مقرر 322 بحث

تمارين #5

(الفصل الثاني2.9)

سؤال #1:

يتم إنتاج نوع معين من البضاعة بمعدل 4000 وحدة في السنة ويقدر معدل الطلب على هذه البضاعة بـ 1600 وحدة في السنة. تبدأ مرحلة الإنتاج إذا وصل عدد الوحدات المسترجعة في قائمة الطلبات المسترجعة إلى 40 وحدة. إذا علمنا أن تكلفة التحضير للإنتاج تساوي 400 ريال وأن تكلفة إنتاج الوحدة 20 ريال وأن تكلفة تخزين الوحدة في السنة تساوي 20% من سعر الوحدة وأن تكلفة العجز للوحدة في السنة تساوي 5 ريال، أوجد ما يلي:

1. الكمية الاقتصادية للطلب.
2. متوسط مستوى المخزون في السنة.
3. تكلفة التخزين السنوية، تكلفة التحضير السنوية.

الحل:

$$r = 4000 \quad , S = 40, K = 400, D = 1600, p = 20 \, , h = 0.2p = 4, \quad g = 5$$

.1

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}} = 979.795$$

.2 متوسط مستوى المخزون:

$$\bar{I} = \frac{\left[q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)-S\right]^2}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} = 255.299$$

.3

$$HCU(q^*,S^*) = \frac{h\left[q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)-S\right]^2}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} + \frac{gS^2}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} = 1028.002$$

$$SCU(q^*,S^*) = \frac{KD}{q^*} = 653.197$$

سؤال #2:

أثبت صحة القوانين الموجودة في الملاحظات من 1-4 من الملاحظات (2,7).

ملاحظات (٢, ٧):

١ – بالتعويض عن قيمة q^* في قانون الـ S^* و M^* نجد:

$$S^* = \sqrt{\frac{2KD(1-\frac{D}{r})h}{g(h+g)}} \qquad \text{و} \qquad M^* = \sqrt{\frac{2KD(1-\frac{D}{r})g}{h(h+g)}}$$

٢ – العدد الأمثل للدورات في وحدة الزمن يساوي:

$$N^* = \sqrt{\frac{D(1-\frac{D}{r})h}{2K}\,\frac{g}{g+h}}$$

٣ – الطول الأمثل للدورة T^* يساوي:

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{D(1-\frac{D}{r})h}\,\frac{g+h}{g}}$$

٤ – التكلفة الإجمالية المثلى في وحدة الزمن تساوي:

$$TCU(q^*,S^*) = \sqrt{\frac{2KDh(1-\frac{D}{r})g}{h+g}} + p.D$$

الحل:

ملاحظة #1:

$$S^* = \frac{h}{h+g}\left(1-\frac{D}{r}\right)q^* = \frac{h}{h+g}\left(1-\frac{D}{r}\right)\sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}} = \sqrt{\frac{2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)h}{g(h+g)}}\ \surd$$

بمعلومية أن أعلى مستوى للمخزون M^* يعطى بالعلاقة التالية وبالتعويض عن قيم q^* و S^*:

$$M^* = q^*\left(1-\frac{D}{r}\right) - \boldsymbol{S^*} = q^*\left(1-\frac{D}{r}\right) - \boldsymbol{\frac{h}{h+g}\left(1-\frac{D}{r}\right)q^*} = q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)\left[1-\frac{h}{h+g}\right]$$

$$= q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)\left[\frac{g}{h+g}\right] = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}\left(1-\frac{D}{r}\right)\left[\frac{g}{h+g}\right] = \sqrt{\frac{2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)}{h}\frac{g}{h+g}}\ \surd$$

ملاحظة #2:

$$N = D/q$$

لإحتساب العدد الأمثل للطلبيات N^* حيث يعتمد على كمية الطلب المثلى:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}$$

نقوم بالتعويض بكمية الطلب المثلى:

$$N^* = \frac{D}{q^*} = \frac{D}{\sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}} = \sqrt{\frac{Dh\left(1-\frac{D}{r}\right)}{2K}\frac{g}{h+g}}\ \surd$$

