مقرر 322 بحث

تمارين #2

(الفصل الثاني 2.1-2.5)

سؤال #1:

تستعمل روضة أطفال 500 مصباح في السنة علماً أن كل طلبية للمصابيح تكلف 5 ريـال وأن تكلفة كل مصباح 0.40 ريـال، وتكلفة تخزين المصباح الواحد 0.08 ريـال في السنة. بافتراض أن معدل الاستهلاك ثابت، أحسب ما يلي:

أ- الكمية الاقتصادية للطلب
ب- التكلفة الإجمالية للمخزون في السنة
ج- العدد الأمثل للطلبيات في السنة
د- الزمن الأمثل بين كل طلبيتين

الحل:

D=500 مصباح\سنة ، K=5 ريال، p=0.40 ريال للمصباح ، h=0.08 ريال للمصباح\سنة ، معدل الاستهلاك ثابت $(\bar{I} = \frac{q}{2})$.

ملاحظة: وحدة الزمن=سنة

أ- الكمية الاقتصادية للطلب :

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2(5)(500)}{0.08}} = 250 \text{ مصباح}$$

ب- التكلفة الإجمالية للمخزون في السنة :

$$TCU(q^*) = VCU(q^*) + FCU(q^*) = \sqrt{2KDh} + pD$$

$$= \sqrt{2(5)(500)(0.08)} + 0.40(500) = 220 \text{ ريال في السنة}$$

ج - العدد الأمثل للطلبيات في السنة :

$$N^* = \frac{\mathrm{D}}{q^*} = \frac{500}{250} = 2 \text{ طلبية في السنة}$$

د - الزمن الأمثل بين كل طلبيتين(الطول الأمثل للدورة) :

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{1}{2} \text{سنة}$$

سؤال #2:

تقوم شركة بشراء 6000 وحدة بضاعة كل سنة بتكلفة قدرها 30 ريال للوحدة مع العلم أن تكلفة التخزين وتكلفة الطلبية تساوي 6 ريال للوحدة في السنة و 125 ريال على الترتيب. ماهي الخطة المثلى لطلب بضاعة، أوجد TCU(q*),VCU(q*),T*,q*

الحل:

D=6000 وحدة\سنة ، K=125 ريال ، h=6 ريال للوحدة\سنة ، p=30 ريال للوحدة\سنة

الكمية الاقتصادية للطلب :

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2(125)(6000)}{6}} = 500 \text{ وحدة}$$

التكلفة المتغيرة للمخزون في السنة:

$$VCU(q^*) = \sqrt{2KDh} = \sqrt{2(125)(6000)(6)} = 3000 \text{ ريال في السنة}$$

التكلفة الإجمالية للمخزون في السنة:

$$TCU(q^*) = VCU(q^*) + FCU(q^*) = \sqrt{2KDh} + pD$$

$$= \sqrt{2(125)(6000)(6)} + 30(6000) = 183000 \text{ ريال في السنة}$$

الطول الأمثل للدورة:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{q^*}{D} = \frac{500}{6000} \text{ سنة} = \frac{1}{12} = \text{شهر واحد}$$

سؤال #3:

قدّر موزّع لعجلات السيارات أنّ كمية استهلاك نوع معين من العجلات تكون ثابتة وبمعدل 500 عجلة في الأسبوع .إذا علمنا أنّ تكلفة شراء العجلة الواحدة تساوي 50 ريال وأن تكلفة التخزين للعجلة الواحدة في السنة تساوي 20% من تكلفة الشراء وأن تكلفة الطلبية قدّرت ب50 ريال(أفرض أن 1 سنة=52 أسبوع).

أ- أحسب التكلفة السنوية للتخزين HCU(q) والتكلفة السنوية للطلبية OCU(q) ثم التكلفة السنوية الإجمالية المتغيرة للمخزون VCU(q) الموافقة لحجم الطلبية q=200.

ب- ارسم التكاليف التي حصلت عليها في السؤال الأول واوجد بيانياً الحجم الأمثل *q.(واجب)

ج- أحسب التكاليف التالية (*HCU(q*),HCU(q*+1),OCU(q ثم OCU(q*+1) ثم الفرق في قيم HCU و OCU الناتجة عن رفع حجم الطلبية بوحدة بضاعة عن الحجم الأمثل للطلبية.

د- أحسب الفرق في قيم HCU و OCU الناتجة عن خفض حجم الطلبية بوحدة بضاعة عن الحجم الأمثل للطلبية.

