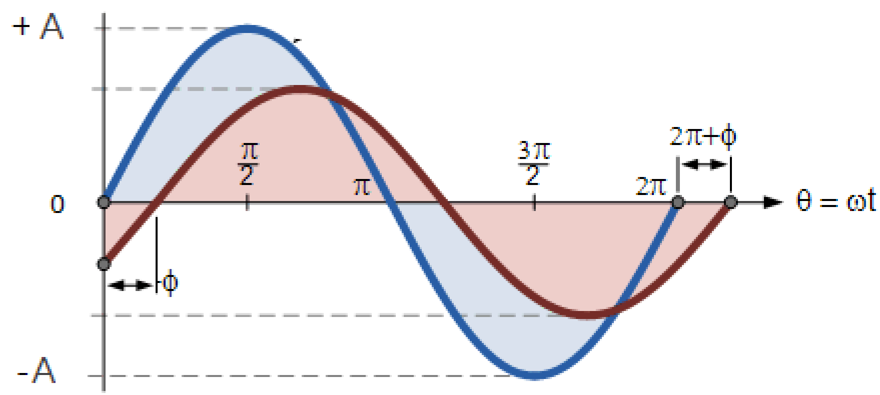
الفصل التاسع - الحركة الاهتزازيّة

2-9) الخواصّ العامة للحركة الاهتزازية البسيطة:

إنّ "الحركة التوافقيّة البسيطة" هي أحد أشكال "الحركة الاهتزازيّة"، وتنشأ نتيجة لاستجابة المنظومة (مثل كتلة مربوطة بنابض) لقوة استعادة تتناسب طرديّاً مع مقدار الإزاحة عن موضع التوازن وفْق "قانون هوك

حيث يكون $x = A\cos(\omega t + \phi)$

(A, ϕ, ω) (التردد الزاوي , زاوية الطور , اقصى ازاحة عن الاتزان)



الازاجة دالة دورية ويكون الزمن الدوري (T) هو الزمن الذي يستغرقه المهتزّ للقيامِ بدورة كاملة

$$\omega . T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

وتردد الحركة الاهتزازية (f)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

سرعة الحركة الاهتزازية وتسارعها على التوالي هما

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

ويكون اقصى سرعة وتسارع هما

$$\mathbf{a}_{max} = \omega^2 A \text{ , } \boldsymbol{v}_{max} = \omega A$$

ويمكن حساب معادلة الطور وفق الشروط الاتية

$t = 0 \;,\; \mathbf{x = x_o} \;,\; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o$

$$\tan\phi = \frac{-\boldsymbol{v}_o}{\omega.\mathbf{x}_0}$$

ويعرف العدد الموجي و التردد الزاوي كالتالي

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

وتكتب معادلة الموجة كالتالي

$$y = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

4-9) الطّاقة الحركيّة لمهتزٍّ توافقيٍّ بسيط:

تعطي طاقة الحركة وطاقة الوضع للحركة التوافقية البسيطة كالتالي

$$K = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$PE = \Delta U = \frac{1}{2} k\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

وتكون الطاقة الكلية تساوي

$$E = K + PE = K + \Delta U = \frac{1}{2} kA^2 \left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2} kA^2$$

وهذا يعني ان الطاقة الكلية تساوي طاقة الوضع المختزنة في الجسم المهتز

عندما $x = \pm A$، فإنّ:

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad , \quad K = 0 \quad , \quad E = PE$$