ملاحظة #3:

بالإستفادة من ملاحظة #2 و العلاقة العكسية بين العدد الأمثل للطلبيات و الطول الأمثل:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Dh\left(1-\frac{D}{r}\right)}{2K}\frac{g}{h+g}}} = \sqrt{\frac{2K}{Dh\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}\ \surd$$

ملاحظة #4:

التكلفة الإجمالية المثلى في وحدة الزمن تعتمد على الكمية الاقتصادية المثلى q^* و أعلى مستوى للعجز S^* :

$$TCU(q^*,S^*) = \frac{h\left[q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)-S^*\right]^2}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} + \frac{gS^2}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} + \frac{KD}{q^*} + pD$$

بالتركيز على التكلفة المتغيرة المثلى:

$$VCU(q^*,S^*) = \frac{h\left[q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)-S^*\right]^2}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} + \frac{gS^{*2}}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} + \frac{KD}{q^*}$$

$$= \frac{h\left[q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)-S^*\right]^2 + gS^2 + 2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)} = \frac{h[M^*]^2 + gS^2 + 2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)}{2q^*\left(1-\frac{D}{r}\right)}$$

بالتعويض من ملاحظة 1:

$$VCU(q^*,S^*) = \frac{h\left(\frac{2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)}{h}\frac{g}{h+g}\right) + g\left(\frac{2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)h}{g(h+g)}\right) + 2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)}{2\sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}\left(1-\frac{D}{r}\right)}$$

$$= \frac{\left(2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)\frac{g}{h+g}\right) + \left(2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)\frac{h}{(h+g)}\right) + 2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)}{2\sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}\left(1-\frac{D}{r}\right)}$$

$$= \frac{2KD\left(1-\frac{D}{r}\right)\left(\frac{g}{h+g}+\frac{h}{h+g}+1\right)}{2\sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}\left(1-\frac{D}{r}\right)} = \frac{4KD\left(1-\frac{D}{r}\right)}{2\sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}\left(1-\frac{D}{r}\right)}$$

$$= \frac{2KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}\frac{h+g}{g}}} = \sqrt{\frac{2KDh\left(1-\frac{D}{r}\right)g}{h+g}}$$

بالتعويض في التكلفة الإجمالية المثلى نتحصل على نفس النتيجة المعطاة.

سؤال #3:

أثبت صحة الملاحظة 6 من الملاحظات (2,7).

٦ – يمكن استخدام الخوارزمية (١، ٢) لإيجاد قيم صحيحة للكمية الاقتصادية للإنتاج.

الحل:

للتبسيط سنفرض $\alpha = (1 - \frac{D}{r})$:

نحتاج إثبات أنه إذا كان $(q^*)^2 < [q^* + 1] * [q^*]$ فالاختيار يقع على $[q^*]$.

نقوم بطلب $[q^*]$ بدلاً من $[q^*] + 1$ إذا تحققت المتباينة التالية:

$$VCU([q^*]) < VCU([q^*] + 1) \quad (*)$$

حيث أن قانون التكلفة الإجمالية المتغيرة يعطى بالتالي:

$$VCU(q^*, S^*) = \frac{h[\alpha q^* - S^*]^2}{2\alpha q^*} + \frac{gS^{*2}}{2\alpha q^*} + \frac{KD}{q^*}$$

$$= \frac{h(\alpha^2 q^{*2} + S^{*2} - 2\alpha q^* S^*)}{2\alpha q^*} + \frac{gS^{*2}}{2\alpha q^*} + \frac{KD}{q^*}$$