هـ- ماذا تستخلص من النتائج التي حصلت عليها في السؤالين السابقين.

الحل:

بما أن المطلوب تكلفة سنوية, لابد من تحويل الاستهلاك من أسبوعي الى سنوي .

D=500*52 =26000 عجلة\سنة ، K=50 ريال ، h= 0.20*50 = 10ريال للعجلة\سنة ، p=50 ريال للعجلة \سنة

أ-

$$HCU(q) = HCU(200) = \frac{hq}{2} = 1000$$

$$OCU(q) = OCU(200) = \frac{KD}{q} = 6500$$

$$VCU(q) = HCU(q) + OCU(q) = 7500$$

ج-

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2(50)(26000)}{10}} = 509.9$$

$$HCU(q^*) = HCU(509.9) = \mathbf{2549.51}$$

$$OCU(q^*) = OCU(509.9) = \mathbf{2549.51}$$

$$HCU(q^* + 1) = HCU(510.9) = 2554.5$$

$$OCU(q^* + 1) = OCU(510.9) = 2544.53$$

نلاحظ أن تزايد حجم الطلبية بوحدة واحدة يؤدي إلى تناقص تكلفة الطلبية OCU وتزايد تكلفة التخزين HCU.

د-

$$HCU(q^* - 1) = HCU(508.9) = 2544.5$$

$$OCU(q^* - 1) = OCU(508.9) = 2554.53$$

هـ-

نلاحظ أن التغير يكون طفيفاً جداً عند التغير بوحدة واحد عن قيمة q^* حيث أن تغير حجم الطلبية يؤثر عكسياً في OCU وطردياً في HCU.

سؤال #4:

يستهلك مستوصف 500 وحدة من نوع معين من الأدوية في السنة الواحدة .تقدر تكلفة طلبية واحدة ب 20 ريال وتكلفة التخزين للوحدة ب 2 ريال في السنة وتكلفة شراء الوحدة ب 100 ريال .

أ- احسب كلا من :الكمية الاقتصادية للطلب والتكلفة الإجمالية السنوية المثلى والطول الأمثل للدورة

ب- إذا فرضنا أن هذا النوع من الأدوية تنتهي صلاحيته بعد 1 شهر من تخزينه فما هي نقطة إعادة الطلب الموافقة لذلك.

الحل:

D=500 وحدة\سنة ، K=20 ريال ، h=2 ريال للوحدة\سنة ، p=100 ريال للوحدة\سنة

أ-

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2(20)(500)}{2}} = 100$$

$$TCU(q^*) = VCU(q^*) + FCU(q^*) = \frac{hq}{2} + \frac{KD}{q} + pD = 50200$$

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{q^*}{D} = \frac{1}{5} \text{ سنة} = 2.4 \text{ شهور}$$

ب- نلاحظ أن الوقت المتقدم L=1 ولتفادي حالة العجز نقوم باستقدام الطلبية قبل نفاذ البضاعة من المخزون:

$$L = \frac{1}{12} < \frac{1}{5} = T^*$$

لذلك فإن نقطة إعادة الطلب :

$$R = LD = \frac{1}{12} * 500 = 41.66 \text{ وحدة} \approx 42$$

أي أنه يستوجب على المستوصف تقديم الطلبية عندما يكون المتوفر في المخزون قرابة 42 وحدة من الأدوية وأن هذه البضاعة تستخدم في الدورة التالية مباشرة للدورة الحالية.

سؤال #5:

بيّن أن تكلفة التخزين وتكلفة الطلبية في وحدة الزمن تتساويان عند الكمية الاقتصادية للطلب أي أن

$$OCU(q^*) = HCU(q^*)$$

ثم استنتج أن التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى يمكن حسابها بإحدى العلاقتين:

$$VCU(q^*) = hq^* \quad \text{أو} \quad VCU(q^*) = \frac{2KD}{q^*}$$

الحل:

لإثبات ذلك عن طريق العلاقة الأصلية لحساب تكلفة الطلبية وتكلفة التخزين:

$$OCU(q^*) = \frac{KD}{q^*} = \frac{KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \frac{KD\sqrt{h}}{\sqrt{2KD}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{KDh}{2}}}$$

$$HCU(q^*) = \frac{hq^*}{2} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{KDh}{2}}}$$

بالتالي تم إثبات أنهما متساويان عند الكمية الاقتصادية للطلب.

