ضبط ومراقبة المخزون

Inventory Control

إدارة سلسلة الإمداد
Supply Chain Management

- سلسلة الإمداد هي تسلسل العمليات التي تشارك في إنتاج وتوصيل منتج أو خدمة للمستفيدين.
- إدارة هذه السلسلة (أو سلاسل الإمداد لعدة منتجات) عملية معقدة وتشمل كثير من المهام ، مثل:
  - تحديد مواقع المرافق (المستودعات ، مراكز البيع ، ...)
  - التنبؤ
  - عمليات الإنتاج
  - إدارة المخزون
  - ضبط الجودة
  - الشراء / التسعير
  - عمليات النقل والتسليم
  - الجدولة
  - خدمة العملاء

ضبط ومراقبة المخزون

- **المخزون** هو أحد الأصول المهمة وباهظة الثمن لكثير من الشركات والمنشئات ، ويشمل أي عنصر يتم تخزينه:
  - المواد الأولية الخام والقطع التي يحتاج لها مصنع للإنتاج
  - قطع الغيار للصيانة والمنتجات المستهلكة في منشأة
  - المنتجات الجاهزة للبيع أو الشحن في مراكز الإمداد
- **تصنيف ABC :** يتم تصنيف عناصر المخزون إلى فئات A (مهمة) ، B (متوسطة الأهمية) ، C (قليلة الأهمية) ، وفقا لأهمية توفرها وتكلفة حفظها في المخزن. يتم وضع خطط مخزون مختلفة للعناصر حسب الفئة.

ضبط ومراقبة المخزون

- نظم ضبط ومراقبة المخزون هي السياسات والقواعد التي تتحكم في المخزون بهدف تقليل التكاليف المرتبطة بالمخزون ولكن في نفس الوقت زيادة مستوى الخدمة (توفر المنتجات).
  - كمية الطلبية لزيادة المخزون من المنتج؟
  - متى يتم وضع طلبية لزيادة المخزون من المنتج؟
- انخفاض مستويات المخزون يقلل من تكاليف المخزون.
- ارتفاع مستويات المخزون يزيد مستوى الخدمة (يقلل احتمال نفاد المخزون وفقدان فرصة البيع وعملاء غير راضين).

ضبط ومراقبة المخزون

- **المخزون له فوائد كثيرة:**
  - يحسن جودة الخدمة (توفر المنتجات للعميل)
  - يقلل تكاليف الطلبية (أو تهيئة تصنيعه)، مثل التوفير في النقل
  - الاستفادة من الخصومات عند شراء كميات كبيرة (أو التوفير عند إنتاج كميات كبيرة)
  - التحوط من عدم الانتظام في توفر المنتج أو في أسعاره أو في فترة التوريد.
- ضبط وإدارة المخزون عملية غير سهلة ، زيادة المخزون تزيد التكاليف وتخفي عيوب إدارة المخزون وتقلل المرونة.

عناصر تكاليف المخزون

- **تكلفة إعداد الطلبية**
  - تكلفة الجهد الإداري لدراسة وتحديد كمية الطلبية المثلى وتوقيتها ومن ثم إجراءات وضع الطلبية واستلامها.
  - هذه التكاليف غالبا لا تعتمد على كمية الطلبية.
- **تكلفة التخزين**
  - تكلفة حفظ الوحدة في المخزن لفترة زمنية واحدة
  - تشمل التكاليف الإدارية للمحافظة على سلامة المخزون وعلى تكلفة الفرصة الضائعة من استثمار القيمة المالية للمخزن والمخزون وتكلفة التلف وتكلفة التأمين ...

عناصر تكاليف المخزون

- **تكلفة الشراء**
  - التكلفة لشراء الوحدة من المنتج
  - تشمل تكلفة الشحن ، النقل ، التوصيل
- **تكلفة العجز (نفاد المخزون)**
  - تكلفة العجز لبيع الوحدة من المنتج
  - تشمل خسارة فرصة البيع ، خسارة العميل أو اهتزاز ثقته ، تكاليف طلبية مستقبلية لتلبية طلب العميل إن رغب في ذلك

نماذج المخزون

- **يوجد عدة نماذج رياضية لمراقبة وضبط المخزون**
  - نماذج مخزون ساكنة أو ديناميكية أو احتمالية أو غير احتمالية.
  - نماذج مخزون لفترة واحدة أو لعدة فترات زمنية.
  - نماذج مخزون يتم مراجعة المخزون بصفة مستمرة.
  - نماذج مخزون يتم مراجعة المخزون بصفة متقطعة على فترات زمنية ثابتة.
  - نماذج مخزون لطلب كمية ثابتة عند نزول المخزون لمستوى معين.
  - نماذج مخزون لطلب كمية متغيرة عند مرور فترة زمنية معينة.
  - استهلاك المنتج مستقل أو يعتمد على استهلاك منتج اخر.

وغيرها من العوامل التي تؤثر في تعقيد عملية إدارة المخزون

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

- من أشهر هذه النماذج هو نموذج كمية الطلبية الاقتصادية
  - سنرمز له بـ EOQ (Economic Order Quantity)
  - يستخدم لمعرفة كمية الطلبية المثلى من منتج مستقل واحد فقط
  - يتم مراجعة المخزون بصفة مستمرة
  - يمكن وضع الطلبية لزيادة المخزون في أي وقت
  - عند وصول المخزون لمستوى معين ، يتم وضع طلبية لزيادة المخزون
  - الطلبية تصل للمخزن كاملة في نفس اللحظة
  - طلبية زيادة المخزون تتكرر بشكل زمني منتظم وبكمية ثابتة

افتراضات نموذج كمية الطلبية الاقتصادية

- **الاستهلاك (الطلب على المخزون)**
  - كمية استهلاك المخزون معروف (غير احتمالي) ويحدث بمعدل ثابت.
  - سنرمز لمعدل الاستهلاكً بالرمز D. ونقصد بمعدل الاستهلاك عدد وحدات السلعة المطلوبة في وحدة الزمن (سنة، شهر، أسبوع، ....)
- **فترة التوريد**
  - هي طول الفترة الزمنية بين اللحظة التي يتم فيها وضع الطلبية واللحظة التي تصل فيها الطلبية للمخزن.
  - فترة التوريد معروفة وثابتة
  - سنرمز لها بالرمز L وسنفترض مبدئيا أن $L = 0$

افتراضات نموذج كمية الطلبية الاقتصادية

- تكلفة إعداد الطلبية (الإجراءات الإدارية لطلب واستلام الطلبية) لزيادة المخزون ثابته خلال السنة بغض النظر عن كمية الطلبية. سنرمز لهذه التكلفة بالرمز K .
- تكلفة حفظ الوحدة في المخزن لمدة سنة واحدة تساوي h .
- لا يسمح بنفاد المخزون بمعنى أنه لا يسمح بالعجز.
- سعر الشراء لزيادة المخزون ثابت خلال السنة ولا يعتمد على كمية الطلبية. سنرمز له بالرمز c لقيمة شراء الوحدة.

وسيتم شراء كمية ثابته Q في كل مرة.