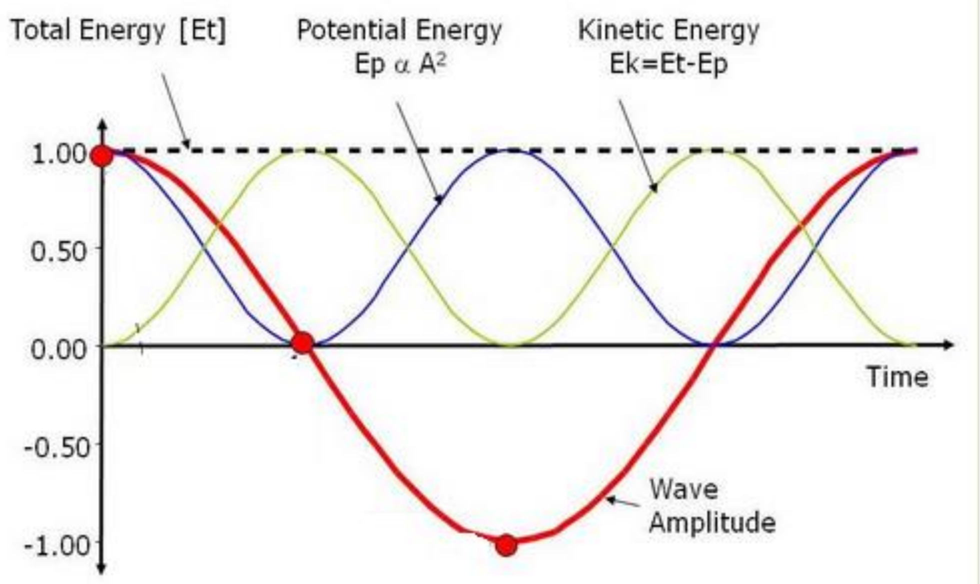
أمّا عندما تكون $x = 0$، فإنّ $PE = 0$، وبالتالي تكون:

$$E = K$$

$$E = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2_{max} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\boldsymbol{v}_{max} = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}$$

ويوضح الشكل تغير الطاقة الحركية وطاقة الوضع معا



1

مـــثال (9-1):

إذا كانت لدينا حركة اهتزازيّة بسيطة وفق العلاقة:

$$x = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

فاحسب الكميّات **A , f , T , *v* , a**.

الحـــل:

نعلم أنّ "الحركة التوافقيّة البسيطة" تخضع للعلاقة:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

وبالمُقارنة بمعادلة الحركة المُعطاة في المسألة نجد أنّ:

$$A = 4, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0.5 \quad Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.5} = 2\ s$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt} = -4\ \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) d\frac{(\pi t)}{dt}$$

$$\boldsymbol{v} = -4\pi\ \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -4\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

مــثال(9−2):

إستناداً إلى المثال السابق احسب: x , v_{max} , a_{max} في اللحظتين: $t_1 = 1s$, $t_2 = 2s$،

الحــل:

بإجراء التعويضات اللازمة نحصل على:

$$x = -2.83\ \text{cm} \quad , \quad v = 8.89\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{a} = 27.9\ \text{m/s}^2$$
$$v = \pm 4\pi\ \text{m/s} \quad , \quad \mathbf{a} = \pm 4\pi^2\ \text{m/s}^2$$
$$v_{max} = 4\pi\ \text{m/s} \quad , \quad \mathbf{a}_{max} = 4\pi^2\ \text{m/s}^2$$

ويُمكن الحصول أيضاً على هذه النتائج باستخدام العلاقة:

$$v_{max} = \omega A = 4\pi\ \text{m/s}$$

والعلاقة:

$$\mathbf{a}_{max} = \omega^2 A = 4\pi^2\ \text{m/s}$$

مــثال (9−3):

سيّارة كتلتها 1300kg تستندُ على أربعة نابضات، وكلّ نابض له ثابت قوة مقداره 20,000N/m، فإذا كانت كتلة الركاب 160kg، فاحسب تردّد اهتزاز السيّارة على الطريق.

الحــل:

إنّ الكتلة الإجماليّة هي:

$$1300 + 160 = 1460\ \text{kg}$$

وبالتالي تكون الكتلة لكلِ نابض هي:

$$\frac{1460}{4} = 365 \quad \text{kg/spring}$$

ولكن:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

أيّ أنّ:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20{,}000}{365}} = 1.18\ \text{Hz}$$

أمّا "الزمن الدّوري" للحركة الاهتزازيّة، وهو الزمن اللازم لتنفيذ اهتزازة كاملة، فيُعطى بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.18} = 0.84\ \text{s}$$