الجزء الآخر من السؤال لإثبات أن التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى يمكن حسابها بالتالي:

$$VCU(q^*) = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} = \frac{2KD + hq^{*2}}{2q^*} = \frac{2KD + h\left(\frac{2KD}{h}\right)}{2q^*} = \frac{4KD}{2q^*} = \boldsymbol{\frac{2KD}{q^*}}$$

$$VCU(q^*) = \frac{2KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \left(\frac{h}{h}\right)\frac{2KD\sqrt{h}}{\sqrt{2KD}} = \frac{h}{\sqrt{h}}\sqrt{2KD} = h\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \boldsymbol{hq^*}$$

سؤال #6:

التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـEOQ يمكن كتابتها كدالة في متغير T كما يلي

$$TCU(T) = \frac{hDT}{2} + \frac{K}{T} + pD$$

وذلك من العلاقة $T = \frac{q}{D}$

أوجد الطول الأمثل للدورة باستخدام العلاقة السابقة ثم استنتج الكمية الاقتصادية للطلب q^*.

الحل:

باستخدام النظرية (2.1) يمكننا التحقق أن التكلفة الإجمالية دالة محدبة على $(0, \infty)$ حيث أن:

$$\frac{d^2}{dT^2}\left(TCU(T)\right) = \frac{2K}{T^3}$$

وحتى تحقق T أن تكون نقطة صغرى لـ $TCU(T)$ يجب أن تكون :

$$\frac{d}{dT}\left(TCU(T)\right) = 0$$

للتحقق من ذلك نساوي المشتقة بالصفر:

$$\frac{d}{dT}\left(TCU(T)\right) = \frac{hD}{2} - \frac{K}{T^2} = 0$$

$$\frac{hDT^2 - 2K}{2T^2} = 0 \Rightarrow hDT^2 - 2K = 0$$

$$T^2 = \frac{2K}{hD} \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2K}{hD}} \quad (1)$$

لإيجاد q^* :

من معلومية احتساب طول الفترة الأمثل نعلم أن:

$$T^* = \frac{q^*}{D} \Rightarrow q^* = DT^* \quad (2)$$

بتعويض (1) في معادلة (2) نتحصل على:

$$q^* = D\sqrt{\frac{2K}{hD}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

سؤال #7:

إذا علمنا أن كمية الاستهلاك لكتاب حساب التكامل والتفاضل تكون ثابتة وتساوي1000 وحدة في السنة وأنّ تكلفة الوحدة تساوي 50ريال وأنّ تكلفة الطلبية 100 ريال وأن تكلفة التخزين تساوي 25 % من تكلفة الكتاب فأوجد الخطة المثلى لهذا النظام.(لاحظ أن حجم الطلبية يكون صحيحاً)

الحل:

D=1000 وحدة\سنة ، K=100 ريال ، h=0.25*50=12.5 ريال للوحدة\سنة ، p=50 ريال للوحدة\سنة

حجم الطلب يكون صحيحاً عن طريق الخطوات التالية:

خطوة #1: حساب الكمية الاقتصادية للطلب.

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = 126.49$$

خطوة #2 : تحديد القيمة الصحيحة الأصغر أو المساوية $[q^*]$ و $[q^* + 1]$.

لا يمكن استهلاك 126.49 كتاب لذلك كمية الاستهلاك ستكون إما 126 أو 127 ولاختبار أيهما نستخدم من خلال الخطوة الثالثة.

خطوة #3: إذا كان $[q^*] * [q^* + 1] \geq (q^*)^2$ فالاختيار يقع على $[q^* + 1]$.

$$(q^*)^2 = 15999.7 \ngeq [q^* + 1] * [q^*] = 16002$$

بالتالي يقع الاختيار على أن تكون الكمية الاقتصادية **126 وحدة**
والطول الأمثل لدورة التخزين:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{q^*}{D} = 0.126$$

التكلفة السنوية الاجمالية:

$$TCU(q^*) = VCU(q^*) + FCU(q^*) = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} + pD = 51581.1$$

سؤال #8:

إذا علمنا أن كمية الاستهلاك لمنتج معيّن ثابتة وتساوي 1200 وحدة في السنة وأنّ تكلفة الطلبية تساوي 16 ريال وأن تكلفة التخزين تساوي 0.24 ريال للوحدة في السنة. أوجد الخطة المثلى إذا كان وقت الانتظار يساوي :
0 – 3 أشهر – 9 أشهر – 18 شهراً (واجب)

الحل:

D=1200 وحدة\سنة ، K=16 ريال ، h=0.24 وحدة\سنة.

