاس بـ.(Sec)
- **التردد (f)** : هو عدد الدورات أو الاهتزازات الكاملة التي يعملها الجسم المهتز في الثانية الواحدة, و هو مقلوب الزمن الدوري , و يقاس بـ ($Hz = 1/Sec$)
- **التردد الزاوي(ω)**:هوعدد الاهتزازات الكلية التي يقوم بها الجسم المهتز خلال زمن مقداره 2π ثانية و يقاس بوحدة (rad / Sec)
- **المدى الكلي للحركة ($2A$)** : و هو ضعف سعة الحركة

الزمن الدوري T: هو الزمن الذي يستغرقه المهتز للقيام بدورة كاملة ووحدته وحدة الزمن.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

التردد f: عدد الدورات في الثانية الواحدة ووحدته Hz. $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

التردد الزاوي: $\omega = 2\pi f$

سرعة الحركة الاهتزازية: $v = \frac{dx}{dt} = -\omega\, A \sin(\omega t + \emptyset)$

تسارع الحركة الاهتزازية: $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2\, A \cos(\omega t + \emptyset) = -\omega^2 x$

الطور: $v_0 = A \sin\emptyset$ $\quad x_0 = A \cos\emptyset$ **ثابت الطور:** $\tan\emptyset = \frac{-v_\circ}{\omega x_\circ}$

السعة A: $A = \sqrt{x^2{}_0 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$

السرعة القصوى والتسارع الأقصى: $v_{max} = \omega A, \quad a_{max} = \omega^2 A$

بافتراض حركتين متعامدتين احداهما في اتجاه x والأخرى في اتجاه y، سيكون الشكل العام للموجه كالتالي:

$$y = A\,sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$y = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right], \qquad v = \frac{\lambda}{T}$$

$$y = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right], \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \;\&\; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

حيث k العدد الموجي ووحدته rad/m

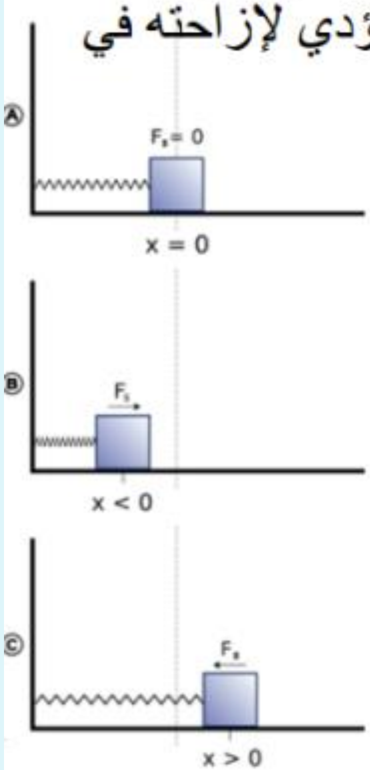
$$y = A\sin(kx - \omega t)$$

ويكون الشكل العام كالتالي:

$$y = A\sin(kx - \omega t + \emptyset)$$

٩-٣ الحركة الاهتزازية البسيطة في منظومة كتلة-نابض

المنظومة في الشكل المقابل مكونة من جسم كتلته m يتحرك على سطح أفقي تحت تأثير نابض ثابته k ومربوط بالجسم. القوة المؤثرة على الجسم ستؤدي لإزاحته في اتجاه معاكس.



$$x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega\, A\, \sin(\omega t + \emptyset)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2\, A\, \cos(\omega t + \emptyset)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

من قانون هوك

F=-kx

حيث k ثابت النابض

حالات خاصة :