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

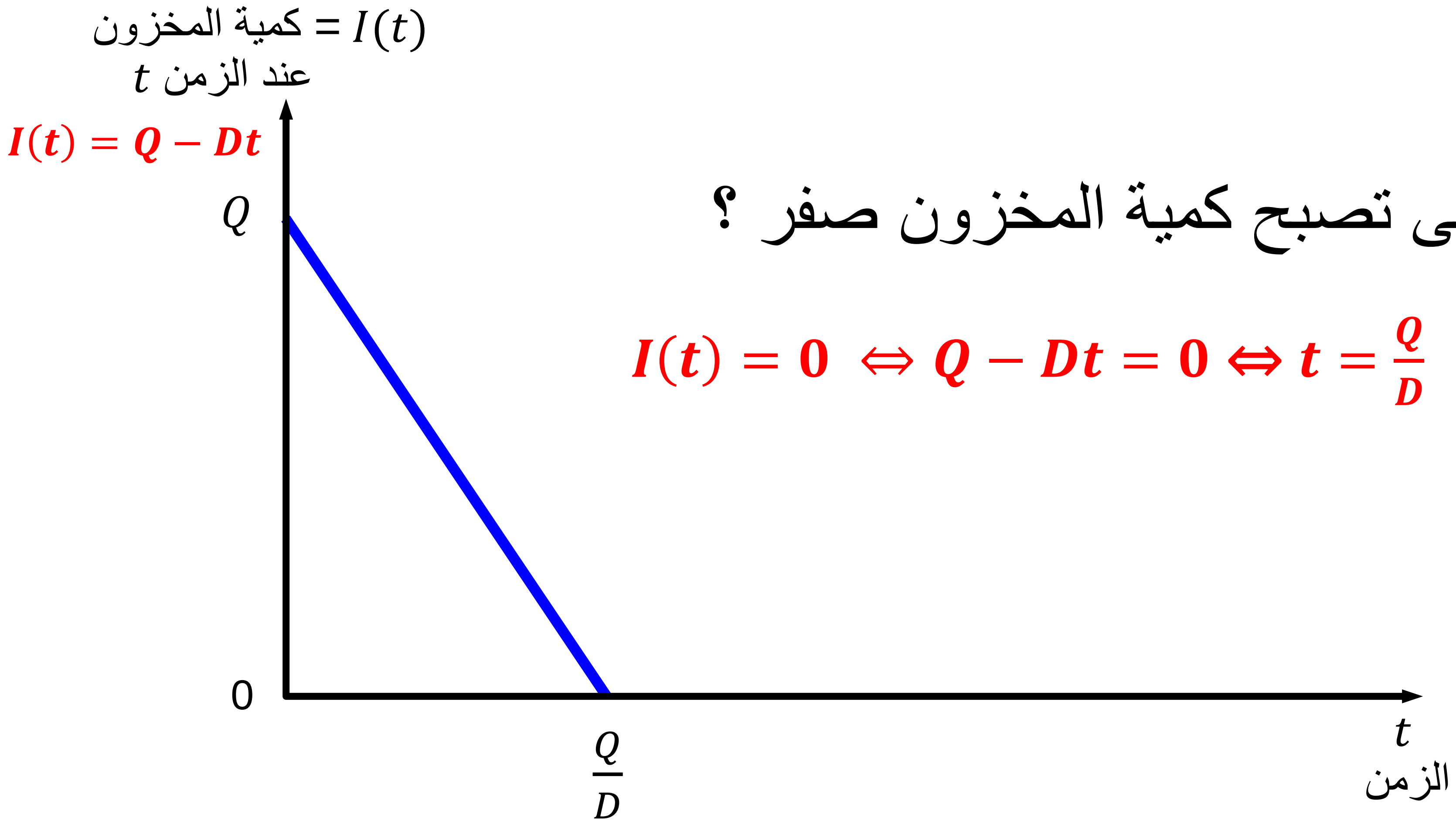
- نفرض أولا أن البضاعة متوفرة دائما عند لحظة وضع الطلبية.
- Q حجم الطلبية عند الزمن $t = 0$ و D معدل الاستهلاك .
  بما أن D ثابت فإن في كل فترة زمن طولها t وحدة زمنية تستهلك كمية قدرها Dt من البضاعة.
- إذن مستوى المخزون في لحظة ما t يساوي

$$Dt - Q$$

و نرمز لهذه الدالة بـــ $I(t)$

$$I(t) = Dt - Q$$

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)



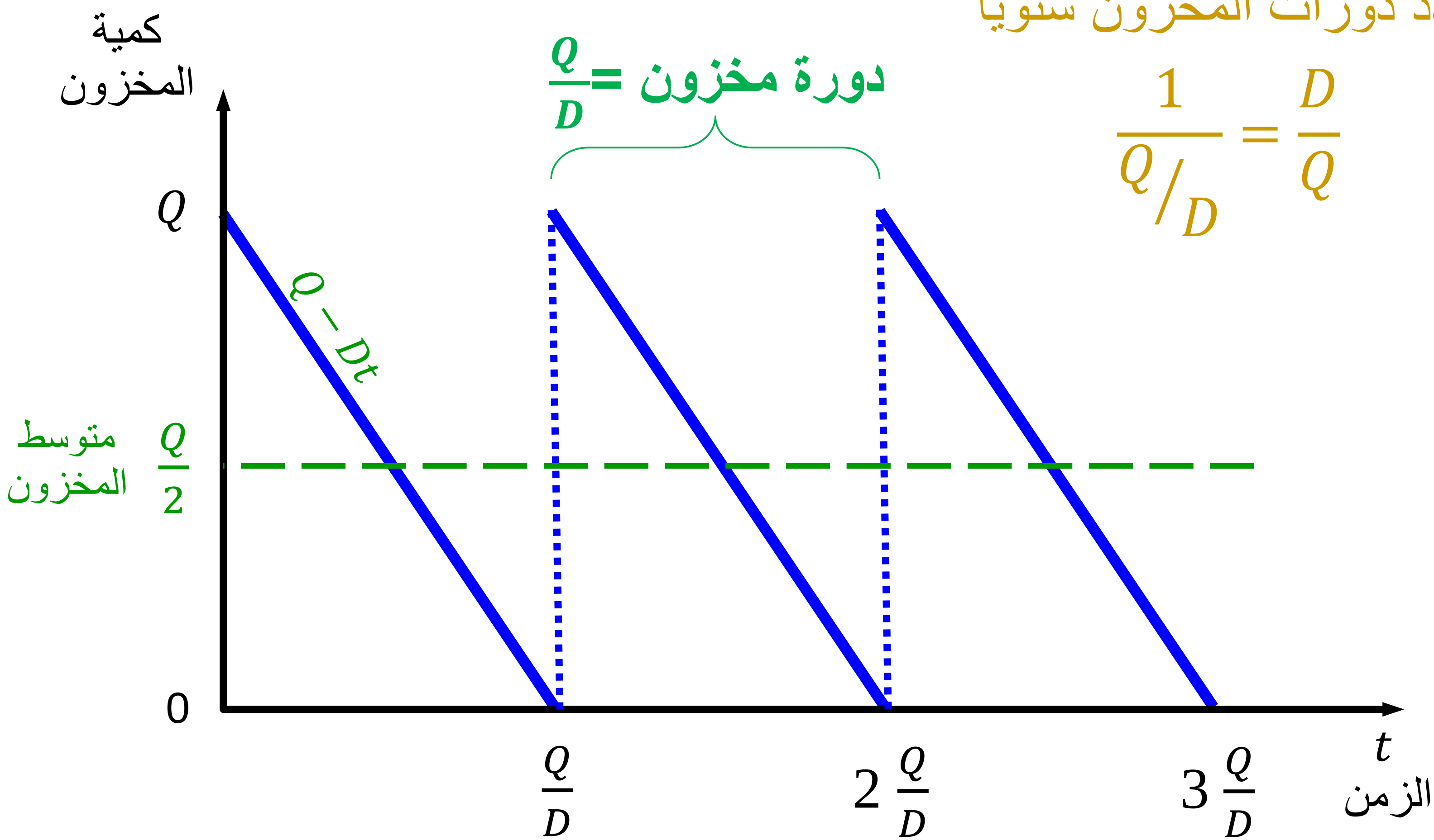
متى تصبح كمية المخزون صفر ؟

$$I(t) = 0 \Leftrightarrow Q - Dt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{Q}{D}$$

