مقرر 322 بحث

تمارين #3

(الفصل الثاني 2.6-2.7)

سؤال #1:

تحتاج مؤسسة 8000 وحدة في السنة من منتج معين في حين يقترح الممول التخفيضات التالية:

- سعر الواحدة 10 ريال إذا كان حجم الطلبية أقل من 499 وحدة.
- سعر الواحدة 9 ريال إذا كان حجم الطلبية بين 500 و 999 وحدة.
- سعر الواحدة 8 ريال إذا كان حجم الطلبية أكثر من ألف وحدة.

إذا علمنا أن تكلفة الطلبية تساوي 30 ريال وأن تكلفة التخزين في السنة تساوي 30% من سعر الوحدة.

أوجد الحجم الأمثل للطبية والتكلفة المقابل لها.

الحل:

$$b_1 = 500\ b_2 = 1000\ , p_1 = 10, p_2 = 9, p_3 = 8\ , K = 30, D = 8000, h_i = 0.3p_i$$

$$\boldsymbol{q_i^* = \begin{cases} b_{i-1} & EOQ_i < b_{i-1} \\ EOQ_i & b_{i-1} \le EOQ_i < b_i \\ b_i & EOQ_i \ge b_i \end{cases}} = \begin{cases} b_{i-1} & EOQ_i < 499 \\ EOQ_i & 500 \le EOQ_i < 999 \\ b_i & EOQ_i \ge 1000 \end{cases}$$

خطوة #1:

نبدأ بالأقل سعر و ثم تحديد النقطة الصغرى للتكلفة الإجمالية في وحدة الزمن الموافقة لكل سعر q_i^* ونستمر حتى نصل إلى نقطة مقبولة:

$$EOQ_3 = \sqrt{\frac{2KD}{h_3}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3p_3}} = \sqrt{\frac{2(30)(8000)}{0.3(8)}} = 447.2$$

وبما أن $EOQ_3 \ngeq 1000$ أي أنها ليست مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة على الفترة $q \ge 1000$ هي $q_3^* = 1000$ والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_3(q_3^*) = \frac{hq_3^*}{2} + \frac{KD}{q_3^*} + pD = \frac{0.3(8)(1000)}{2} + \frac{(30)(8000)}{1000} + 8(8000) = 65440$$

خطوة #2:

نواصل بعد ذلك تحديد النقطة الصغرى للتكلفة الإجمالية :

$$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2KD}{h_2}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3p_2}} = \sqrt{\frac{2(30)(8000)}{0.3(9)}} = 421.6$$

وبما أن $EOQ_2 \ngeq 500$ أي أنها ليست مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة على الفترة $500 < q < 999$ هي $q_2^* = 500$

والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_2(q_2^*) = \frac{hq_2^*}{2} + \frac{KD}{q_2^*} + pD = \frac{0.3(9)(500)}{2} + \frac{(30)(8000)}{500} + 9(8000) = 73155$$

خطوة #3:

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h_1}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3p_1}} = \sqrt{\frac{2(30)(8000)}{0.3(10)}} = 400$$

بما أن $EOQ_1 < 500$ أي أنها نقطة مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة TCU على الفترة $q < 500$ هي $q_1^* = 400$

والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_1(q_1^*) = \frac{hq_1^*}{2} + \frac{KD}{q_1^*} + pD = \frac{0.3(10)(400)}{2} + \frac{(30)(8000)}{400} + 10(8000) = 86000$$

نستخلص مما سبق أن العدد الأمثل لطلب الوحدات $q_3^* = 1000$ عند تكلفة إجمالية

$$TCU_3(q_3^*) = 65440$$

سؤال #2:

الاستهلاك السنوي لمؤسسة ما من منتج معين تساوي 2000 وحدة وتكلفة كل طلبية تساوي 20 ريال بينما تساوي تكلفة التخزين السنوية 40% من تكلفة الشراء الوحدة، ترتبط تكلفة الوحدة بعدد الوحدات المطلوبة كما يلي:

- 1 ريال للوحدة إذا كان عدد الوحدات المطلوبة أقل من 99 وحدة.
- 0.80 ريال للوحدة إذا كان عدد الوحدات المطلوبة بين 100 وحدة و399 وحدة.
- 0.60 ريال للوحدة إذا كان عدد الوحدات المطلوبة أكثر من 400 وحدة.

حدد الخطة المثلى لهذا النظام وتكلفتها.

