$$f_X(x) = e^{-(x-\theta)} \quad , \quad \theta < x < \infty$$

$$F_X(x) = \int_\theta^x f_X(x)\,dx = e^{\theta}\int_\theta^x e^{-x}\,dx = e^{-(x-\theta)} + 1 \quad , \quad \theta < x < \infty$$

احصاءة كافي → $S = X_{(1)} = T(\underline{X}) = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$\therefore f_T(t) = n\left[1 - F_X(t)\right]^{n-1} f_X(t)$$

$$= n\left[1 - \left(e^{-(t-\theta)} - 1\right)\right]^{n-1} e^{-(t-\theta)} = n e^{-n(t-\theta)} \quad , \quad \theta < t < \infty$$

تحويل الاحصاءة الكافية إلى كمية محورية → $Q = T - \theta$

$* \; q = t - \theta \Rightarrow t = q + \theta$

$\Rightarrow \frac{d}{dq} t = 1$

$* \; \theta < t \Rightarrow \theta - \theta < t - \theta$

$\Rightarrow 0 < q$

$$\therefore g_Q(q) = f_T(t)\left|\frac{d}{dq} t\right|$$

$$= n e^{-n((t-\theta)-\theta)}$$

$$= n e^{-nt} \quad , \quad 0 < q$$

فترة الثقة لكمية المحورية →

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1 - \alpha$$

(1) $\displaystyle\int_{q_1}^{q_2} g(q)\,dq = 1 - \alpha$

(2) الاشتقاق بالنسبة لـ q_1:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{g(q_1)}{g(q_2)} = \frac{n e^{-nq_1}}{n e^{-nq_2}} = e^{n(q_2 - q_1)}$$

(3)

$q_1 < Q < q_2$

$\Rightarrow q_1 < T - \theta < q_2$

$\Rightarrow q_1 - T < -\theta < q_2 - T$

$\Rightarrow T - q_2 < \theta < T - q_1$

$\therefore L = T - q_1 - (T - q_2)$

نريد الطول أقل ما يمكن $= q_2 - q_1$

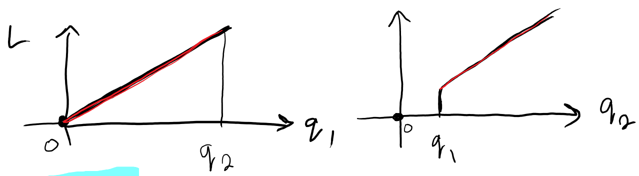
$$\Rightarrow \frac{d}{dq_1} L = \frac{d}{dq_1} q_2 - 1$$

$$= e^{n(q_2 - q_1)} - 1 > 0$$

as $q_1 < q_2$

بما أن المشتقة الأولى موجبة

إذن L الدالة متزايدة .



$\therefore q_1 = 0$

نختار أصغر قيمة حيث أن قيمة q_1 التي تجعل L أقل ما يمكن لا تعتمد على q_2

$0 < q_1$

$0 < q_2$

$q_1 < q_2$

$\} \; 0 < q_1 < q_2$

(4) لإيجاد قيمة q_2 بمعلومية قيمة $q_1 = 0$:

$$\int_0^{q_2} g(q)\,dq = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{q_2} n e^{-nq}\,dq = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow n \left.\frac{e^{-nq}}{-n}\right|_0^{q_2} = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-nq_2} = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow e^{-nq_2} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow -nq_2 = \log\alpha$$

$$\Leftrightarrow q_2 = \frac{-\log\alpha}{n} > 0$$

as $\log\alpha < 0$

as $0 < \alpha < 1$

$$\therefore T - q_2 < Q < T - q_1$$

$$\Rightarrow T - \frac{-\log\alpha}{n} < Q < T$$

$$\Rightarrow Q \in \left(T + \frac{\log\alpha}{n}, T\right)$$