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

عدد دورات المخزون سنوياً

$$\frac{1}{Q/D} = \frac{D}{Q}$$



نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

- نموذج EOQ يحدد كمية الطلبية المثلى التي تقلل من التكاليف السنوية (Total Cost) لضبط ومراقبة المخزون:

التكلفة السنوية لإعداد الطلبية + التكلفة السنوية لحفظ المخزون + التكلفة السنوية لشراء الطلبيات = TC(Q)

- التكلفة الطلبية السنوية = تكلفة إعداد الطلبية x عدد الطلبيات سنوياً

$$= K \times \frac{D}{Q}$$

- التكلفة التخزين السنوية = $\boxed{\text{تكلفة التخزين لدورة واحدة}}$ x $\boxed{\text{عدد دورات المخزون سنوياً}}$

$$= h\frac{Q}{2}\frac{Q}{D} \times \frac{D}{Q} = h\frac{Q}{2}$$

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

- التكلفة السنوية لشراء الطلبيات = cD
- نموذج EOQ يحدد كمية الطلبية المثلى التي تقلل من التكاليف السنوية لضبط ومراقبة المخزون:

$$\mathrm{TC}(Q) = \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} + cD$$

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

التكلفة الأقل تحدث عندما $\frac{d\mathrm{TC}}{dQ} = 0$ (TC دالة محدبة)

$$-\frac{KD}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

الكمية الاقتصادية المثلى للطلبية (EOQ) هي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

- و بالتالي فإن التكلفة الإجمالية للمخزون هي

$$\mathrm{TC}(Q^*) = \frac{KD}{Q^*} + \frac{hQ^*}{2} + cD$$

$$\mathrm{TC}\left(\sqrt{\frac{2KD}{h}}\right) = \sqrt{2KDh} + cD$$

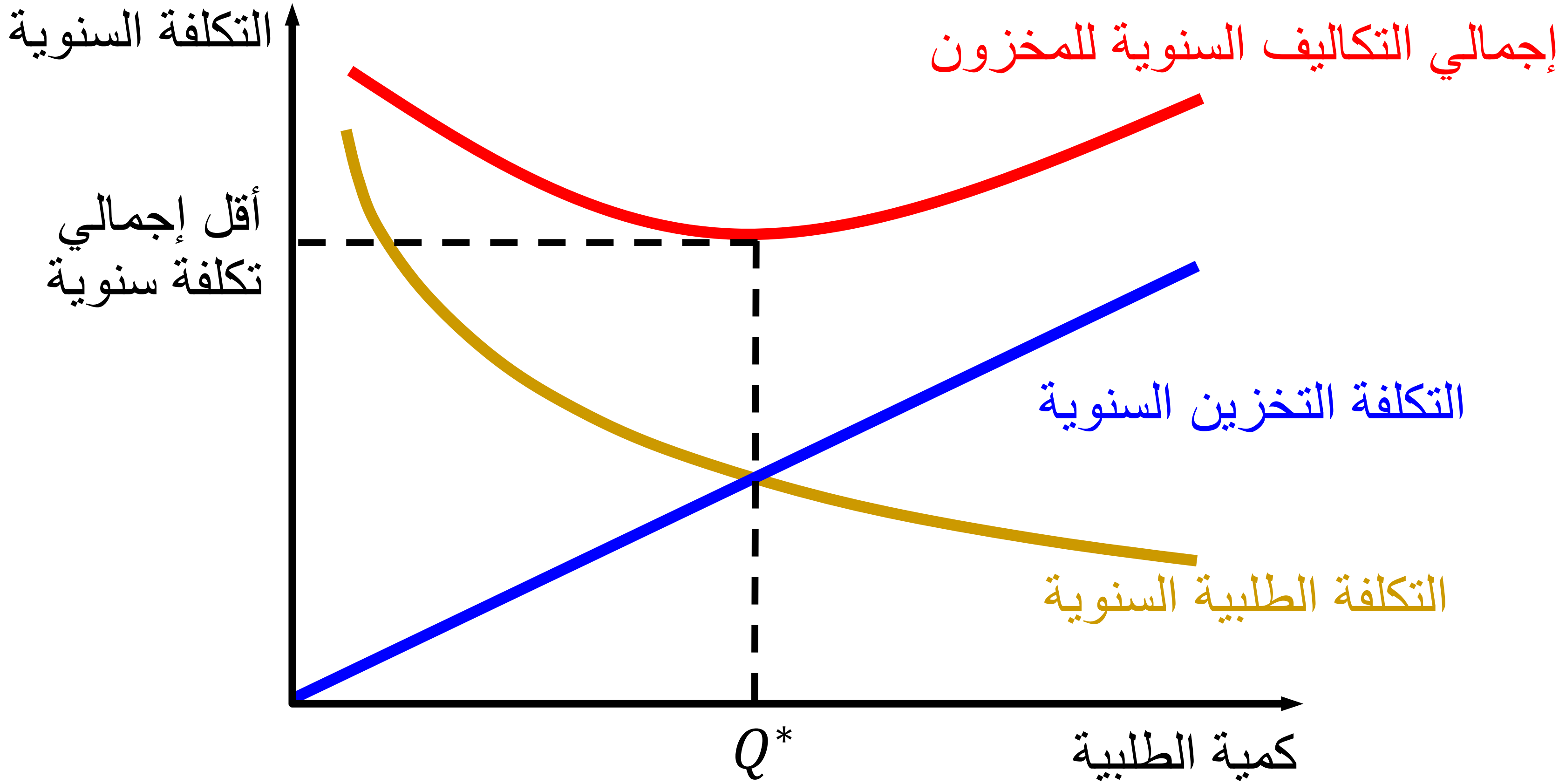
نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

- قيمة Q^* لا تتأثر بسعر شراء الوحدة c .
- التكلفة الطلبية السنوية المثلى = التكلفة التخزين السنوية المثلى

$$\frac{KD}{Q^*} = \frac{hQ^*}{2}$$

- عدد الطلبيات سنوياً $= \frac{D}{Q^*}$ طلبية
- طول دورة المخزون $= \frac{Q^*}{D}$ سنة

منحنى إجمالي التكاليف السنوية للمخزون



نموذج EOQ فعال حتى لو لم تتحقق بعض افتراضات النموذج أو المعاملات
لأن منحنى إجمالي التكاليف مسطح نسبياً حول Q^*

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

مثال 1:

- إحدى الشركات تستورد سنوياً 1000 جهاز
- تكلفة إعداد الطلبية هي 10$
- التكلفة السنوية لتخزين جهاز واحد في المخزن هي 0.5$
- الاستهلاك يحدث بمعدل ثابت ولا يُسمح بنفاد المخزون
- ما هي كمية الطلبية المثلى؟ كم عدد الطلبيات كل سنة؟ كم من الوقت سوف ينقضي بين كل طلبية وأخرى؟ كم متوسط كمية المخزون؟