$X_0=A, V_0=0, t=0$

فإن $\phi=0$

$X=A\cos\omega t$

$V=dx/dt=-\omega A\sin\omega t$

$a=dv/dt=-\omega^2 A\cos\omega t$

ولكن $t=0$

$a=-\omega^2 A$

أي ان الازاحة عكس القوة المؤثرة

إذا كانت المنظومة في حالة توازن

أي $X=0$ فإن

$X_0=0, v=V_0, t=0,$

فإن $\phi=\pi/2$

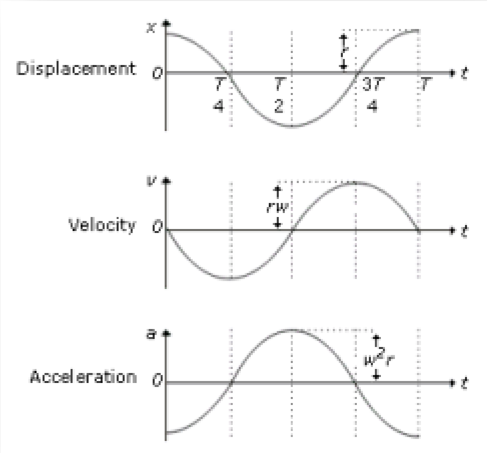
$X=A\cos\omega t-\pi/2$

$A=v_0/\omega$

$X=v_0/\omega\sin\omega t$

$$\mathbf{v}=\frac{dx}{dt}=v_0\cos wt$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-wv_0\sin wt$$



مثال (١،٢،٣،٤)

٩-٤ الطاقة الحركية لمهتز توافقي بسيط

تُعطى الطاقة الحركية K كما يلي:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,w^2A^2sin^2(wt + \emptyset)$$

أما طاقة الوضع فتُعطى بالشكل التالي:

$$PE = \Delta U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\,cos^2(\omega t + \emptyset)$$

بالتالي تكون الطاقة الكلية على الشكل التالي:

$$E = K + PE = K + \Delta U = \frac{1}{2}kA^2 = [sin^2(\omega t + \emptyset) + cos^2(\omega t + \emptyset)]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

وهذا يعني أن الطاقة الكلية تساوي طاقة الوضع القصوى المخزنة في النابض.

- عندما تكون $x = \pm A$ فإن E=PE و K=0 و v=0
- أما عندما تكون x=0 فإن PE=0 وبالتالي E=K

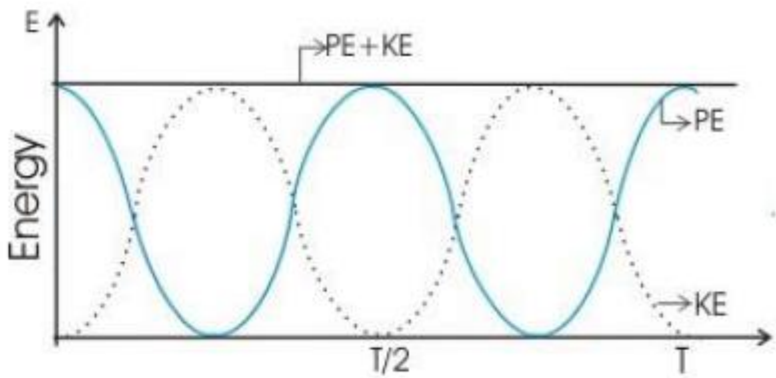


Figure 5:- Energy exchange in SHM

ويمكن كتابة السرعة بدلالة الزمن بشكل عام كالتالي:

$$E = \frac{1}{2}m{v^2}_{max} = \frac{1}{2}kA^2, \quad v_{max} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

$$v(t) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\sqrt{\omega(A^2 - x^2)}$$

٩-٥ الحركة الاهتزازية البسيطة في منظومة البندول البسيط

البندول البسيط: هو عبارة عن كتلة m، معلقة بخيط أو قضيب طوله L وطرفة الآخر مثبت.

القوة المماسية المؤثرة على الكتلة هي:

$$F_t = -mgsin\theta$$

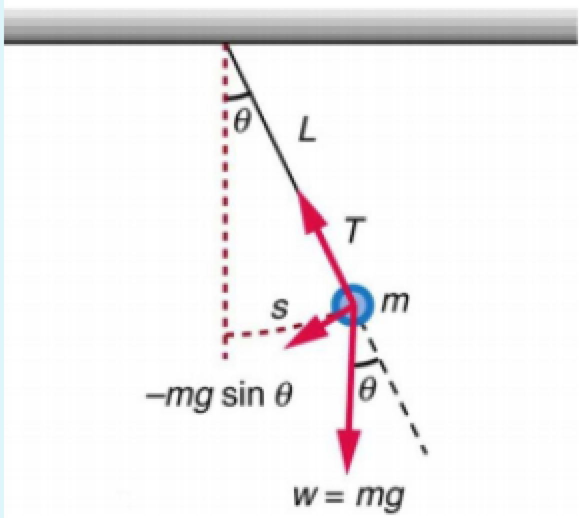
الازاحة هي:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \emptyset)$$