وبالتعويض عن قانون $S^* = \frac{h}{h+g}\alpha q^*$:

$$VCU(q^*) = \frac{h\left(\alpha^2 q^{*2} + \left(\frac{h}{h+g}\right)^2 \alpha^2 q^{*2} - 2\frac{h}{h+g}\alpha^2 q^{*2}\right)}{2\alpha q^*} + \frac{g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2 \alpha^2 q^{*2}}{2\alpha q^*} + \frac{KD}{q^*}$$

$$= \frac{h\left(\alpha q^* + \left(\frac{h}{h+g}\right)^2 \alpha q^* - 2\frac{h}{h+g}\alpha q^*\right)}{2} + \frac{g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2 \alpha q^*}{2} + \frac{KD}{q^*} \quad (**)$$

بتعويض (**) في (*) وبعد أخذ العامل المشترك نتحصل على مايلي:

$$\frac{h\alpha[q^*]}{2}\left(1 + \left(\frac{h}{h+g}\right)^2 - 2\frac{h}{h+g}\right) + \frac{g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2 \alpha[q^*]}{2} + \frac{KD}{[q^*]}$$

$$< \frac{h\alpha([q^*]+1)}{2}\left(1 + \left(\frac{h}{h+g}\right)^2 - 2\frac{h}{h+g}\right) + \frac{g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2 \alpha([q^*]+1)}{2} + \frac{KD}{([q^*]+1)}$$

بملاحظة أن الجزء الملون بالأسود هو فك مربع:

$$\frac{h\alpha[q^*]}{2}\left(1-\frac{h}{h+g}\right)^2+\frac{g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha[q^*]}{2}+\frac{KD}{[q^*]}<\frac{h\alpha([q^*]+1)}{2}\left(1-\frac{h}{h+g}\right)^2+\frac{g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha([q^*]+1)}{2}+\frac{KD}{([q^*]+1)}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ: $2*[q^*]*([q^*]+1)$ ينتج مايلي:

$$h\alpha[q^*]^2([q^*]+1)\left(1-\frac{h}{h+g}\right)^2+g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha[q^*]^2([q^*]+1)+2KD([q^*]+1)$$
$$<h\alpha[q^*]([q^*]+1)^2\left(1-\frac{h}{h+g}\right)^2+g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha[q^*]([q^*]+1)^2+2KD[q^*]$$

ننقل المتشابهات كلاً في طرف:

$$h\alpha[q^*]^2([q^*]+1)\left(\frac{g}{h+g}\right)^2+g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha[q^*]^2([q^*]+1)-h\alpha[q^*]([q^*]+1)^2\left(\frac{g}{h+g}\right)^2$$
$$-g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha[q^*]([q^*]+1)^2<2KD[q^*]-2KD([q^*]+1)$$

نعيد ترتيب حدود المتراجحة:

$$h\alpha[q^*]^2([q^*]+1)\left(\frac{g}{h+g}\right)^2-h\alpha[q^*]([q^*]+1)^2\left(\frac{g}{h+g}\right)^2+g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha[q^*]^2([q^*]+1$$
$$-g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\alpha[q^*]([q^*]+1)^2<-2KD$$

نسحب عامل مشترك من كل حدين متتالين:

$$h\alpha[q^*]([q^*]+1)\left(\frac{g}{h+g}\right)^2\{[q^*]-([q^*]+1)\}+g\alpha[q^*]([q^*]+1)\left(\frac{h}{h+g}\right)^2\{[q^*]-([q^*]+1)\}<-2KD$$

نتحصل على مايلي:

$$h\alpha[q^*]([q^*]+1)\left(\frac{g}{h+g}\right)^2(-1)+g\alpha[q^*]([q^*]+1)\left(\frac{h}{h+g}\right)^2(-1)<-2KD$$