الحل:

$$b_1 = 100, b_2 = 400\ , p_1 = 1, p_2 = 0.80\ , p_3 = 0.60\ , K = 20, D = 2000, h_i = 0.4p_i$$

$$\boldsymbol{q_i^*} = \begin{cases} \boldsymbol{b_{i-1}} & \boldsymbol{EOQ_i < b_{i-1}} \\ \boldsymbol{EOQ_i} & \boldsymbol{b_{i-1} \le EOQ_i < b_i} \\ \boldsymbol{b_i} & \boldsymbol{EOQ_i \ge b_i} \end{cases} = \begin{cases} b_{i-1} & EOQ_i < 99 \\ EOQ_i & 100 \le EOQ_i < 399 \\ b_i & EOQ_i \ge 400 \end{cases}$$

<u>خطوة #1:</u>

نبدأ بالأقل سعر و ثم تحديد النقطة الصغرى للتكلفة الإجمالية في وحدة الزمن الموافقة لكل سعر q_i^* ونستمر حتى نصل إلى نقطة مقبولة:

$$EOQ_3 = \sqrt{\frac{2KD}{h_3}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.4p_3}} = \sqrt{\frac{2(20)(2000)}{0.4(0.6)}} = 577.3 \cong 577$$

وبما أن $EOQ_3 > 400$ أي أنها نقطة مقبولة $q_3^* = 577$

و التكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_3(q_3^*) = \frac{hq_3^*}{2} + \frac{KD}{q_3^*} + pD = \frac{0.4(0.6)(577)}{2} + \frac{(20)(2000)}{577} + 0.6(2000) = 1338.56$$

وبما أن q_3^* هي نقطة مقبولة أي لا يمكن للدالة $TCU_3(q_3^*)$ أن تأخذ نقطة أصغر منها وبالتالي لا داعي للبحث عن باقي القيم.

الخطة المثلى للنظام:

$$q_3^* = 577, \quad TCU_3(q_3^*) = 1338.56\ , \qquad T = \frac{q^*}{D} = \frac{577}{2000} = 0.2885 \text{ سنة}$$

سؤال #3:

تطلب مؤسسة ما بضاعة من منتج معين بمعدل ثابت يساوي 400 وحدة في الشهر وتقدر تكلفة الطلبية بـ 124 ريال وتكلفة التخزين السنوية تساوي 30% من سعر الوحدة.

يقترح ممول هذه البضاعة الأسعار الموضحة في الجدول التالي:

جدول (٢, ٣) تخفيضات على المشتريات للتمرين رقم ٠٣.

الكمية المطلوبة	$0 \le q < 1500$	$1500 \le q < 2000$	$2000 \le q < 2500$	$q \ge 2500$
تكلفة الوحدة	12.60	12.20	11.80	11.20

بينما يقترح ممول ثان لنفس المنتج سعر 12 ريال للوحدة مع تخفيضات تصل إلى 11.40 ريال إذا كانت الكمية المطلوبة أكثر من 1500 وحدة.

من أي الممولين يستحسن طلب هذه البضاعة؟

الحل:

$$b_1 = 1500\ b_2 = 2000, b_3 = 2500\ , p_1 = 12.6, p_2 = 12.2\ , p_3 = 11.8, p_4 = 11.2\ ,$$
$$K = 124, D = 400 * 12 = 4800\ , h_i = 0.3p_i$$

الممول الأول:

خطوة #1:

نبدأ بالأقل سعر و ثم تحديد النقطة الصغرى للتكلفة الإجمالية في وحدة الزمن الموافقة لكل سعر q_i^* ونستمر حتى نصل إلى نقطة مقبولة:

$$EOQ_4 = \sqrt{\frac{2KD}{h_4}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3p_4}} = \sqrt{\frac{2(124)(4800)}{0.3(11.2)}} = 595.2 \cong 595$$

وبما أن $EOQ_4 \ngeq 2500$ أي أنها ليست مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة على الفترة $q \ge 2500$ هي $q_4^* = 2500$ والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_4(q_4^*) = \frac{hq_4^*}{2} + \frac{KD}{q_4^*} + pD = \frac{0.3(11.2)(2500)}{2} + \frac{(124)(4800)}{2500} + 11.2(4800) = 58198.08$$

خطوة #2:

نواصل بعد ذلك تحديد النقطة الصغرى للتكلفة الإجمالية :

$$EOQ_3 = \sqrt{\frac{2KD}{h_3}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3p_3}} = \sqrt{\frac{2(124)(4800)}{0.3(11.8)}} = 579.99 \cong 580$$

وبما أن $EOQ_3 \ngeq 2000$ أي أنها ليست مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة على الفترة $2000 \le q < 2500$ هي $q_3^* = 2000$

والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_3(q_3^*) = \frac{hq_3^*}{2} + \frac{KD}{q_3^*} + pD = \frac{0.3(11.8)(2000)}{2} + \frac{(124)(4800)}{2000} + 11.8(4800) = 60477.6$$

نواصل تحديد النقطة الصغرى على الفترة $1500 \leq q < 2000$:

$$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2KD}{h_2}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3p_2}} = \sqrt{\frac{2(124)(4800)}{0.3(12.2)}} = 570.3 \cong 570$$

وبما أن $EOQ_2 \ngtr 1500$ أي أنها ليست مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة على الفترة $1500 \leq q < 2000$ هي

$q_2^* = 1500$

والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_2(q_2^*) = \frac{hq_2^*}{2} + \frac{KD}{q_2^*} + pD = \frac{0.3(12.2)(1500)}{2} + \frac{(124)(4800)}{1500} + 12.2(4800) = 61343.4$$

خطوة #3:

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h_1}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3p_1}} = \sqrt{\frac{2(124)(4800)}{0.3(12.6)}} = 561.17 \cong 561$$

بما أن $EOQ_1 < 1500$ أي أنها نقطة مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة TCU على الفترة $q < 1500$ هي $q_1^* = 561$

والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU_1(q_1^*) = \frac{hq_1^*}{2} + \frac{KD}{q_1^*} + pD = \frac{0.3(12.6)(561)}{2} + \frac{(124)(4800)}{561} + 12.6(4800) = 62601.25$$

نستخلص مما سبق أن العدد الأمثل لطلب الوحدات بحسب الممول الأول هو $q_4^* = 2500$ عند تكلفة إجمالية

$$TCU_4(q_4^*) = 58198.08$$

الممول الثاني:

$\boldsymbol{p_1 = 12}$:

$$q^* = EOQ = \sqrt{\frac{2KD}{h_i}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3(12)}} = \sqrt{\frac{2(124)(4800)}{0.3(12)}} = 575.03 \cong 575$$

$$TCU = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} + pD = \frac{0.3(12)(575)}{2} + \frac{(124)(4800)}{575} + 12(4800) = 59670.13$$

$p = 11.4 \; if \; q > 1500$:

$$q^* = EOQ = \sqrt{\frac{2KD}{h_i}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.3(11.4)}} = \sqrt{\frac{2(124)(4800)}{0.3(11.4)}} = 589.97 \cong 590$$

وبما أن $EOQ \ngtr 1500$ أي أنها ليست مقبولة فإن النقطة الصغرى للدالة على الفترة $q > 1500$ هي $q^* = 1500$

والتكلفة الإجمالية لهذه الكمية:

$$TCU(q^*) = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} + pD = \frac{0.3(11.4)(1500)}{2} + \frac{(124)(4800)}{1500} + 11.4(4800) = 57681$$

بحسب الأرقام الواردة أعلاه فإن الأفضل هو طلب كمية 1500 وحدة من الممول الثاني حيث أنها الأقل من بين جميع الخيارات.

(الفصل الثاني 2.7)

سؤال #1:

تنتج شركة كهرباء 12000 مكيف في الشهر وتبيع 4000 وحدة في الشهر وتخزّن الباقي. إذا علمنا أن تكاليف تحضير الإنتاج قد قدّرت ب 2000ريال لكل فترة إنتاج وأن تكاليف التخزين قد قدرت ب 1 ريال للوحدة في الشهر، احسب ما يلي :

1- أوجد الـ EPQ والتكلفة الموافقة لها TCU(EPQ)

2- أوجد الطول الأمثل لفترة الإنتاج T_1^* .

3-أوجد أعلى مستوى للمخزون. I_{max}^*

4- أوجد الطول الأمثل للدورة T^*

5-العدد الأمثل لفترات الإنتاج في وحدة الزمن.

الحل:

$$r = 12000\ , K = 2000, D = 4000, h = 1\ , p = ?$$

-1

$$\text{EPQ} = q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)} = 4898.98$$

$$TCU(EPQ) = VCU(EPQ) = \frac{hq^*}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) + \frac{KD}{q^*} = 3265.98$$

-2

$$T_1^* = \frac{q^*}{r} = 0.41 \text{ شهر}$$

-3

$$I_{max}^* = q^*\left(\frac{r-D}{r}\right) = 3265.99$$

-4

$$T^* = \frac{q^*}{D} = 1.22 \text{ شهر}$$

-5

$$N^* = \frac{1}{T^*} = 0.82$$

سؤال #2:

تستهلك شركة مقاولات 25 **طن** من الحديد في الشهر ويقدر سعر 1 **كلغ** من الحديد ب12 ريال، قدرت تكلفة الطلبية للعام الماضي ب10000 ريال لكل 4000 طلبية، إذا علمنا أن تكاليف التخزين قدرت بالنسبة التالية من سعر الوحدة: 20% كتكاليف لرأس المال و 5% كتكاليف تأجير المستودع و 3% كتكاليف للبضاعة التالفة و 2% كتكاليف للتأمين إضافة إلى ذلك تم تقدير تكاليف متنوعة أخرى بحوالي 3000 ريال في السنة. أحسب مايلي:

1- الكمية الاقتصادية للطلب EOQ

2- الزمن الأمثل بين طلبيتين T^*

3- إذا فرضنا أن الشركة قد قررت إنتاج هذه البضاعة وذلك تفادياً للتكاليف الإضافية المتنوعة 3000 ريال/السنة وبفرض أن معدل الإنتاج يساوي 50 **طن** في الشهر وأن تكلفة الوحدة تساوي 6 ريال وأن تكلفة التحضير للإنتاج تساوي 1000 ريال. هل من صالح الشركة أن تقوم بإنتاج البضاعة أو باستيرادها من عند الممولين؟

الحل:

1000كلغ=1طن.

$$D = 25 \text{ طن\textbackslash شهر} \rightarrow \mathrm{D} = 25000 \text{كلغ\textbackslash شهر} \rightarrow \mathrm{D} = 300000 \text{كلغ\textbackslash سنة}$$

$$K = 2.5 \text{ ريال\textbackslash طلبية} \left(\frac{10000}{4000}\right), \quad p = 12 \text{ ريال\textbackslash للوحدة},$$

$$h = \frac{20}{100}(12) + \frac{5}{100}(12) + \frac{3}{100}(12) + \frac{2}{100}(12) = 3.6$$

-1

$$EOQ = q^* = \sqrt{2KD/h} = 645.49$$

-2

$$T^* = \frac{q^*}{D} = 0.0021 \text{ سنة}$$

-3

$$r = 50 \text{ طن\textbackslash شهر} \rightarrow \mathrm{r} = 50000 \text{كلغ\textbackslash شهر} \rightarrow \mathrm{r} = 600000 \text{كلغ\textbackslash سنة}$$

$$, \quad p = 6 \text{ ريال\textbackslash للوحدة}, \mathrm{K} = 1000$$

نحتسب التكلفة الإجمالية للكميتين والأفضل الاستيراد من عند الممولين بدل عملية الإنتاج، إذا تحققت المتراجحة:

$$\boldsymbol{TCU(EOQ) < TCU(EPQ)}$$

$$TCU(EOQ) = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} + pD = \frac{3.6(645.49)}{2} + \frac{2.5(300000)}{645.49} + 12(300000) = 3{,}602{,}323.79$$

لإحتساب التكلفة الإجمالية للإنتاج:

$$\mathrm{EPQ} = q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}(\frac{r}{r-D})} = 18257.41$$

$$TCU(EPQ) = \frac{hq^*}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) + \frac{KD}{q^*} + pD = 1{,}832{,}863.35$$

سؤال #3:

يستهلك منتوج معين بمعدل ثابت يساوي 2000 وحدة في السنة في حين يتم إنتاجه بمعدل 3900 وحدة في السنة. إذا علمنا أن تكلفة الوحدة هي 50 ريال وتكلفة التحضير للإنتاج تساوي 650 ريال وتكلفة التخزين في السنة تساوي 30% من تكلفة الوحدة .

احسب ما يلي:

1- الحجم الأمثل للإنتاج.

2- إذا كان فترة التوريد للتحضير للإنتاج هو أسبوعين فمتى يجب البدء في الإنتاج.

الحل:

$$r = 3900\,, K = 650, D = 2000, h = 0.3p = 15\,, p = 50$$

-1

$$\text{EPQ} = q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)} = 596.48$$

2- بفرض أن السنة تحتوي 52 أسبوعاً:

$$\text{L} = 2\ \text{أسبوع} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}\ \text{سنة}$$

$$T^* = \frac{q^*}{D} = 0.298\ \text{سنة}$$

بما أن :

$$\text{L} = 0.04 < 0.298\ \rightarrow R = LD = \frac{1}{26}(2000) = 76.92$$

بالتالي يجب البدء في الانتاج عندما يصل مستوى المخزون إلى 76.92 وحدة

سؤال #4:

قدر منتج لعجلات السيارات أن كمية الوحدات المنتجة تساوي 200 عجلة في اليوم وأنّ الكمية التي بيعت في السنوات الماضية هي بمعدل 100 عجلة في اليوم. إذا علمنا أن تكلفة التخزين السنوية تساوي 20% من سعر العجلة وأن تكلفة التحضير للإنتاج تساوي 50 ريال وأن سعر العجلة يساوي 37 ريال. بفرض أن السنة الواحدة تساوي 365 يوم، احسب ما يلي:

1- التكلفة السنوية للتخزين HCU(q)، التكلفة السنوية للتحضير للإنتاج SCU(q) ثم التكلفة السنوية الإجمالية المتغيرة VCU(q) الموافقة لـ q=400

2- ارسم التكاليف التي حصلت عليها في السؤال الأول وأوجد بيانياً الحجم الامثل للانتاج EPQ (واجب)

3- أوجد الخطة المثلى لهذا النظام.

الحل:

$$r = 200 * 365 = 73000\ , K = 50, D = 100 * 365 = 36500, h = 7.4\ , p = 37$$

-1

$$HCU(q) = HCU(400) = \frac{hq}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) = 740$$

$$SCU(q) = OCU(400) = \frac{KD}{q} = 4562.5$$

$$VCU(q) = HCU(q) + SCU(q) = 5302.5$$

-3 لاحتساب الخطة المثلى تتضمن في احتساب:

$$\text{EPQ} = q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)} = 993.22$$

$$TCU(EPQ) = \frac{hq^*}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) + \frac{KD}{q^*} + pD = 1354174.92$$

$$T^* = \frac{q^*}{D} = 0.027 \text{ سنة}$$

سؤال #5:

أثبت صحة القوانين الموجودة في الملاحظات من 1-4 من الملاحظات (2,3).

ملاحظات (٢, ٣):

١ – بما أن عدد الطلبيات N يحسب بالقانون $N = \frac{D}{q}$ فإن العدد الأمثل للطلبيات N^* هو:

$$N^* = \frac{D}{q^*} = \sqrt{\frac{Dh}{2K}\frac{(r-D)}{r}}$$

٢ – من العلاقة $T = \frac{q}{D}$ نجد أنّ الطول الأمثل للدورة T^* يحسب بالقانون:

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{Dh}\frac{r}{(r-D)}}$$

٣ – التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$VCU(q^*) = \sqrt{2KDh\left(\frac{r-D}{r}\right)}$$

بينما التكلفة الإجمالية المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$TCU(q^*) = VCU(q^*) + PD$$

٤ – يمكن حساب متوسط المخزون في الدورة بطريقة ثانية أكثر عموماً من التي تطرقنا إليها في برهان النظرية (٢, ٤) وهي الطريقة التي تستخدم المساحات والتي سبق وأن شرحناها بشكل مفصل في النموذج الأساسي لـ EOQ في الملاحظة (٢, ٢). باستخدام هذه الطريقة

نحصل على متوسط مستوى المخزون لهذا النموذج يساوي عدد الوحدات المخزونة في الدورة (وتوافق في الشكل (٢, ١١) مساحة المثلث OBC) مقسوماً على طول الدورة.

الحل:

ملاحظة #1:

$$N = \frac{D}{q}$$

حيث D هو كمية الإستهلاك و q هو الكمية المطلوبة لكل طلبية.

ولإحتساب العدد الأمثل للطلبيات N^* حيث يعتمد على كمية الطلب المثلى:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{r}{r-D}}$$

نقوم بالتعويض بكمية الطلب المثلى:

$$N^* = \frac{D}{q^*} = \frac{D}{\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{r}{r-D}}} = \sqrt{\frac{hD}{2K}\frac{r-D}{r}} \quad \surd$$

ملاحظة #2:

بالإستفادة من ملاحظة #1 و العلاقة العكسية بين العدد الأمثل للطلبيات و الطول الأمثل:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{1}{\sqrt{\frac{hD}{2K}\frac{r-D}{r}}} = \sqrt{\frac{2K}{Dh}\frac{r}{r-D}}$$

ملاحظة #3:

التكلفة المتغيرة المثلى في وحدة الزمن تعتمد على الكمية الاقتصادية المثلى

$$VCU(q^*) = \frac{hq^*}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) + \frac{KD}{q^*}$$

$$= \frac{h}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right)\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{r}{r-D}} + \frac{KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{r}{r-D}}}$$

$$= \sqrt{\frac{h(r-D)KD}{2r}} + \sqrt{\frac{h(r-D)KD}{2r}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{h(r-D)KD}{2r}} = \sqrt{\frac{2KDh(r-D)}{r}}$$