حيث θ_0 هي الازاحة القصوى

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



خصائص الحركة التوافقية	الوحدة	الحركة التوافقية لكتلة نابض		حالات خاصة	
القوة المؤثرة (قوة الارجاع) F	N	قانون هوك : $F=-kX$ (k constant force)			
سعة الإزاحة	m	مسار الحركة باتجاة المحور X $X=A\cos(\omega t+\Phi)$ $X_0=A\cos(\Phi)$ $(t=0)$	مسار الحركة باتجاة المحور Y $Y=A\sin(kx-\omega t+\Phi)$	$X_0=A, V_0=0, t=0$ فإن $\phi=0$ $X=A\cos\omega t$	$X_0=0, V=V_0, t=0,$ فإن $\phi=\pi/2$ $X=A\cos(\omega t-\pi/2)$ $X=(V_0/\omega)\sin\omega t$
السرعة $dx/dt=v$	m/s	$V=-\omega A\sin(\omega t+\Phi)$ $V_0=-\omega A\sin(\Phi)$ $(t=0)$ $V_{max}=\lvert\omega A\rvert$	$V=-\omega A\cos(kx-\omega t+\Phi)$ $V_0=-\omega A\cos(\Phi)$ $(t=0)$ $V_{max}=\lvert\omega A\rvert$	$V=-\omega A\sin\omega t$	$V=-V_0\cos\omega t$
التسارع $a=dv/dt$	m/s^2	$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\Phi)$ $a_{max}=\lvert\omega^2A\rvert$	$a=\omega^2A\cos(kx-\omega t+\Phi)$ $a_{max}=\lvert\omega^2A\rvert$	$a=-\omega^2A$	$a=-\omega^2v_0\sin\omega t$
الطور	درجة	$(\omega t+\Phi)$	$(kx-\omega t+\Phi)$	$\Phi=0$	$\Phi=-\pi/2$
ثابت الطور Φ	درجة	$\Phi=\tan^{-1}(-V_0/\omega X_0)$			
اقصى ازاحة(سعة الحركة)	m	$A=\sqrt{(X_0^2+(V_0/\omega)^2)}$		$A=X$	$A=v0/\omega$
التردد الزاوي $\omega=2\pi f$	Rad/ sec	$\omega=\sqrt{(k/m)}$		الطاقة الحركية لمهتز توافقي: $K=1/2mv^2=1/2m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\Phi)$ الطاقة الكامنة (الوضع) لمهتز توافقي: $PE=1/2kX^2=1/2kA^2\cos^2(\omega t+\Phi)$ الطاقة الكلية : $E=K+PE=1/2kA^2$ $V=\pm\sqrt{k/m(A^2-X^2)}$ (حالة خاصة عند أعلى قيمة لطاقة الحركية) $X=0$ at $E=K=1/2mV^2_{max}=1/2kA^2$ $V_{max}=\pm(\sqrt{k/m})(A)$ (حالة خاصة عند أعلى قيمة لطاقة الكامنة (الوضع)) $X=\pm A$ at $E=PE=1/2mX^2_{max}=1/2kA^2$	
التردد $f=\omega/2\pi$, $f=1/T$	Hz Or 1/sec	$f=\sqrt{(k/m)}/(2\pi)$			
الزمن الدوري $T=2\pi/\omega, T=1/f$	sec	$T=(2\pi)\sqrt{(m/k)}$			
العدد الموجي $K=2\pi/\lambda$	Rad/m				
الطول الموجي $\lambda=V/T, \lambda=Vf$	m				