* نلاحظ أن p لم يعطى لذلك يتم احتساب التكلفة الإجمالية المتغيرة بدلاً من التكلفة الكلية.

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = 400$$

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{q^*}{D} = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3} \text{سنة} = 4 \text{ أشهر}.$$

لحساب الخطة المثلى $VCU\left(q^*\right)$ نعتمد على وقت الانتظار L :

$$R = \begin{cases} L \cdot D & L < T^* \\ (L - n^* \cdot T^*) \cdot D & o.w \end{cases}$$

Where $\boldsymbol{n}^* = \left[\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{T}^*}\right]$

- $\mathbf{L = 0}$:

$$VCU\left(q^*\right) = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} = 96$$

- $\mathbf{L = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$:

بما أن وقت الانتظار هو 3 أشهر أي أقل من طول الدورة 4 أشهر بالتالي:

$$R = \frac{3}{12} * 1200 = 300$$

- $\boldsymbol{L = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}}$:

بما أن وقت الانتظار هو 9 أشهر أي أكثر من طول الدورة 4 أشهر بالتالي:

$$n^* = \left[\frac{L}{T^*}\right] = \left[\frac{9}{4}\right] = 2 \text{(العدد الصحيح لناتج القسمة)}$$

$$R = \left(\frac{9}{12} - 2 * \frac{4}{12}\right) * 1200 = 100$$

أي ان الشركة تقوم بتقديم الطلبية عندما يكون عدد وحدات البضاعة 100 وحدة وتستخدم هذه البضاعة في الدورة رقم 2 التي تلي الدورة الحالية.

سؤال #9:

يقوم محل للأدوات الكهربائية المنزلية ببيع 100 تلفاز شهريا .إذا علمنا أنّ تكلفة التخزين تساوي 20 ريال للجهاز في الشهر وأنّ تكلفة الطلبية 100 ريال وتكلفة الجهاز 1000 ريال فاحسب ما يلي:

أ- الخطة المثلى لنظام مخزون هذا المحل.

ب- نقطة إعادة الطلب R إذا كان فترة التوريد L يساوي 15 يوم.

ج- أوجد الزيادة الناتجة في قيمة التكلفة الإجمالية إذا فرضنا أن هناك زيادة في قيم h, K و D بالمقادير التالية

$$\Delta D = 5 , \Delta h = 5 \ , \Delta K = 10$$

الحل:

D=100 جهاز\شهر ، K=100 ريال ، h=20 جهاز\شهر p=1000 ريال جهاز\شهر

أ-

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = 31.62$$

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{q^*}{D} = 0.3162 \text{ شهر}$$

$$TCU(q^*) = \frac{hq^*}{2} + \frac{KD}{q^*} + pD = 100632.46$$

ب- نلاحظ أن وقت الوقت المتقدم $L = \frac{15}{30} = 0.5$ شهر ولتفادي حالة العجز نقوم باستقدام الطلبية قبل نفاذ البضاعة من المخزون:

$$L = 0.50 > 0.3162 = T^*$$

لذلك فإن نقطة إعادة الطلب :

$$n^* = \left[\frac{L}{T^*}\right] = \left[\frac{0.5}{0.3162}\right] = 1 \text{(العدد الصحيح لناتج القسمة)}$$

$$R = \left(0.50 - 1 * 0.3162\right) * 100 = 18.38$$

أي ان الشركة تقوم بتقديم الطلبية عندما يكون عدد وحدات البضاعة 18.38 وحدة وتستخدم هذه البضاعة في الدورة رقم 1 التي تلي الدورة الحالية.

ج- D*=105 جهاز\شهر ، K*=110 ريال ، h*=25 جهاز\شهر p=1000 ريال جهاز\شهر

بنفس الطريقة في حساب فقرة أ.