ملاحظة #4:

$$\text{متوسط المخزون} = \frac{\text{عدد الوحدات المخزنة في الدورة}}{\text{طول الدورة}} = \frac{\text{مساحة المثلث } OBC}{\frac{q}{D}} \qquad (^*)$$

$$\text{مساحة المثلث } OBC = \frac{1}{2}\text{القاعدة} * \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2}(OB)(\text{أعلى مستوى للمخزون})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q}{D}\right)\left(\frac{q}{r}(r-D)\right)$$

التعويض في * للحصول على:

$$\text{متوسط المخزون} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{D}\right)\left(\frac{q}{r}(r-D)\right)}{\frac{q}{D}} = \frac{q}{2r}(r-D)$$

سؤال 6#:

أثبت صحة الملاحظة 7 من الملاحظات (2,3).

٧ – إذا اقتضت الحاجة لحساب قيم صحيحة للـ EPQ فإنه يمكن استخدام الخوارزمية (٢, ١). (انظر التمرين رقم ٨ من التمارين (٢, ٣)).

الحل:

نحتاج إثبات أنه إذا كان $(q^*)^2 < [q^*+1] * [q^*]$ فالاختيار يقع على $[q^*]$.

نقوم بطلب $[q^*]$ بدلاً من $[q^*]+1$ إذا تحققت المتباينة التالية:

$$VCU([q^*]) < VCU([q^*]+1)$$

بالتعويض عن قانون التكلفة الإجمالية المتغيرة نتحصل على مايلي:

$$\frac{h[q^*]}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right)+\frac{KD}{[q^*]} < \frac{h([q^*]+1)}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right)+\frac{KD}{[q^*]+1}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ: $2*[q^*]*([q^*]+1)$:

$$\frac{h([q^*])^2([q^*]+1)(r-D)}{r}+2KD([q^*]+1) < \frac{h([q^*])([q^*]+1)^2(r-D)}{r}+2KD([q^*])$$

ننقل المتشابهات كلاً في طرف على حده:

$$\frac{h([q^*])^2([q^*]+1)(r-D)}{r}-\frac{h([q^*])([q^*]+1)^2(r-D)}{r} < +2KD([q^*])-2KD([q^*]+1)$$

$$\frac{h((r-D))}{r}([q^*])([q^*]+1)\{[q^*]-([q^*]+1)\} < 2KD\{([q^*])-([q^*]+1)\}$$

$$-\frac{h((r-D))}{r}([q^*])([q^*]+1) < -2KD$$

$$\frac{h((r-D))}{r}([q^*])([q^*]+1) > 2KD$$

$$([q^*])([q^*]+1) > \frac{2\mathrm{KDr}}{h(r-D)}$$

بمعلومية قانون الكمية المثلى للإنتاج $q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)}$:

$$([q^*])([q^*]+1) > ([q^*])^2$$

سؤال #7:

تنتج شركة " العربي " لتركيب السيارات 30000 سيارة في السنة وتبيع 20000 سيارة في السنة .إذا علمنا أن تكلفة التحضير للورشات تساوي 1000 ريال وأن تكلفة تخزين السيارة الواحدة 50 ريال في السنة أوجد الخطة المثلى للشركة باستخدام التمرين السابق لإيجاد EPQ عدداً صحيحاً.

الحل:

D=20000 وحدة\سنة r=30000 ، K=1000 ريال ، h=50 ريال للوحدة\سنة

حجم الطلب يكون صحيحاً عن طريق الخطوات التالية:

خطوة #1: حساب الكمية الاقتصادية للانتاج.

$$EPQ = q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)} = 1549.19$$

خطوة #2 : تحديد القيمة الصحيحة الأصغر أو المساوية $[q^*]$ و $[q^* + 1]$.

كمية الانتاج ستكون إما 1549 أو 1550 ولاختبار أيهما نستخدم من خلال الخطوة الثالثة.