بضرب كامل المتراجحة في 1-:

$$h\alpha[q^*]([q^*]+1)\left(\frac{g}{h+g}\right)^2+g\alpha[q^*]([q^*]+1)\left(\frac{h}{h+g}\right)^2>2KD$$

$$\alpha[q^*]([q^*]+1)(h\left(\frac{g}{h+g}\right)^2+g\left(\frac{h}{h+g}\right)^2)>2KD$$

$$\alpha[q^*]([q^*]+1)\left(\frac{hg^2+gh^2}{(h+g)^2}\right)>2KD$$

$$\alpha[q^*]([q^*]+1)hg\left(\frac{h+g}{(h+g)^2}\right)>2KD$$

$$\alpha[q^*]([q^*]+1)hg\left(\frac{1}{h+g}\right)>2KD$$

$$[q^*]([q^*]+1)>\frac{2KD}{hg\alpha}(h+g)$$

بمعلومية قانون الكمية المثلى للإنتاج $q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h\alpha}\frac{h+g}{g}}$:

$$[q^*]\,*\,[q^*+1]>(q^*)^2$$

سؤال #4:

يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن كما يلي:

$$TCU(M,T) = \frac{1}{2\alpha TD}[hM^2 + g(\alpha TD - M)^2] + \frac{K}{T} + pD$$

حيث $\alpha = 1 - \frac{D}{r}$

أوجد النقطة الصغرى لهذه الدالة ثم استنتج الكمية الإقتصادية للإنتاج.

الحل:

حتى تحقق M^*, T^* أن تكون نقاط صغرى لـ $TCU(M^*, T^*)$ يجب أن تكون :

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}(TCU(M^*,T^*)) = 0\,, \frac{\partial}{\partial M}(TCU(M^*,T^*)) = 0$$

للتحقق من ذلك نساوي المشتقة بالصفر:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}(TCU(M^*,T^*)) = \left[\frac{2\alpha gDT(\alpha TD - M) - (hM^2 + g(\alpha TD - M)^2}{2\alpha D\mathrm{T}^2}\right] - \frac{K}{T^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha gDT(\alpha TD - M) - (hM^2 + g(\alpha TD - M)^2 - 2\alpha DK}{2\alpha D\mathrm{T}^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2g(\alpha DT)^2 - 2\alpha gDTM - hM^2 - g(\alpha DT)^2 - g(M)^2 + 2g\alpha TDM - 2\alpha DK = 0$$

$$\Rightarrow g(\alpha DT)^2 - hM^2 - g(M)^2 - 2\alpha DK = 0$$

$$\Rightarrow g(\alpha DT)^2 = 2\alpha DK + M^2(g+h)$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{2\alpha DK + M^2(g+h)}{g(\alpha D)^2} = \frac{2K}{g\alpha D} + \frac{g+h}{g(\alpha D)^2}M^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{2K}{g\alpha D} + \frac{g+h}{g(\alpha D)^2}\left(\sqrt{\frac{2KD\alpha}{h}\frac{g}{h+g}}\right)^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{2K}{g\alpha D} + \frac{2K}{h\alpha D} = \frac{2K}{\alpha D}\left(\frac{h+g}{hg}\right)$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{2K}{\alpha Dh}\left(\frac{h+g}{g}\right)}\surd$$

بالنسبة للإشتقاق إلى M:

$$\frac{\partial}{\partial M}(TCU(M^*,T^*)) = \frac{1}{\alpha T}\left[\frac{hM}{D} - \frac{g(\alpha TD - M)}{D}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial M}(TCU(M^*,T^*)) = \left[\frac{hM - g(\alpha TD - M)}{D}\right] = 0$$

$$= M(h+g) - g\alpha TD = 0 \Rightarrow M = \frac{g\alpha TD}{h+g}$$

لإيجاد q^* :

من معلومية احتساب طول الفترة الأمثل نعلم أن:

$$T^* = \frac{q^*}{D} \Rightarrow q^* = DT^* \quad (2)$$

بتعويض (1) في معادلة (2) نتحصل على:

$$q^* = D\sqrt{\frac{2K}{\alpha D h}\left(\frac{h+g}{g}\right)} = \sqrt{\frac{2KD}{\alpha h}\frac{h+g}{g}}\ \surd$$

سؤال #5:

يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في المتغير N في وحدة الزمن كما يلي:

$$TCU(N) = \frac{hg\alpha}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N}\right) + KN + pD$$

