مقرر 322 بحث

تمارين #4

(الفصل الثاني 2.8)

سؤال #1:

بنفس معطيات مثال (٣،٢) (مؤسسة أريج للطباعة والنشر)، حيث كان:

h=4.8 ريال للوحدة/السنة، K=20 ريال، D=1200 علبة/السنة.

نفترض أن الشركة تقع في حالة عجز بتكلفة عجز قدرها 13 ريال في السنة. احسب ما يلي:

1. الكمية الاقتصادية للطلب.
2. أعلى مستوى للمخزون.
3. القيمة الصغرى للتكلفة الإجمالية في وحدة الزمن.
4. طول الفترة الخالية من العجز.
5. طول فترة العجز.
6. العدد الأمثل للطلبات.

الحل:

$$g = 13\,, K = 20, D = 1200, \mathrm{h} = 4.8$$

.1

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}} = 117.01$$

.2

$$M^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}} = 85.46$$

3. تكون القيمة الصغرى للتكلفة الإجمالية عند الحجم الأمثل q^*

$$VCU\left(q^*, M^*\right) = \frac{hM^{*2}}{2q^*} + \frac{g\left(q^* - M^*\right)^2}{2q^*} + \frac{KD}{q^*} = 410.21$$

4. طول الفترة الخالية من العجز

$$\frac{M^*}{D} = \frac{85.46}{1200} = 0.0712$$

5. طول فترة العجز

$$\frac{S}{D} = \frac{q^* - M^*}{D} = \frac{117.01 - 85.46}{1200} = 0.0263$$

6. العدد الأمثل للطلبات

$$N^* = \sqrt{\frac{Dh}{2K}\frac{g}{h+g}} = 10.255$$

سؤال #2:

تقوم مؤسسة تجارية بشراء منتج معين من ممولي الجملة وإعادة بيعه للزبائن، وفقًا للمعطيات التالية:

- معدل الاستهلاك السنوي: 100000 وحدة.
- تكلفة الطلبية: 70 ريال.
- تكلفة شراء الوحدة: 7 ريال.
- تكلفة التخزين السنوية للوحدة: 1.4 ريال.
- تكلفة العجز السنوية للوحدة: 2 ريال. احسب ما يلي:

1. الكمية الاقتصادية للطلب.
2. إذا كان الوقت المُتقدم يساوي شهر واحد، فأوجد نقطة إعادة الطلب.
3. ما هو متوسط المخزون ؟ أعلى مستوى للمخزون؟ أكبر عدد للطلبات المسترجعة؟ متوسط الطلبات المسترجعة؟

الحل:

$$K = 70, D = 100000, p = 7, h = 1.4\,, g = 2$$

.1

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}} = 4123.11$$

.2

$$L = 1\ \text{شهر} = \frac{1}{12}\text{سنة} = 0.083\ \text{سنة} > \quad T^* = \sqrt{\frac{2K}{Dh}\frac{h+g}{g}} = 0.04\ \text{سنة}$$

$$n^* = \left\lfloor\frac{L}{T^*}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{0.083}{0.04}\right\rfloor = 2(\text{العدد الصحيح لناتج القسمة})$$

$$R = \left(\frac{1}{12} - 2 * 0.04\right) * 100000 = 333.33$$

.3

أعلى مستوى للمخزون:

$$M^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}} = 2029.198$$

متوسط مستوى المخزون:

$$M^*/2 = 1014.599$$

أكبر عدد للطلبات المسترجعة:

$$S^* = q^* - M^* = 2093.912$$

متوسط الطلبات المسترجعة:

$$S^*/2 = 1046.956$$

سؤال #3:

يستهلك منتج بمعدل 4000 وحدة في السنة وبتكاليف 60 ريال للطلبية، و4 ريال لشراء الوحدة، 0.60 ريال لتخزين الوحدة في السنة و1 ريال للعجز السنوي للوحدة.

1. أحسب الكمية الإقتصادية للطلب وأكبر عدد للطلبيات المسترجعة.
2. إذا رأت المؤسسة التي تبيع هذا المنتج ألا يتجاوز عدد الوحدات المسترجعة في قائمة الطلبيات المسترجعة 50 وحدة، أوجد حجم الطلبية الذي يحقق ذلك.