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

$$D = 1000\,, K = 10\,,\ h = 0.5$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 1000}{0.5}} = 200$$

- وبالتالي ، يتعين على الشركة تقديم طلبية للحصول على 200 جهاز في كل مرة يصل فيها المخزون إلى الصفر.
- عدد الطلبيات كل سنة $= \frac{1000}{200} = 5$ طلبيات
- الوقت بين كل طلبية وأخرى $= \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$ سنة
- متوسط كمية المخزون $= \frac{Q}{2} = \frac{200}{2} = 100$ جهاز

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

مثال 2:

- إحدى الشركات تستورد سنوياً 500 قطعة معينة لتركيبها في أجهزة المحركات لديها.
- تكلفة إعداد طلبية القطع هي 5$. سعر شراء القطعة هو 10$
- التكلفة السنوية لتخزين القطعة في المخزن هي 2$
- الاستهلاك يحدث بمعدل ثابت ولا يُسمح بنفاد المخزون
- ما هي كمية الطلبية المثلى؟ كم عدد الطلبيات كل سنة؟ كم من الوقت سوف ينقضي بين كل طلبية وأخرى؟ كم إجمالي التكاليف السنوية للمخزون؟ كم متوسط المبلغ المالي المقيد في المخزون؟

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

$$D = 500\,,\, K = 5\,,\, c = 10\,,\, h = 2$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 500}{2}} = 50$$

- وبالتالي، يتعين على الشركة تقديم طلبية للحصول على 50 قطعة في كل مرة يصل فيها المخزون إلى الصفر.
- عدد الطلبيات كل سنة $= \frac{500}{50} = 10$ طلبيات
- الوقت بين كل طلبية وأخرى $= \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$ سنة

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

- إجمالي التكاليف السنوية للمخزون

$$\mathrm{TC}(Q^*) = \frac{KD}{Q^*} + \frac{hQ^*}{2} + cD$$

$$\mathrm{TC}(Q^*) = \frac{5\times 500}{50} + \frac{2\times 50}{2} + 10 \times 500$$

$$= \$\,5100$$

متوسط المبلغ المالي المقيد في المخزون $= c\,\dfrac{Q}{2}$

$$\$\,250 = 10\left(\frac{50}{2}\right) =$$

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

مثال 3:

- احد المحلات يبيع سنوياً 10000 جوال والتي يستوردها من الصين.
- تكلفة إعداد طلبية الجوالات هي 7$. سعر شراء الجوال هو 100$.
- تكلفة التخزين السنوية للجوال تساوي 20% من تكلفة الجوال. (أحيانا يعبر عن التكلفة التخزين السنوية للوحدة كنسبة مئوية من تكلفة شراء الوحدة).
- ما هي كمية الطلبية الاقتصادية المثلى؟

نموذج كمية الطلبية الاقتصادية (EOQ)

- الكمية المثلى للطلبية هي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 7 \times 10000}{100 \times 0.2}} = 83.67$$

المحل سيطلب في كل مرة 83 أو 84 جوال.

(لا يفرق كثيرا التقريب لأعلى أو لأسفل ، حيث أن منحى التكلفة محدب ومسطح تقريبا عند Q^*)

نقطة إعادة الطلب

- نفرض الآن أن الزمن بين لحظة طلب البضاعة ولحظة وصولها إلى المخازن لا يساوي الصفر أي أن فترة التوريد أكبر من الصفر($L > 0$)
- ولتفادي حالة العجز في نظام ما نقوم باستقدام الطلبية قبل نفاذ البضاعة من المخزون بوقت قدره L.
- يكون مستوى المخزون مساوياً لنقطة إعادة الطلب والتي سنرمز لها بالرمز R. وتحسب هذه النقطة في نموذج الـ EOQ بالقانون التالي:

نقطة إعادة الطلب

$$R = \begin{cases} LD & \text{إذا } L\,D \le Q^* \\ LD - n^*Q^* & \text{إذا } L\,D > Q^* \end{cases}$$

حيث n^* هو الجزء الصحيح لـ $\frac{LD}{Q^*}$ أي $n^* = \left[\frac{LD}{Q^*}\right]$

ملاحظة: يجب أن تكون D و L مقاسة بنفس الوحدة الزمنية.

فإذا كان $L\,D \le Q^*$ فإن البضاعة المطلوبة عند النقطة R تستهلك في الدورة التالية مباشرة

للدورة الحالية. أما في حالة $L\,D > Q^*$ إن البضاعة المطلوبة عند النقطة R تستهلك في الدورة رقم

n^* بعد الدورة الحالية. وللإيضاح نورد الأمثلة التالية:

نقطة إعادة الطلب

- **مثال 4**: وحدة الزمن = 1 سنة
- أ- لنفترض أن $Q^* = 100$ ، $D = 500$ ، $L = \frac{1}{6}$ سنة
- $L\,D = \frac{1}{6}(500) = 83.33 < Q^* = 100$