بيّن أن العدد الأمثل للدورات في وحدة الزمن N^* هوأول عدد صحيح يحقق المتباينة التالية:

$$N^*(N^*-1) \leq \frac{hD\alpha}{2K}\left(\frac{g}{h+g}\right) \leq N^*(N^*+1)$$

الحل:

التعويض بالمتابينة بقيمة التكلفة الإجمالية حيث N^* هو العدد الأمثل من الطلبات الذي يحقق المتباينات التالية:

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^*-1)$$

$$\frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*}\right) + KN^* + pD \leq \frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*-1}\right) + K(N^*-1) + pD$$

نلاحظ أن pD يظهر في كلا الجانبين بالتالي يمكن طرحه من كلا الجانبين:

$$\frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*}\right) + KN^* \leq \frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*-1}\right) + K(N^*-1)$$

نضرب كلا الجانبين في $2(h+g)$ لتبسيط الكسور:

$$\frac{g\alpha hD}{N^*} + 2(h+g)KN^* \leq \frac{g\alpha hD}{(N^*-1)} + 2(h+g)K(N^*-1)$$

ننقل المتشابهات في طرف:

$$\frac{g\alpha hD}{N^*} - \frac{g\alpha hD}{(N^*-1)} \leq 2(h+g)K(N^*-1) - 2(h+g)KN^*$$

يمكن التبسيط المتراجحة عن طريق التالي:

$$\frac{g\alpha hD}{N^*} - \frac{g\alpha hD}{(N^*-1)} \leq 2(h+g)K(-1)$$

$$\frac{g\alpha hD((N^*-1-N^*)}{N^*(N^*-1)} \leq 2(h+g)K(-1)$$

$$\frac{-g\alpha hD}{N^*(N^*-1)} \leq 2(h+g)K(-1)$$

بالضرب في 1- نتحصل على:

$$\frac{g\alpha hD}{N^*(N^*-1)} \geq 2(h+g)K$$

هذا يؤدي أن تكون المتراجحة :

$$N^*(N^*-1) \leq \frac{g\alpha hD}{2(h+g)K}$$

خطوة #2:

التعويض بالمتابينة الثانية بقيمة التكلفة الإجمالية حيث أن:

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^*+1)$$

$$\frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*}\right) + KN^* + pD \leq \frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*+1}\right) + K(N^*+1) + pD$$

نلاحظ أن pD يظهر في كلا الجانبين بالتالي يمكن طرحه من كلا الجانبين:

$$\frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*}\right) + KN^* \leq \frac{g\alpha h}{2(h+g)}\left(\frac{D}{N^*+1}\right) + K(N^*+1)$$

نضرب كلا الجانبين في $2(h+g)$ لتبسيط الكسور:

$$\frac{g\alpha hD}{N^*} + 2(h+g)KN^* \leq \frac{g\alpha hD}{(N^*+1)} + 2(h+g)K(N^*+1)$$

ننقل المتشابهات في طرف:

$$\frac{g\alpha hD}{N^*} - \frac{g\alpha hD}{(N^*+1)} \leq 2(h+g)K(N^*+1) - 2(h+g)KN^*$$

يمكن التبسيط المتراجحة عن طريق التالي:

$$\frac{g\alpha hD}{N^*} - \frac{g\alpha hD}{(N^*+1)} \leq 2(h+g)K$$

$$\frac{g\alpha hD((N^*+1-N^*)}{N^*(N^*+1)} \leq 2(h+g)K$$

$$\frac{g\alpha hD}{N^*(N^*+1)} \leq 2(h+g)K$$

هذا يؤدي أن تكون المتراجحة :

$$N^*(N^*+1) \geq \frac{g\alpha hD}{2(h+g)K}$$

خطوة #3:

بعد دمج الناتج الذي تحصلنا عليه من الخطوتين السابقتين نستطيع أن نحصل على:

$$N^*(N^*-1) \leq \frac{g\alpha hD}{2(h+g)K} \leq N^*(N^*+1)$$