الحل:

$$K = 60, D = 4000\ , p = 4, h = 0.60\ , g = 1$$

.1

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}} = 1131.37$$

لإحتساب أكبر عدد للطلبات المسترجعة نحتسب أولاً أعلى ارتفاع للمخزون:

$$M^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}} = 707.11$$

$$S^* = q^* - M^* = 424.263$$

.2

باستخدام الملاحظة (2.4):

$$q^* = \frac{h+g}{g}\ M^* = \frac{h+g}{g}\ (q^* - S)$$

$$\Rightarrow \frac{h+g}{g}\ (S) = \frac{h+g}{g}\ (q^*) - q^*$$

$$\Rightarrow S = \frac{g}{g+h}\left(\frac{h+g}{g}\ (q^*) - q^*\right) = q^*\frac{g}{g+h}\left(\frac{h+g}{g} - 1\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{g}{g+h} q^*\left(\frac{h}{g}\right)$$

بالتعويض بقيمة : $S=50$ نتحصل على :

$$q^* = 133.33$$

حيث نلاحظ أنه كلما قلت قيمة S قلت أيضاً قيمة q^*.

سؤال #4:

أثبت صحة القوانين الموجودة في الملاحظات من 1-5 من الملاحظات (2,5).

ملاحظات (٢، ٥):

١ – بما أن $S = q - M$ فإن العدد الأمثل للطلبيات المسترجعة (العجز الأمثل) يعطى بـ:

$$S^{*} = \sqrt{\frac{2KD}{g} \times \frac{h}{h+g}}$$

٢ – بما أن عدد الطلبيات N يحسب بالقانون $N = \frac{D}{q}$ فإن عدد للطلبيات الأمثل N^{*} هو:

$$N^{*} = \sqrt{\frac{Dh}{2K} \times \frac{g}{h+g}}\,.$$

٣ – من العلاقة $T = \frac{q}{D}$ نجد أن الطول الأمثل للدورة T^{*} يحسب بالقانون:

$$T^{*} = \sqrt{\frac{2K}{Dh} \times \frac{h+g}{g}}$$

٤ – التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$VCU(q^{*}, M^{*}) = \sqrt{2KDh\left(\frac{g}{h+g}\right)}$$

بينما التكلفة الإجمالية المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$TCU(q^{*}, M^{*}) = VCU(q^{*}, M^{*}) + p\,D.$$

٥ – يمكن حساب متوسط مستوى المخزون عند طريق حساب عدد الوحدات المخزنة في الدورة (ويساوي في الشكل (٢، ١٢) مساحة المثلث OAM) ثم قسمته على طول الفترة OA.

كما يمكن حساب متوسط العجز عن طريق حساب عدد الطلبيات المسترجعة في الدورة (ويساوي مساحة المثلث ABE) ثم قسمته على طول الفترة AB.

الحل:

ملاحظة #1:

باستخدام ملاحظة (2.4):

$$q = \frac{g+h}{g}M$$

$$\therefore S = \frac{g+h}{g}M - M = M\left(\frac{g+h}{g} - 1\right) = \frac{h}{g}M$$

$$\Rightarrow S = \frac{h}{g}\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}} = \sqrt{\frac{2KDh}{g}\frac{1}{h+g}}$$

ملاحظة #2:

$$N = D/q$$

لإحتساب العدد الأمثل للطلبيات N^{*} حيث يعتمد على كمية الطلب المثلى:

$$q^{*} = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}$$

نقوم بالتعويض بكمية الطلب المثلى:

$$N^{*} = \frac{D}{q^{*}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}} = \sqrt{\frac{hD}{2K}\frac{g}{h+g}} \surd$$

ملاحظة #3:

بالإستفادة من ملاحظة #2 و العلاقة العكسية بين العدد الأمثل للطلبيات و الطول الأمثل:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{1}{\sqrt{\frac{hD}{2K}\frac{g}{h+g}}} = \sqrt{\frac{2K}{Dh}\frac{h+g}{g}}\surd$$

ملاحظة #4:

التكلفة المتغيرة المثلى في وحدة الزمن تعتمد على الكمية الاقتصادية المثلى q^* وأعلى مستوى للمخزون M^* :

$$VCU(q^*, M^*) = \frac{hM^{*2}}{2q^*} + \frac{g\left(q^* - M^*\right)^2}{2q^*} + \frac{KD}{q^*}$$

$$= \frac{hM^{*2} + g(\boldsymbol{q}^* - \boldsymbol{M}^*)^2 + 2KD}{2q^*}$$

نعلم من ملاحظة 1:

$$\boldsymbol{S}^* = q^* - M^* = \sqrt{\frac{2KD}{g}\frac{h}{h+g}}$$

$$= \frac{h\left(\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}\right) + g\left(\frac{2KD}{g}\frac{h}{h+g}\right) + 2KD}{2\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}}$$

$$= \frac{\left(2KD\frac{g}{h+g}\right) + \left(2KD\frac{h}{h+g}\right) + 2KD}{2\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}}$$

$$= \frac{2KD\left(\frac{g}{h+g} + \frac{h}{h+g} + 1\right)}{2\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}} = \frac{KD(2)}{\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}} = \sqrt{2KDh\left(\frac{g}{h+g}\right)}\surd$$

ملاحظة #5:

$$(^*) \quad \frac{OAM \text{ مساحة المثلث}}{\frac{M}{D}} = \frac{OAM \text{ مساحة المثلث}}{OA} = \frac{\text{عدد الوحدات المخزنة في الدورة}}{\text{طول الفترة}} = \text{متوسط المخزون}$$

$$OAM \text{ مساحة المثلث} = \frac{1}{2}\text{القاعدة} * \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2}(OA)(\text{أعلى مستوى للمخزون})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M}{D}\right)(M)$$

التعويض في * للحصول على:

$$\text{متوسط المخزون} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{M}{D}\right)(M)}{\frac{M}{D}} = \frac{M}{2}$$

$$(**) \quad \text{متوسط العجز} = \frac{\text{عدد الطلبيات المسترجعة في الدورة}}{\text{طول الفترة}} = \frac{\text{مساحة المثلث } ABE}{AB} = \frac{\text{مساحة المثلث } ABE}{\frac{q-M}{D}}$$

$$\text{مساحة المثلث } ABE = \frac{1}{2}\text{القاعدة} * \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2}(AB)(q-M)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q-M}{D}\right)(q-M)$$

التعويض في ** للحصول على:

$$\text{متوسط المخزون} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{q-M}{D}\right)(q-M)}{\left(\frac{q-M}{D}\right)} = \frac{q-M}{2} = \frac{S}{2}$$

سؤال #5:

أثبت صحة الملاحظة 7 من الملاحظات (2,5).

٧ – إذا اقتضت الحاجة لحساب قيم صحيحة لـ *q فإنه يمكن استخدام الخوارزمية (٢، ١) (انظر التمرين ٥ من التمارين (٢، ٤)).

الحل:

نحتاج إثبات أنه إذا كان $[q^*] * [q^*+1] < (q^*)^2$ فالاختيار يقع على $[q^*]$.

نقوم بطلب $[q^*]$ بدلاً من $[q^*]+1$ إذا تحققت المتباينة التالية:

$$VCU([q^*]) < VCU([q^*]+1)$$

بالتعويض عن قانون التكلفة الإجمالية المتغيرة نتحصل على مايلي:

$$\frac{hM^2}{2[q^*]} + \frac{g([q^*]-M)^2}{2[q^*]} + \frac{KD}{[q^*]} < \frac{hM^2}{2([q^*]+1)} + \frac{g\left(([q^*]+1)-M\right)^2}{2([q^*]+1)} + \frac{KD}{[q^*]+1}$$

توحيد المقامات:

$$\frac{hM^2 + g([q^*]-M)^2 + 2KD}{2[q^*]} < \frac{hM^2 + g\left(([q^*]+1)-M\right)^2 + 2KD}{2([q^*]+1)}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ: $2 * [q^*] * ([q^*]+1)$:

$$\left[hM^2 + g([q^*]-M)^2 + 2KD\right] * ([q^*]+1) < \left[hM^2 + g\left(([q^*]+1)-M\right)^2 + 2KD\right] * [q^*]$$