خطوة #3: إذا كان $[q^*] * [q^* + 1] \geq (q^*)^2$ فالاختيار يقع على $[q^* + 1]$.

$$(q^*)^2 = 2400000 \ngtr [q^* + 1] * [q^*] = 2400950$$

بالتالي يقع الاختيار على أن تكون الكمية الاقتصادية **1549 وحدة**

والطول الأمثل لدورة التخزين:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{q^*}{D} = 0.07745$$

التكلفة السنوية الاجمالية:

$$TCU(EPQ) = VCU(EPQ) = \frac{hq^*}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) + \frac{KD}{q^*} = 25819.89$$

سؤال #8:

بين أن تكلفة التخزين وتكلفة الطلبية في وحدة الزمن متساويتان عند الكمية الاقتصادية للإنتاج EPQ أي أن:

$$HCU(EPQ) = SCU(EPQ)$$

ثم استنتج أن التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى في وحدة الزمن يمكن حسابها بإحدى العلاقتين:

$$VCU(EPQ) = h \cdot EPQ\left(\frac{r-D}{r}\right) \text{ or } VCU(EPQ) = \frac{2KD}{EPQ}$$

الحل:

$$SCU(EPQ) = SCU(q^*) = \frac{KD}{q^*} = \frac{KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)}} = \frac{KD\sqrt{h}}{\sqrt{2KD}}\sqrt{\frac{r-D}{r}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{KDh}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right)}} \quad \surd$$

$$HCU(EPQ) = HCU(q^*) = \frac{hq^*}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)}\left(\frac{r-D}{r}\right) = \sqrt{\boldsymbol{\frac{KDh}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right)}} \quad \surd$$

الجزء الآخر من السؤال لإثبات أن التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى يمكن حسابها بالتالي:

$$VCU(q^*) = \frac{hq^*}{2}\left(\frac{r-D}{r}\right) + \frac{KD}{q^*} = \frac{h(q^*)^2(r-D) + 2KDr}{2rq^*} = \frac{h\left(\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)\right)(r-D) + 2KDr}{2rq^*}$$

$$= \frac{2KDr + 2KDr}{2rq^*} = \frac{4KDr}{2rq^*} = \frac{2KD}{q^*}$$

$$VCU(q^*) = \frac{2KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)}} = \left(\frac{h}{h}\right)\left(\frac{\left(\boldsymbol{\frac{r-D}{r}}\right)}{\left(\boldsymbol{\frac{r-D}{r}}\right)}\right)\frac{2KD\sqrt{h}\sqrt{\left(\frac{r-D}{r}\right)}}{\sqrt{2KD}} = \frac{h}{\sqrt{h}}\left(\frac{\left(\boldsymbol{\frac{r-D}{r}}\right)}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\frac{r-D}{r}}\right)}}\right)\sqrt{2KD}$$

$$= h\sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{r}{r-D}\right)}\left(\boldsymbol{\frac{r-D}{r}}\right) = \boldsymbol{h \cdot q^* \cdot \left(\frac{r-D}{r}\right)}$$

سؤال #9:

يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EPQ كدالة في المتغير T كما يلي:

$$TCU(T) = \frac{h(r-d)DT}{2r} + \frac{K}{T} + pD$$

أوجد الطول الأمثل للدورة باستخدام العلاقة السابقة ثم استنتج الكمية الإقتصادية للإنتاج EPQ.

الحل:

باستخدام النظرية (2.1) يمكننا التحقق أن التكلفة الإجمالية دالة محدبة على $(0,\infty)$ حيث أن:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dT}^2}\big(TCU(T)\big) = \frac{2K}{T^3}$$

وحتى تحقق T أن تكون نقطة صغرى لـ $TCU(T)$ يجب أن تكون :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dT}}\big(TCU(T)\big) = 0$$

للتحقق من ذلك نساوي المشتقة بالصفر:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dT}}\big(TCU(T)\big) = \frac{h(r-D)D}{2\mathrm{r}} - \frac{K}{T^2} = 0$$

$$\frac{h(r-D)DT^2 - 2rK}{2rT^2} = 0 \Rightarrow h(r-D)DT^2 - 2rK = 0$$

$$T^2 = \frac{2K}{hD}\frac{r}{(r-D)} \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2K}{hD}\frac{r}{r-D}} \quad (1)$$

لإيجاد q^* :

من معلومية احتساب طول الفترة الأمثل نعلم أن:

$$T^* = \frac{q^*}{D} \Rightarrow q^* = DT^* \quad (2)$$

بتعويض (1) في معادلة (2) نتحصل على:

$$q^* = D\sqrt{\frac{2K}{hD}\frac{r}{r-D}} \quad = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{r}{r-D}}$$

سؤال #10:

يمكن أيضاً كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EPQ كدالة في المتغير N كما يلي:

$$TCU(N) = \frac{hD(r-D)}{2rN} + KN + pD$$

1- بين أن العدد الأمثل للطلبيات N^* يحقق:

$$N^*(N^*-1) \le \frac{hD}{2K}\frac{r-D}{r} \le N^*(N^*+1)$$

2- إذا كان

$D = 4000$ وحدة, $K = 80$ ريال , $h = 0.196$ ريال في السنة , $r = 8000$ وحدة

أوجد باستخدام السؤال السابق العدد الأمثل للطلبات N^* والكمية الإقتصادية للإنتاج q^* والتكلفة الإجمالية المثلى $TCU(EPQ)$

