نظرية (٥-٦)

إذا كان كل من النظامين $(S,*)$ و$(T,\circ)$ مغلقا ودامجا ولكل منهما عنصر محايد (e لـ S وe' لـ T) ولكل عنصر فيهما نظير وكان f تشاكلا من S إلى T؛ فإن:

(ا) نواة التشاكل f مجموعة غير خالية؛ أي أن $kerf \neq \emptyset$.

(ب) محايد النظام $(f(S),\circ)$ هو ذاته محايد النظام $(T,\circ)$.

(ج) يكون التشاكل f متباينا إذا وفقط إذا كان $kerf = \{e\}$.

البرهان:

(أ) بما أن e عنصر محايد للنظام $(S,*)$ فإن $e * e = e$، ولأن f تطبيق فإن $f(e) = f(e * e)$. وبالتالي فإن:

$$f(e) = f(e * e) = f(e) \circ f(e)$$

لأن f تشاكل. بالضرب في نظير f(e) في T من اليسار في طرفي المعادلة نجد أن:

$$(f(e))^{-1} \circ f(e) = \left(f(e)\right)^{-1} \circ \left(f(e) \circ f(e)\right) = (\left(f(e)\right)^{-1} \circ f(e)) \circ f(e)$$

وذلك لأن النظام $(T,\circ)$ دامج. باستخدام خاصة النظير في T نجد أن:

$$e' = e' \circ f(e) = f(e)$$

لأن e' عنصر محايد للنظام $(T,\circ)$. إذن $e \in kerf$ حسب تعريف النواة؛ وبالتالي فإن نواة التشاكل f مجموعة غير خالية.

(ب) نعلم من النظرية (٥-٥) أن محايد النظام $(f(S),\circ)$ هو $f(e)$. ولكن من الفقرة (أ) نجد أن $f(e) = e'$. إذن محايد النظام $(f(S),\circ)$ هو ذاته محايد النظام $(T,\circ)$.

(ج) لنفرض أن التشاكل f متباين، ولنفرض أن $x \in kerf$. بالاستفادة من الفقرة (أ) وحسب تعريف النواة نجد أن:

$$f(e) = e' = f(x)$$

لكن f متباين؛ إذن $x = e$ و$kerf = \{e\}$.

الآن لنفرض أن $kerf = \{e\}$ وأن $f(x_1) = f(x_2)$ حيث $x_1, x_2 \in S$. إذن:

$$f(x_1) \circ \left(f(x_2)\right)^{-1} = f(x_2) \circ \left(f(x_2)\right)^{-1} = e'$$

باستخدام خاصة النظير في T. ولأن النظام $(T,\circ)$ دامج؛ فإن النظير وحيد. إذن $\left(f(x_2)\right)^{-1} = f(x_2^{-1})$ (استفادة من النظرية (٥-٥)). ولأن f تشاكل فإننا نحصل على:

$$f(x_1 * x_2^{-1}) = f(x_1) \circ f(x_2^{-1}) = e'$$

إذن $x_1 * x_2^{-1} \in kerf = \{e\}$ حسب تعريف النواة. وبالتالي $x_1 * x_2^{-1} = e$. وبالضرب في x_2 من اليمين للطرفين واستخدام خاصة العنصر المحايد في S؛ نجد أن:

$$(x_1 * x_2^{-1}) * x_2 = e * x_2 = x_2$$

وحيث أن علاقة المساواة علاقة تناظرية على S؛ فيمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$x_2 = (x_1 * x_2^{-1}) * x_2$$

وباستخدام خاصتي التجميع والنظيرفي S نجد أن:

$$x_2 = (x_1 * x_2^{-1}) * x_2 = x_1 * (x_2^{-1} * x_2) = x_1 * e = x_1$$

لأن e هو العنصر المحايد في S. إذن $x_1 = x_2$ والتطبيق f متباين.