نقوم بإدخال عملية الضرب على القوسين:

$$[hM^2[q^*] + hM^2 + g([q^*] - M)^2[q^*] + g([q^*] - M)^2 + 2KD[q^*] + 2KD] < [hM^2[q^*] + g(([q^*] + 1) - M)^2[q^*] + 2KD[q^*]]$$

نتخلص من الحدود الملونة :

$$[hM^2 + g([q^*] - M)^2[q^*] + g([q^*] - M)^2 + 2KD] < [g(([q^*] + 1) - M)^2[q^*]]$$

ننقل المتشابهات كلاُ في طرف على حده:

$$[hM^2 + 2KD] < g[q^*](([q^*] + 1) - M)^2 - g[q^*]([q^*] - M)^2 - g([q^*] - M)^2$$

نقوم بتحليل الطرف الأيمن حيث أن:

$$g[q^*](([q^*] + 1) - M)^2 = g[q^*]([q^*] + 1)^2 + g[q^*](M)^2 - 2g[q^*]([q^*] + 1)M$$

$$= g([q^*])^3 + g[q^*] + 2g([q^*])^2 + g[q^*](M)^2 - 2g([q^*])^2M - 2g[q^*]M$$

$$-g[q^*]([q^*] - M)^2 = -g([q^*])^3 - g[q^*](M)^2 + 2g([q^*])^2M$$

$$-g([q^*] - M)^2 = -g([q^*])^2 - g(M)^2 + 2g[q^*]M$$

نتحصل على مايلي:

$$[hM^2 + 2KD] < g([q^*])^3 + g[q^*] + 2g([q^*])^2 + g[q^*](M)^2 - 2g([q^*])^2M - 2g[q^*]M$$
$$-g([q^*])^3 - g[q^*](M)^2 + 2g([q^*])^2M - g([q^*])^2 - g(M)^2 + 2g[q^*]M$$

بعد دمج واختصار الحدود المتشابهة:

$$[hM^2 + 2KD] < g[q^*] + g([q^*])^2 - g(M)^2$$

$$[hM^2 + 2KD] < g[q^*](1 + [q^*]) - g(M)^2$$

$$\frac{2KD + gM^2 + hM^2}{g} < [q^*](1 + [q^*])$$

$$\frac{2KD}{g} + \frac{(g + h)}{g}M^2 < [q^*](1 + [q^*])$$

بالتعويض في قيمة $M^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}}$

$$\frac{2KD}{g} + \frac{(g + h)}{g}\left(\frac{2KD}{h}\frac{g}{h + g}\right) < [q^*](1 + [q^*])$$

$$\frac{2KD}{g} + \frac{2KD}{h} < [q^*](1 + [q^*])$$

$$2KD\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) < [q^*](1 + [q^*])$$

$$\frac{2KD}{h}\left(\frac{\mathrm{h} + \mathrm{g}}{g}\right) < [q^*](1 + [q^*])$$

بمعلومية قانون الكمية المثلى للإنتاج $q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}$:

$$(q^*)^2 < [q^* + 1] * [q^*]$$

سؤال #6:

يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EOQ مع العجز في المتغيرين M و T كما يلي:

$$TCU(M,T) = \frac{1}{T}\left[\frac{hM^2}{2D} + \frac{g(TD-M)^2}{2D}\right] + \frac{K}{T} + pD$$

$$TCU(M,T) = \left[\frac{hM^2 + g(TD-M)^2}{2DT}\right] + \frac{K}{T} + pD$$

أوجد الطول الأمثل للدورة وأعلى مستوى للمخزون الموافق ذلك ثم استنتج الكمية الإقتتصادية للطلب.

الحل:

باستخدام النظرية (2.1) يمكننا التحقق أن التكلفة الإجمالية دالة محدبة على $(0,\infty)^2$
وحتى تحقق M^*,T^* أن تكون نقاط صغرى لـ $TCU(M^*,T^*)$ يجب أن تكون :

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}(TCU(M^*,T^*)) = 0\,, \frac{\partial}{\partial M}(TCU(M^*,T^*)) = 0$$