الحل:

-1

خطوة #1: التعويض بالمتابينة بقيمة التكلفة الإجمالية حيث أن:

$$TCU(N^*) \le TCU(N^*-1)$$

$$\frac{hD(r-D)}{2rN^*} + KN^* + pD \le \frac{hD(r-D)}{2r(N^*-1)} + K(N^*-1) + pD$$

نلاحظ أن pD يظهر في كلا الجانبين بالتالي يمكن طرحه من كلا الجانبين:

$$\frac{hD(r-D)}{2rN^*} + KN^* \le \frac{hD(r-D)}{2r(N^*-1)} + K(N^*-1)$$

نضرب كلا الجانبين في 2 لتبسيط الكسور:

$$\frac{hD(r-D)}{rN^*} + 2KN^* \le \frac{hD(r-D)}{r(N^*-1)} + 2K(N^*-1)$$

ننقل المتشابهات بطرف كلاً على حده :

$$\frac{hD(r-D)}{rN^*} - \frac{hD(r-D)}{r(N^*-1)} \le 2K(N^*-1) - 2KN^*$$

يمكن التبسيط المتراجحة عن طريق التالي:

$$\frac{hD(r-D)}{rN^*} - \frac{hD(r-D)}{r(N^*-1)} \le 2K(-1)$$

$$\frac{hD(r-D)((N^*-1-N^*)}{N^*r(N^*-1)} \le 2K(-1)$$

$$\frac{-hD(r-D)}{N^*r(N^*-1)} \le 2K(-1)$$

بالضرب في 1- نتحصل على:

$$\frac{hD(r-D)}{N^*r(N^*-1)} \geq 2K$$

هذا يؤدي أن تكون المتراجحة :

$$N^*(N^*-1) \leq \frac{hD}{2K}\frac{(r-D)}{r} \quad (^*)$$

خطوة #2: التعويض بالمتابينة الثانية بقيمة التكلفة الإجمالية حيث أن:

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^*+1)$$

$$\frac{hD(r-D)}{2rN^*} + KN^* + pD \leq \frac{hD(r-D)}{2r(N^*+1)} + K(N^*+1) + pD$$

نلاحظ أن pD يظهر في كلا الجانبين بالتالي يمكن طرحه من كلا الجانبين:

$$\frac{hD(r-D)}{2rN^*} + KN^* \leq \frac{hD(r-D)}{2r(N^*+1)} + K(N^*+1)$$

نضرب كلا الجانبين في 2 لتبسيط الكسور:

$$\frac{hD(r-D)}{rN^*} + 2KN^* \leq \frac{hD(r-D)}{r(N^*+1)} + 2K(N^*+1)$$

ننقل المتشابهات بطرف كلاً على حده :

$$\frac{hD(r-D)}{rN^*} - \frac{hD(r-D)}{r(N^*+1)} \leq 2K(N^*+1) - 2KN^*$$

يمكن التبسيط المتراجحة عن طريق التالي:

$$\frac{hD(r-D)}{rN^*} - \frac{hD(r-D)}{r(N^*+1)} \leq 2K$$

$$\frac{hD(r-D)((N^*+1-N^*)}{rN^*(N^*+1)} \leq 2K$$

$$\frac{hD(r-D)}{rN^*(N^*+1)} \leq 2K$$

هذا يؤدي أن تكون المتراجحة :

$$N^*(N^*+1) \geq \frac{hD}{2K}\frac{(r-D)}{r} \quad (^{**})$$

خطوة #3: بعد دمج الناتج الذي تحصلنا عليه من معادلة * ومعادلة ** نستطيع أن نحصل على:

$$N^*(N^*-1) \leq \frac{hD}{2K}\frac{(r-D)}{r} \leq N^*(N^*+1)$$

-2

الكمية الإقتصادية للطلب:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{r}{r-D}} = \sqrt{\frac{2(80)(4000)}{0.196}\frac{8000}{8000-4000}} = 2555.5$$

العدد الأمثل للطلبيات:

$$N^* = \frac{D}{q^*} = \frac{4000}{2555.5} = 1.56$$

التكلفة الإجمالية المثلى:

بسبب عدم وجود سعر شراء نحتسب التكلفة المتغيرة المثلى

$$VCU(N) = \frac{Dh(r-D)}{2rN^*} + KN^* = 250.44$$