إذا

$$R = L\,D = \frac{1}{6}(500) = 83.33$$

ب- لنفترض أن: $Q^* = 250$, $D = 500$, $L = \frac{5}{4}$ سنة

نقطة إعادة الطلب

- $L\ D = \frac{15}{12}(500) = 625 > Q^* = 250$

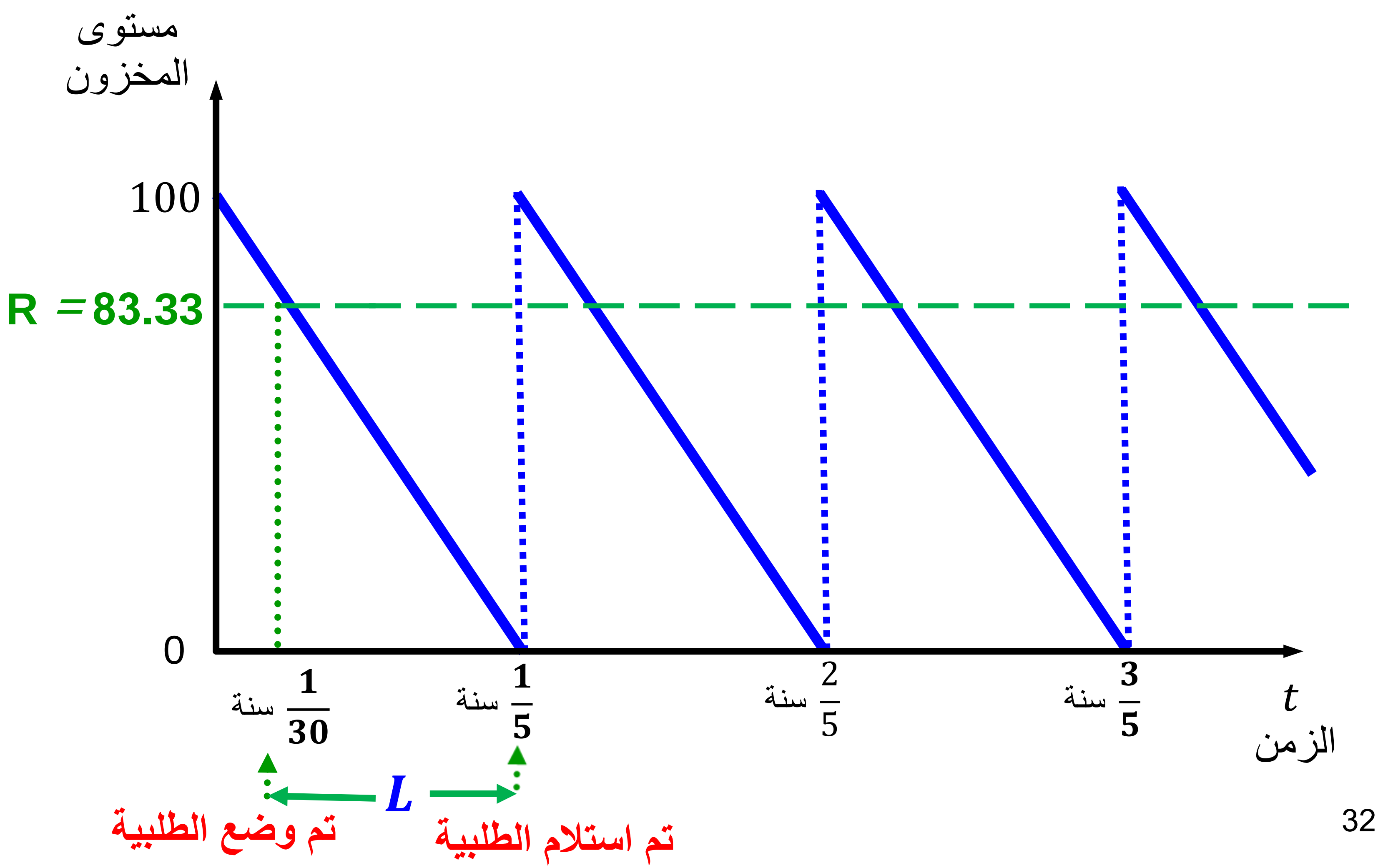
إذا $R = LD - n^*Q^*$

$$n^* = \left[\frac{LD}{Q^*}\right] = \left[\frac{625}{250}\right] = [2.5] = 2$$

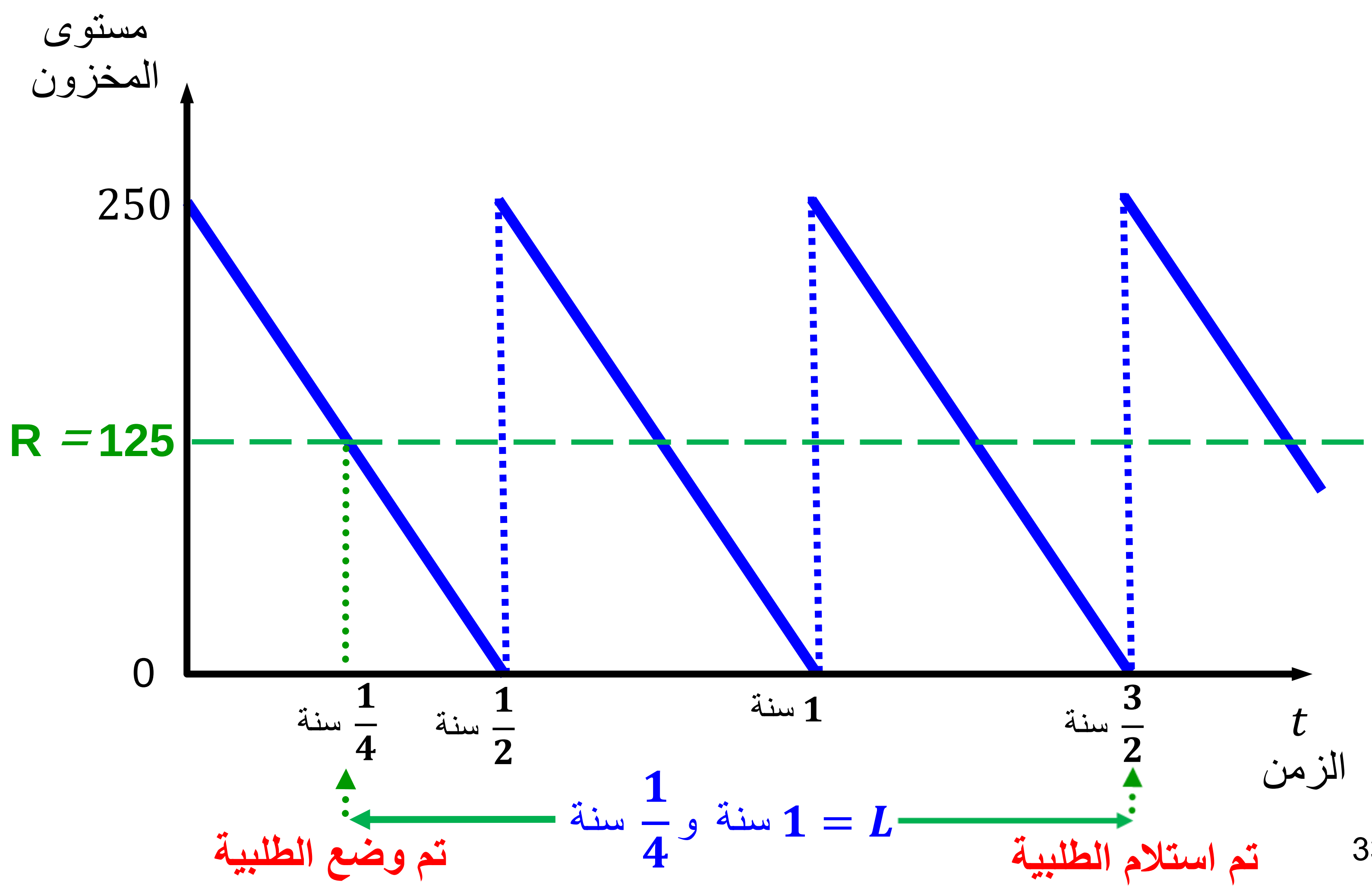
و بالتالي $R = LD - n^*Q^* = 625 - 2 \times 250 = 125$

الأشكال التالية تلخص الحالتين :

نقطة إعادة الطلب



نقطة إعادة الطلب



نقطة إعادة الطلب

مثال 5:

- احد المحلات يبيع شهرياً 800 طابعة.
- تكلفة إعداد الطلبية هي 75$. سعر الشراء هو 80$ لكل طابعة.
- تكلفة التخزين السنوية تساوي 20% من سعر شراء الطابعة. فترة التوريد هي 5 أيام.
- الشركة تعمل 288 يوم في السنة.

نقطة إعادة الطلب

$D = 800 \times 12 = 9600/\text{سنة}$

$h = 80 \times 0.20 = \$16/\text{طابعة}/\text{سنة}$

$c = \$80/\text{طابعة}$, $K = \$75/\text{طلبية}$, $L = \frac{5}{288}\text{سنة}$

حجم الطلبية الأمثل (الكمية المثلى للطلبية) هي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 75 \times 9600}{80 \times 0.2}} = 300$$

نقطة إعادة الطلب

متوسط كمية المخزون $= \frac{Q^*}{2} = \frac{300}{2} = 150$ طابعة

عدد الطلبيات سنوياً $= \frac{D}{Q^*} = \frac{9600}{300} = 32$ طلبية

طول دورة المخزون $= \frac{Q^*}{D} = \frac{300}{9600} = \frac{1}{32}$ سنة

$= \frac{1}{32} \times 288 = 9$ أيام

بما أن $(L = 5$ يوم وهو أصغر من طول دورة المخزون 9 أيام)

$\mathrm{R} = LD = 9600 \times \frac{5}{288} = 166.67$ طابعة.