الحركة الاهتزازية البسيطة في منظومة البندول	الوحدة	خصائص الحركة التوافقية
قوة مماسة: $F=-mg\sin\theta$	N	القوة المؤثرة (قوة الارجاع) F
$S=L\theta$	m	سعة الإزاحة
$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\Phi)$	درجة (O)	السعة الزاوية Θ
	درجة (O)	السعة الزاوية القصوى θ_0
$d\theta/dt=-\theta_0\omega\sin(\omega t+\Phi)$ $V_{max}=\|\omega A\|$	rad/s	السرعة $d\theta/dt=v$
$d^2\theta/dt^2=\theta_0\omega^2\cos(\omega t+\Phi)$ $a_{max}=\|\omega^2 A\|$	rad/s^2	التسارع $a=d^2\theta/dt^2$
$\omega=\sqrt{(g/L)}$	rad/sec	التردد الزاوي $\omega=2\pi f$
$f=\sqrt{(g/L)}/(2\pi)$	Hz Or 1/sec	التردد $f=\omega/2\pi, f=1/T$
$T=(2\pi)\sqrt{(L/g)}$	sec	الزمن الدوري $T=2\pi/\omega, T=1/f$

مســـــــــائل محلولــة

١- يعطى اهتزاز نقطة ما بالمعادلة : $x=10\sin(15.7t+\pi/4)$ المطلوب :

أ- ايجاد سعة اهتزاز هذه الحركة

ب- تواتر الحركة ت - دورها

ث- طور الاهتزاز في اللحظة $t=T/4$ ج- تحديد مقدار انزياح النقطة

و ذلك بفرض أن x تقدر بالسنتيمتر

الحل

لنقارن المعادلة المعطاة مع معادلة الحركة الاهتزازية التوافقية : $X = A\cos(\omega t + \varphi)$

نجد أن : أ- سعة الاهتزاز $A=10\ cm$

ب- التواتر الزاوي $\omega=15.7\ \ rad/Sec$

ومنه التواتر f $f=\omega/2\pi=15.7/(2\times3.14)=2.5\ Hz$

ت- دور الحركة يحسب من العلاقة : $\omega=2\pi/T \Leftarrow T=2\pi/\omega$

$T=(2\times3.14)/(15.7)=0.4\ Sec$

ث- $\varphi=\omega t+\varphi_\circ \Leftarrow \varphi=(2\pi/T)(T/4)+(\pi/4) \Leftarrow \varphi=3\pi/4$

ج- $x=10\sin(3\pi/4)=10\times0.707=7.07\ cm$

٣- بندول بسيط دوره (2 Sec) و سعة اهتزازه (5 cm) المطلوب : حساب تسارع كتلته

الحل

$$a_{max}=-\omega^2x=-\omega^2A$$

$$T=2\pi/\omega\Rightarrow\omega=2\pi/2=\pi\ rad/Sec$$

$$a_{max}=-\pi^2(\pm5)\ cm/Sec^2\cong50\ cm/Sec^2$$

حيث : الإشارة السالبة تؤخذ عند الطرف x=+5cm

و الإشارة الموجبة عند الطرف x=-5cm

٢- علق نابض خفيف كتلته (50gr) فاستطال بمقدار (10cm) و المطلوب : احسبي دور و تواتر الاهتزازات الصغيرة للكتلة عند إزاحتها عن موضع توازنها . مع العلم أن :
$g=10m/Sec^2$ وثابت الصلابة (ثابت الزنبرك) $K=5\ N/m$

الحل

يعطى دور الاهتزاز T بالعلاقة :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (11)$$

$$T = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{50 \times 10^{-3}}{5}} = 0.63\ Sec$$

أما التواتر فيحسب كما يلي :

$f=1/T =1/0.63=1.59\ Hz$

٤- احسبي تواتر الحركة الاهتزازية لنقطة مادية مهتزة كتلتها (20gr) مع العلم أن معامل قوة الاستعادة (K= 0.18 N/m)

الحل

يرتبط التواتر الزاوي مع كل من الكتلة و معامل الإرجاع K وفق العلاقة :

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (13)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{0.18}{0.02}} = 3 \ Hz$$

و عليه فإن تواتر الحركة الاهتزازية يساوي : $\Leftarrow \quad f=\omega/2\pi$

$f=3/2\pi= 0.48$ Hz

أما دور الاهتزاز عندئذ يحسب وفق العلاقة : $\Leftarrow T=1/f$

$T=1/0.48=2.08$ Sec

٩-٦ حل أمثلة صفحة ٣٠٩

من مثال رقم ١و حتى مثال رقم١١