$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} \quad , \quad 0 < x < \theta$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{\theta}\,dx = \frac{1}{\theta}x \quad , \quad 0 < x < \theta$$

إحصاء كافي $\longrightarrow$ $S = X_{(n)} = T(\underline{X}) = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$\therefore f_T(t) = n\left[F_X(t)\right]^{n-1} f_X(t)$$
$$= n\left[\frac{1}{\theta}t\right]^{n-1}\frac{1}{\theta} = n\frac{1}{\theta^n}t^{n-1} \quad , \quad 0 < t < \theta$$

تحويل الإحصاء الكافي إلى كمية محورية $\longrightarrow$ $Q = \frac{T}{\theta}$

$* \; q = \frac{t}{\theta} \Rightarrow t = \theta q$

$\Rightarrow \frac{d}{dq}t = \theta$

$* \; 0 < t < \theta \Rightarrow 0 < q < 1$

$$\therefore g_Q(q) = f_T(t)\left|\frac{d}{dq}t\right|$$
$$= n\frac{1}{\theta^n}(\theta q)^{n-1}\theta$$
$$= n q^{n-1} \quad , \quad 0 < q < 1$$

فترة الثقة لكمية المحورية $\longrightarrow$

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1 - \alpha$$

1

$$\int_{q_1}^{q_2} g(q)\,dq = 1 - \alpha$$

2

الاشتقاق بالنسبة ل q_1:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{g(q_1)}{g(q_2)} = \frac{n q_1^{n-1}}{n q_2^{n-1}} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n-1}$$

4

لإيجاد قيمة q_1 بعد معرفة قيمة $q_2 = 1$:

$$\int_{q_1}^{1} n q^{n-1}\,dq = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow n\left.\frac{q^n}{n}\right|_{q_1}^{1} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow 1 - q_1^n = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow q_1^n = \alpha$$

$$\Rightarrow q_1 = \sqrt[n]{\alpha} > 0$$

3

$$q_1 < Q < q_2$$
$$\Rightarrow q_1 < \frac{T}{\theta} < q_2$$
$$\Rightarrow \frac{T}{q_2} < \theta < \frac{T}{q_1}$$

$$\therefore L = \frac{T}{q_1} - \frac{T}{q_2}$$

نريد الطول أقل ما يمكن

$$\Rightarrow \frac{d}{dq_1}L = T\frac{-1}{q_1^2} - T\frac{-\frac{d}{dq_1}q_2}{q_2^2}$$

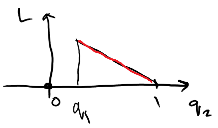
$$= T\left[\frac{-1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\frac{dq_2}{dq_1}\right]$$

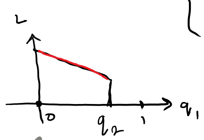
$$= T\left[-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\frac{q_1^{n-1}}{q_2^{n-1}}\right] = T\left[\frac{q_1^{n-1}}{q_2^{n+1}} - \frac{1}{q_1^2}\right] = T\left[\frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_2^{n+1}q_1^2}\right] < 0$$

as $q_1 < q_2 \Rightarrow q_1^{n+1} - q_2^{n+1} < 0$

نجد هنا أن دالة L دالة متناقصة

ولكن
$\left.\begin{array}{l} 0 < q_1 < 1 \\ 0 < q_2 < 1 \\ q_1 < q_2 \end{array}\right\} \longrightarrow 0 < q_1 < q_2 < 1$





من هنا نجد أن أقل قيمة L تتحقق عندما $q_2 = 1$

L متناقصة
لذا قيمة q_2 التي تجعل L
أقل ما يمكن عند 1

L متناقصة
لذا قيمة q_1 التي تجعل L
أقل ما يمكن q_2 وهذا لا ينفع

$$\therefore \frac{T}{q_2} < \theta < \frac{T}{q_1}$$

$$\Rightarrow T < \theta < \frac{T}{\sqrt[n]{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \theta \in \left(T, \frac{T}{\sqrt[n]{\alpha}}\right)$$