نقطة إعادة الطلب

التكلفة الطلبية السنوية $= K\dfrac{D}{Q^*} = 75 \times 32 = \$2400$

التكلفة التخزين السنوية $= h\dfrac{Q^*}{2} = 16 \times \dfrac{300}{2} = \$2400$

التكلفة الطلبية السنوية $=$ التكلفة التخزين السنوية

التكلفة السنوية لشراء الطابعات $= cD = 80 \times 9600 = 768000$

التكلفة الإجمالية للمخزون

$= 2400 + 2400 + 768000 = \$772800$

نقطة إعادة الطلب

مثال 6:

تستهلك مؤسسة الحرية للطباعة والنشر 1200 علبة ورق طباعة سنوياً. إذا علمنا أن تكلفة الطلبية تساوي 20 ريال وتكلفة تخزين العلبة 4.8 ريال في السنة. والطول الأمثل للدورة معطى بـ : $\frac{Q^*}{D} = \frac{100}{1200} = 1$ شهر

إذا فرضنا أن فترة التوريد L يساوي 15 يوم، فالمطلوب إيجاد:

أ - نقطة إعادة الطلب R.

ب - أجب على نفس السؤال (أ) إذا كان L يساوي 6 أشهر.

ج - نفس السؤال إذا كان L يساوي شهر وربع الشهر.

الحل: أ – 50 علبة ب – صفر ج – 25 علبة

نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

في كثير من الأحيان بعض الأنظمة المنتجة تستهلك من نفس البضاعة التي تنتجها، فمن الطبيعي عندئذ ألا تقوم هذه الأنظمة باستيراد بضاعة تنتجها من مموّل خارجي أي أنها تستهلك ممّا تنتج، كما أن إنتاجها قد يستخدم لتمويل أنظمة أخرى.

وفي مثل هذه الحالة فيتم تحديد ما يسمى الكمية الاقتصادية للإنتاج Economic Production Quantity اختصاراً (EPQ).

فرضيات نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

- معدّل الاستهلاك D ثابت ومعلوم.
- يتم إنتاج وتخزين صنف واحد من البضاعة.
- لدينا **تكاليف تحضير الإنتاج** بدلا من تكاليف إعداد الطلبية.
- له نفس الفرضيات لنموذج (EOQ).

بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

- مرحلة الإنتاج تبدأ عندما يكون مستوى المخزون يساوي الصفر ويتم ذلك بمعدّل ثابت في وحدة الزمن نرمز له بـ p ونشترط أن يكون أكبر من معدّل الاستهلاك D (أي $p \geq D$) . نرمز بـ Q للوحدات المنتجة في كل فترة إنتاج.

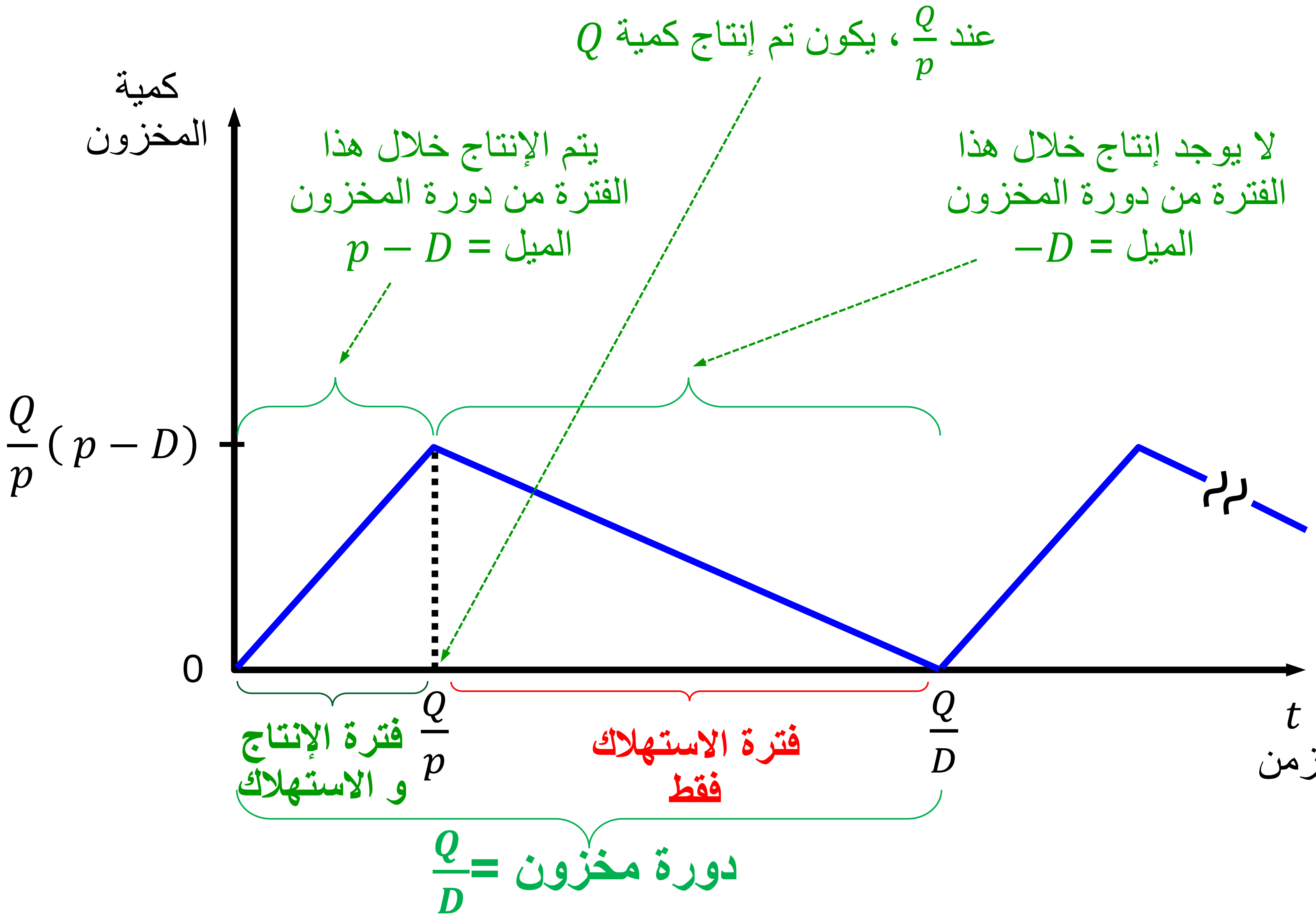
- عند بداية كل فترة إنتاج تبدأ المؤسسة عملية الإنتاج بمعدل p وحدة في وحدة الزمن وتستهلك بمعدل D في وحدة الزمن وبالتالي يتزايد مستوى المخزون بمعدل $p - D$.

بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

- حين يواصل النظام إنتاجه إلى أن تصل الكمية المنتجة إلى Q وحدة والتي توافق الزمن $\frac{Q}{p}$، وابتداءً من هذه اللحظة يتناقص مستوى المخزون بمعدل D وحدة في وحدة الزمن إلى أن ينفذ المخزون ويتوافق ذلك مع اللحظة $\frac{Q}{D}$، حيث تنتهي **دورة واحدة** وتبدأ الدورة التالية بفترة إنتاج ثانية.

- نشير إلى أن كل دورة تبدأ بفترة إنتاج وتنتهي بفترة يكون فيها الإنتاج متوقفاً. **(انظر إلى الشكل)**

نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)



بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

الهدف من بناء النموذج هو البحث عن كمية الإنتاج المثلى Q^* أي عدد الوحدات الواجب إنتاجها من طرف النظام والتي تصغّر التكلفة الإجمالية للمخزون في وحدة الزمن.

بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

$Q =$ عدد الوحدات المنتجة خلال فترة الإنتاج الواحدة

$c =$ تكلفة إنتاج الوحدة

$K =$ تكلفة تجهيز بدء الإنتاج

$h =$ تكلفة تخزين الوحدة لمدة سنة واحدة

$p =$ معدل الإنتاج السنوي

$D =$ معدل الاستهلاك السنوي

التكلفة الإجمالية في السنة =

التكلفة السنوية لإعداد بدء الإنتاج + التكلفة التخزين السنوية

+ التكلفة السنوية للإنتاج

بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

- التكلفة التحضير السنوية للإنتاج $= \frac{KD}{Q}$
- التكلفة التخزين السنوية $= h\frac{Q(p-D)}{2p}$
- التكلفة السنوية للإنتاج $= cD$

إذا كانت $\mathrm{TC}(Q)$ تمثل التكلفة الإجمالية، إذا

$$\mathrm{TC}(Q) = \frac{KD}{Q} + \frac{hQ(p-D)}{2p} + cD$$

بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

- التكلفة الأقل تحدث عندما $\frac{d\mathrm{TC}}{dQ} = 0$
  - الكمية المثلى للإنتاج Q^* هي: $Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{p}{p-D}\right)}$

$$Q^* = \mathrm{EOQ} \times \sqrt{\frac{p}{p-D}}$$

عندما $p \to \infty$ ، نجد أن $\sqrt{\frac{p}{p-D}} \to 1$ و $Q^* \to \mathrm{EOQ}$

أي أنه سيزيد معدل الإنتاج ليصبح مماثل للتسليم الفوري لنموذج EOQ

بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

- و بالتالي فإن التكلفة الإجمالية الأمثل سنويا هي

$$\mathrm{TC}(Q^*) = \frac{KD}{Q^*} + \frac{hQ^*(p-D)}{2p} + cD$$

$$\mathrm{TC}\left(\sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{p}{p-D}\right)}\right) = \sqrt{2KDh\left(\frac{p-D}{p}\right)} + cD$$

بناء نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

بعض القوانين المهمة في حالة الحل الأمثل :

– عدد الطلبيات سنوياً $= \frac{D}{Q^*}$ طلبية

– أعلى مستوى المخزون $= \frac{Q^*(p-D)}{p}$

– متوسط مستوى المخزون في الدورة الواحدة $= \frac{1}{2}\frac{Q}{p}(p-D)$

– فترة دورة المخزون $= \frac{Q^*}{D}$ سنة

– فترة الإنتاج و الاستهلاك $= \frac{Q^*}{p}$ سنة

– فترة الإستهلاك $= \frac{Q^*(p-D)}{pD}$ سنة

نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

مثال 7: إحدى الشركات تحتاج سنويا إلى 10000 جهاز ، قيمة كل جهاز هو 2000$. الشركة لديها القدرة لإنتاج 25000 جهاز سنويا. تكلفة تحضير بدء الإنتاج يساوي 200$. تكلفة التخزين السنوية تساوي 25% من قيمة تكلفة الجهاز.

ماهي كمية الإنتاج المثلى؟ وعدد دورات الإنتاج؟ وفترة الإنتاج؟

نلاحظ أن: $h = 0.25\,(2000) = \$500$

نموذج كمية الإنتاج الاقتصادي (EPQ)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{p}{p-D}} = \sqrt{\frac{2\times200\times10000}{500}\left(\frac{25000}{25000-10000}\right)}$$
$$= 115.47$$

عدد دورات الإنتاج (المخزون) سنوياً $= \frac{D}{Q} = \frac{10000}{115.47} = 86.6$ دورة

فترة الإنتاج $= \frac{Q}{p} = \frac{115.47}{25000} = 0.0046$ سنة

فترة دورة المخزون $= \frac{Q}{D} = \frac{115.47}{10000} = 0.012$ سنة

النماذج الاحتمالية

- ✓ نماذج المخزون التي يكون فيها الطلب متغيراً عشوائياً ذو توزيع احتمالي معروف ولكنه غير متغير مع الزمن.
- ✓ وفي مثل نماذج المخزون الاحتمالية فإننا لا نتحدث عن القيم الممكنة للطلب أو عن جعل التكلفة الكلية ذات الصلة للمخزون أصغر ما يمكن كما هي الحال في نماذج المخزون المحددة ولكننا نتحدث عن **القيمة المتوقعة للطلب التي تجعل التكلفة الكلية المتوقعة لمشكلة المخزون قيد الدراسة أصغر ما يمكن.**

مسألة بائع الصحف

يشتهر هذا النموذج أيضاً بنموذج بائع الجرائد (Newsboy problem). فبائع الجرائد لا يعرف بشكل مؤكد كم سيكون عليه الطلب من جريدة ما بالضبط، فإن اشترى أكثر من اللازم سيتعرض لخسارة قيمة الجرائد التي لا تباع حتى نهاية اليوم وإن اشترى أقل من اللازم فإنه سيخسر بعضاً من ربحه (وربما بعضاً من زبائنه) والذي يمكن أن يحصل عليه لو كانت الجرائد متوافرة. فالطلب إذاً ذو طبيعة عشوائية. ولكن الخبرة الطويلة للبائع أو لمزوده، والتي قد تكون مدعومة بتسجيل لبيانات سابقة، تمكنه من تقدير التوزيع الاحتمالي لمثل هذا الطلب. وعلى ضوء ذلك يرغب البائع بشراء الكمية المثلى من الجرائد وسيكون ذلك في مطلع الفترة (كل يوم ـ كل أسبوع ـ كل شهر) والتي تجعل أرباحه المتوقعة أكبر ما يمكن. ونصادف في الواقع العملي الكثير من الحالات المماثلة لحالة بائع الجرائد.

مسألة بائع الصحف

المصطلحات التي ستستخدم لبناء النموذج فهي:

Q: عدد الوحدات المطلوبة أو المنتجة (مقدار الطلبية) لكامل الفترة.

D: معدل الطلب أو الاستهلاك لكامل الفترة وهو متغير عشوائي.

c: سعر شراء الوحدة.

s: سعر بيع الوحدة.

v: القيمة المسترجعة للوحدة غير المباعة.

$f_D(x)$: دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي D.

$F_D(x)$: دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي D.

مسألة بائع الصحف

لبناء النموذج لدينا حالتين:

(i) أن يزيد استهلاك السلعة عن الكمية المطلوبة منها $(D > Q)$ عندئذٍ يحقق البائع ربحاً صافياً قدره $PR(Q) = Q(s-c)$. حيث $PR(Q)$ يرمز إلى الربح الصافي.

(ii) ألا يزيد استهلاك السلعة عن الكمية المطلوبة منها عندئذٍ يحقق البائع ربحاً قدره $PR(Q) = Ds + v(Q-D) - cQ$.

مسألة بائع الصحف

وبالتالي يمكن كتابة $PR(Q)$ كما يلي:

$$PR(Q) = \begin{cases} Q(s-c), & Q < D \\ Ds + v(Q-D) - cQ, & Q \geq D \end{cases}$$

ليكن $E\{PR(Q)\}$ يرمز إلى القيمة المتوقعة للربح. لإيجاد $E\{PR(Q)\}$ نميز حالتين.