للتحقق من ذلك نساوي المشتقة بالصفر:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}(TCU(M^*,T^*)) = \left[\frac{2gDT(TD-M) - (hM^2 + g(TD-M)^2}{2D\mathrm{T}^2}\right] - \frac{K}{T^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2gDT(TD-M) - (hM^2 + g(TD-M)^2) - 2DK}{2D\mathrm{T}^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2g(DT)^2 - 2gDTM - hM^2 - g(DT)^2 - g(M)^2 + 2gTDM - 2DK = 0$$

$$\Rightarrow g(DT)^2 - hM^2 - g(M)^2 - 2DK = 0$$

$$\Rightarrow g(DT)^2 = 2DK + M^2(g+h)$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{2DK + M^2(g+h)}{gD^2} = \frac{2K}{gD} + \frac{g+h}{gD^2}M^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{2K}{gD} + \frac{g+h}{gD^2}\left(\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}}\right)^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{2K}{gD} + \frac{2K}{hD} = \frac{2K}{D}\left(\frac{h+g}{hg}\right)$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{2K}{Dh}\left(\frac{h+g}{g}\right)}\surd$$

بالنسبة للإشتقاق إلى M:

$$\frac{\partial}{\partial M}(TCU(M^*,T^*)) = \frac{1}{T}\left[\frac{hM}{D} + \frac{-2g(TD-M)}{2D}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial M}(TCU(M^*,T^*)) = \left[\frac{2hM - 2g(TD-M)}{2D}\right] = 0$$

$$= M(2h+2g) - 2gTD = 0 \Rightarrow M = \frac{gTD}{h+g}$$

لإيجاد q^* :

من معلومية احتساب طول الفترة الأمثل نعلم أن:

$$T^* = \frac{q^*}{D} \Rightarrow q^* = DT^* \quad (2)$$

بتعويض (1) في معادلة (2) نتحصل على:

$$q^* = D\sqrt{\frac{2K}{hD}\frac{h+g}{g}} \quad = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}$$

سؤال #7:

يمكن أيضاً كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EOQ كدالة مع العجزكدالة في المتغيرين q و S كما يلي:

$$TCU(q,S) = \frac{h(q-S)^2}{2q} + \frac{gS^2}{2q} + \frac{KD}{q} + pD$$

أوجد الكمية الاقتصادية للطلب وأكبر عدد للطلبيات المسترجعة الموافق لها ثم استنتج أعلى مستوى للمخزون الموافق لذلك.

الحل:

باستخدام النظرية (2.1) يمكننا التحقق أن التكلفة الإجمالية دالة محدبة على $(0,\infty)^2$
وحتى تحقق q^*, S^* أن تكون نقاط صغرى لـ $TCU(q^*,S^*)$ يجب أن تكون :

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}}(TCU(q^*,S^*)) = 0 \,, \frac{\partial}{\partial S}(TCU(q^*,S^*)) = 0$$

للتحقق من ذلك نشتق الدالة بالنسبة إلى q:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}}(TCU(q^*,S^*)) = \frac{h(q-S)(q+S)}{2q^2} - \frac{gS^2}{4q^2} - \frac{KD}{q^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2h(q-S)(q+S) - gS^2 - 4KD}{4q^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2h(q-S)(q+S) - gS^2 - 4KD = 0$$

$$\Rightarrow (q-S)(q+S) = \frac{gS^2 + 4KD}{2h}$$

$$\Rightarrow q^2 - \mathrm{S}^2 = \frac{gS^2 + 4KD}{2h}$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{gS^2 + 4KD}{2h} + \mathrm{S}^2$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{gS^2 + 4KD + 2hS^2}{2h}}$$

أيضاً نشتق الدالة بالنسبة إلى S:

$$\frac{\partial}{\partial S}(TCU(q^*,S^*)) = -\frac{2h(q-S)}{2q} + \frac{2Sg}{2q} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Sh-qh}{q}+\frac{Sg}{q}=\frac{Sh-qh+Sg}{q}=0$$

$$\Rightarrow S(h+g)=qh$$

$$\Rightarrow S=\frac{qh}{h+g}$$

لإستنتاج أعلى مستوى للمخزون:

$$M=q-S=q-\frac{qh}{h+g}=\frac{qh+gq-qh}{h+g}$$

$$\Rightarrow M=\frac{g}{h+g}q$$

التعويض بقيمة $q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}$:

$$\Rightarrow M^*=\frac{g}{h+g}\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}$$

$$\Rightarrow M^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{g}{h+g}}$$