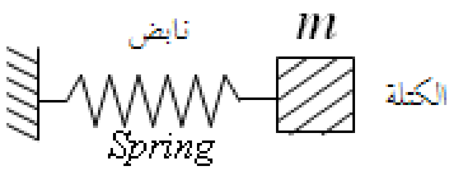
مــثال (9-4):

يوضّح شكل (9-8) منظومة "كتلة – نابض" لها المواصفات التالية: $m = 200g \ , \ k = 5N/m \ , \ A = 5\ cm$

وتخضع للعلاقة التالية: $x = A \cos \omega t$

أوجد: $T \ , \ \boldsymbol{v}_{max} \ , \ \mathbf{x} = f(t) \ , \ \boldsymbol{v} = f(t) \ , \ \mathbf{a} = f(t)$

الحــل:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{200 \times 10^{-3}}} = 5\ rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.26\ s$$

$$\boldsymbol{v}_{max} = \omega A = 5 \times 5\ 10^{-2} = 0.25\ m/s$$

$$\mathbf{a}_{max} = \omega^2 A = (5)^2 \times 5 \times 10^{-2} = 1.25\ m/s^2$$

أيّ أنّ:

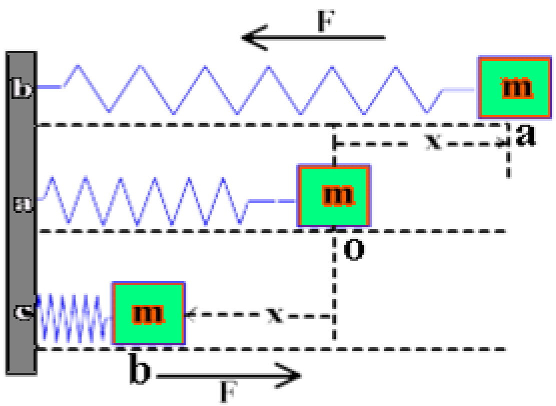
$$\mathbf{x} = A.\ \cos \omega t = 0.05\ \cos 5t$$

$$\boldsymbol{v} = -\omega.\ A.\ \sin \omega t = -(0.25) \sin 5t$$

$$\mathbf{a} = -\omega^2 .A.\ \cos \omega t = -1.25 \cos 5t$$

(3-9) الحركة الاهتزازية البسيطة في منظومة كتلة- نابض

منظومة كتلة – نابض : هي عبارة عن كتلة (m) مربوطة بنابض تتحرك في مستوى افقي طبقا لقانون هوك



$$F = -K\,X$$

حيث (K) ثابت النابض

لكن حسب قانون نيوتن فان

$$F = m\,a$$

وبالتالي فان

$$a = -(K/m)\,X = -\omega^2 X$$

و هي معادلة حركة اهتزازية يكون فيها الازاحة و السرعة و التسارع للجسم المهتز كالتالي

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

ويكون الومن الدوري للحركة هو

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

والتردد

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

والتردد الزاوي

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال (5-9):

منظومة " الكتلة - النابض" الموضحة في الشكل تهتز على سطح أفقي.

احسب: قيم v_{max} , E.

السرعة عندما تصبح ازاحة الكتلة المهتزة x = 2 cm.

الطاقة الحركية وطاقة الوضع عندما تكون x = 2 cm.

الحل:

أ)

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2}(20)(3 \times 10^{-2})^2$$

$$E = 9 \times 10^{-3} \ J$$

$$x = 0, \ PE = 0 \ , \ E = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

$$v_{max}^2 = \frac{2E}{m} = \frac{2 \times 9 \times 10^{-3}}{0.5} = \frac{18 \times 10^{-3}}{0.5}$$

$$v_{max} = 0.19 \ m/s$$

ب)

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\,(A^2 - x^2)}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{20}{0.5}\left[(3)^2 - (2)^2\right].(10^{-4})}$$

ج)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.5)\,(0.141)^2 = 4.97 \text{ x } 10^{-3}\ J$$

$$PE = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20)(2 \text{ x } 10^{-2})^2 = 4 \text{ x } 10^{-3} J$$

ويُلاحظ أن:

$$E = K + PE$$