الحالة الأولى: المتغير العشوائي D منفصل . في هذه الحالة يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية

$P(D = x) = f_D(x).$ بالتالي فإن القيمة المتوقعة للربح تعطى بـ

$$E[PR(Q)] = \sum_{x=0}^{Q} (xs + v(Q-x) - cQ) P(D = x) + \sum_{x=Q+1}^{\infty} Q(s-c)\, P(D = x) \quad (1)$$

<u>ملاحظة:</u> $x = Q + 1$ يرمز إلى قيمة x التي تأتي في الجدول مباشرة بعد قيمة Q.

مسألة بائع الصحف

الحالة الثانية: المتغير العشوائي D متصل.

$$E[PR(Q)] = \int_0^Q (xs + v(Q-x) - cQ) f_D(x)dx + \int_Q^\infty Q(s-c) f_D(x)dx \quad (2)$$

والهدف الرئيس

هو إيجاد القيمة Q^* لـ Q والتي تجعل $E[PR(Q)]$ أكبر ما يمكن.

ولدينا بهذا الخصوص النتائج التالية:

نظرية 1:

إذا كان المتغير العشوائي D منفصلا فإن القيمة المثلى Q^* يجب أن تحقق.

$$F_D(Q^* - 1) \leq \frac{s-c}{s-v} \leq F_D(Q^*)$$

مسألة بائع الصحف

مثال 8:

يمكن شراء إحدى السلع النادرة بقيمة 40 ريال للوحدة وبيعها بقيمة 50 ريال وقد وجد أن الطلب على هذه السلعة خلال فترة زمنية قدرها شهرين يتبع التوزيع الاحتمالي المعطى بالجدول

عدد الوحدات x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$P(D=x)=f_D(x)$	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10	0.05

فكم هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة إذا كانت $v=$ 10 ريال وما هو أكبر ربح متوقع عندئذٍ؟

مسألة بائع الصحف

من جدول التوزيع الاحتمالي أعلاه نجد أن التوزيع المتجمع $F_D(x)$ معطى كما في الجدول

80	70	60	50	40	30	20	10	0	x
1	0,95	0,85	0,70	0,50	0,30	0,15	0,05	0	$F_D(x) = P\{D \leq x\}$

وحسب بيانات المثال نجد

$$\frac{s-c}{s-v} = \frac{50-40}{50-10} = \frac{1}{4} = 0.25$$

وبحسب النظرية 1 فإن القيمة المثلى Q^* يجب ن تحقق

$$F_D\,(Q^*-1) \leq\; 0.25 \leq\; F_D(Q^*)$$

وبحسب جدول $F_D\;(x)$ فإن:

$$F_D\,(20) \;=\; 0.15 \;<\; 0.25 \;<\; 0.30 \;=\; F_D\,(30)$$

مسألة بائع الصحف

لذا فإن Q^*=30 وحدة ولحساب الربح المتوقع نطبق العلاقة (1) من أجل

$Q = Q^* = 30$ فنجد أن هذا الربح يساوي:

$$E[PR(Q^*)] = \sum_{x=0}^{Q^*} (xs + v(Q^* - x) - cQ^*)P(D = x) + \sum_{x=Q^*+1}^{\infty} Q^*(s - c)\,P(D = x)$$

$$\sum\nolimits_{D=0}^{30} \big(50x + 10(30 - x) - 40 \times 30)P(D = x)\big) + \sum\nolimits_{x=40}^{80} 30(50 - 40)P(D = x)$$

$$= \sum\nolimits_{x=0}^{30} \Big(40x - 900)P(D = x) + \sum\nolimits_{x=40}^{80} 300P(D = x) = 10 + 210 = 220$$

إذا فإن القيمة المتوقعة للربح تساوي 220 ريال.

مسألة بائع الصحف

نظرية 2:

إذا كان المتغير العشوائي D متصلا فإن القيمة المثلى Q^* يجب أن تحقق العلاقة:

$$F_D(Q^*) = \frac{s-c}{s-v}$$

مثال 9:

وجد أن الطلب على سلعة موسمية يتبع التوزيع المنتظم في الفترة [500 , 100]. فما هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة بحيث يتحقق أكبر ربح موسمي من هذه السلعة وما هي القيمة المتوقعة لهذا الربح إذا كان

$c = 60$ ريال ، $s = 80$ ريال ، $v = 10$ ريال.

مسألة بائع الصحف

حسب النظرية 2 فإن الكمية المثلى Q^* يجب أن تحقق

$$F_D(Q^*) = P\{D \leq Q^*\} = \frac{s-c}{s-v} = \frac{80-60}{80-10} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7} = 0.285$$

بما أن الطلب D يتبع التوزيع المنتظم في الفترة [100 , 500]، فإن

دالة التوزيع التراكمي تكون $F_D(x) = \frac{x-100}{400}$ ، $100 \leq x \leq 500$ ودالة الكثافة الاحتمالية

$$f_D(x) = \frac{1}{400}, 100 \leq x \leq 500.$$

إذا $F_D(Q^*) = \frac{Q^*-100}{400} = 0.285$ ، بالتالي فإن الكمية المثلى هي $Q^* \cong 214$ وحدة.

مسألة بائع الصحف

ولحساب الربح المتوقع نطبق العلاقة (2) من أجل $Q = Q^* = 214$ فنجد أن هذا الربح يساوي:

$$E\big(PR(Q^*)\big) = \int_{100}^{Q^*} (xs + v(Q^* - x) - cQ^*) f_D(x)dx + \int_{Q^*}^{500} Q^*(s - c) f_D(x)dx$$

$$= \int_{100}^{214} (80x + 10(214 - x) - 60 \times 214) \frac{1}{400} dx + \int_{214}^{500} 214(80 - 60) \frac{1}{400} dx$$

$$= \int_{100}^{214} (70x - 10700) \frac{1}{400} dx + \int_{214}^{500} \frac{4280}{400} dx = 3142.85$$

إذا فإن القيمة المتوقعة للربح تساوي 85.3142 ريال.

مسألة بائع الصحف

مثال 10:

وجد أن الطلب على سلعة موسمية يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 7000 وحدة وانحراف معياري 4000 وحدة فما هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة بحيث يتحقق أكبر ربح موسمي من هذه السلعة وما هي القيمة المتوقعة لهذا الربح إذا كان $c = 60$ ريال ، $s = 80$ ريال ، $v = 10$ ريال.

الحل:

حسب النظرية 2 فإن الكمية المثلى Q^* يجب أن تحقق

$$F_D(Q^*) = P\{D \le Q^*\} = \frac{s-c}{s-v} = \frac{80-60}{80-10} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7} = 0.2857 \Leftrightarrow$$

$$P\left\{\frac{D-7000}{4000} \le \frac{Q^*-7000}{4000}\right\} = 0.2857 \Leftrightarrow$$

$$P\left\{Z \le \frac{Q^*-7000}{4000}\right\} = 0.2857$$

مسألة بائع الصحف

وباستخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\frac{Q^{*}-7000}{4000} \cong -0.5659 \Leftrightarrow Q^{*} \cong 4736$$ وحدة

ملاحظة:

- ✓ في التطبيق على المسائل سوف نهتم بنوعين من التوزيعات للمتغير العشوائي D وهما التوزيع المنتظم والتوزيع الطبيعي. حساب **الكمية المثلى** Q^{*} يكون عندما D يتبع **التوزيع المنتظم و التوزيع الطبيعي**.
- ✓ أما حساب **القيمة المتوقعة للربح** فيكون **فقط** عندما D يتبع **التوزيع المنتظم**.