سؤال #10:

ما هو التغيير الناتج عن التكلفة الإجمالية المتغيرة VCU عند تقديم طلبية تساوي ضعف الكمية الاقتصادية للطلب EOQ؟

الحل:

من نقاط القوة في نموذج الكمية الاقتصادية للطلب (EOQ) أن تزايد التكلفة الإجمالية المتغيرة VCU يكون صغيراً جداً عند النقاط q القريبة من الكمية الإقتصادية للطلب $q*$ وهو مايعرف باستقرار التكلفة الإجمالية المتغيرة VCU في جوار EOQ

سؤال #11:

يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن كالتالي:

$$N = \frac{D}{q}$$

$$TCU(N) = \frac{hD}{2N} + KN + pD$$

حيث أن N هو عدد الطلبات في وحدة زمنية، N^* هو العدد الأمثل من الطلبات الذي يحقق المتباينات التالية:

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^* - 1)$$

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^* + 1)$$

أ- بين أن المتباينتين السابقتين مكافئة لما يلي:

$$N^*(N^* - 1) \leq \frac{hD}{2K} \leq N^*(N^* + 1)$$

ب- إذا كان:

$$D = 1200 \text{وحدة}, K = 20 \text{ريال}, h = 4.8 \text{ ريال في السنة}$$

أوجد باستخدام السؤال السابق العدد الأمثل للطلبات N^* والكمية الإقتصادية للطلب q^* والتكلفة الإجمالية المثلى $TCU(N^*)$ والطول الأمثل للدورة T^*.

الحل:

أ-

خطوة #1:

التعويض بالمتابينة بقيمة التكلفة الإجمالية حيث أن:

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^* - 1)$$

$$\frac{hD}{2N^*} + KN^* + pD \leq \frac{hD}{2(N^* - 1)} + K(N^* - 1) + pD$$

نلاحظ أن pD يظهر في كلا الجانبين بالتالي يمكن طرحه من كلا الجانبين:

$$\frac{hD}{2N^*} + KN^* \leq \frac{hD}{2(N^* - 1)} + K(N^* - 1)$$

نضرب كلا الجانبين في 2 لتبسيط الكسور:

$$\frac{hD}{N^*} + 2KN^* \leq \frac{hD}{(N^* - 1)} + 2K(N^* - 1)$$

نقوم بطرح $\frac{hD}{(N^*-1)}$ من كلا الجانبين:

$$\frac{hD}{N^*} - \frac{hD}{(N^*-1)} \leq 2K(N^*-1) - 2KN^*$$

يمكن التبسيط المتراجحة عن طريق التالي:

$$\frac{hD}{N^*} - \frac{hD}{(N^*-1)} \leq 2K(-1)$$

$$\frac{hD((N^*-1-N^*)}{N^*(N^*-1)} \leq 2K(-1)$$

$$\frac{-hD}{N^*(N^*-1)} \leq 2K(-1)$$

بالضرب في 1- نتحصل على:

$$\frac{hD}{N^*(N^*-1)} \geq 2K$$

هذا يؤدي أن تكون المتراجحة :

$$N^*(N^*-1) \leq \frac{hD}{2K}$$

خطوة #2:

التعويض بالمتابينة الثانية بقيمة التكلفة الإجمالية حيث أن:

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^*+1)$$

$$\frac{hD}{2N^*} + KN^* + pD \leq \frac{hD}{2(N^*+1)} + K(N^*+1) + pD$$

نلاحظ أن pD يظهر في كلا الجانبين بالتالي يمكن طرحه من كلا الجانبين:

$$\frac{hD}{2N^*} + KN^* \leq \frac{hD}{2(N^*+1)} + K(N^*+1)$$

نضرب كلا الجانبين في 2 لتبسيط الكسور:

$$\frac{hD}{N^*} + 2KN^* \leq \frac{hD}{(N^*+1)} + 2K(N^*+1)$$

نقوم بطرح $\frac{hD}{(N^*+1)}$ من كلا الجانبين:

$$\frac{hD}{N^*} - \frac{hD}{(N^*+1)} \leq 2K(N^*+1) - 2KN^*$$

يمكن التبسيط المتراجحة عن طريق التالي:

$$\frac{hD}{N^*} - \frac{hD}{(N^*+1)} \leq 2K$$

$$\frac{hD((N^*+1-N^*)}{N^*(N^*+1)} \leq 2K$$

$$\frac{hD}{N^*(N^*-1)} \leq 2K$$

هذا يؤدي أن تكون المتراجحة :

$$N^*(N^*+1) \geq \frac{hD}{2K}$$

خطوة #3:

بعد دمج الناتج الذي تحصلنا عليه من الخطوتين السابقتين نستطيع أن نحصل على:

$$N^*(N^*-1) \leq \frac{hD}{2K} \leq N^*(N^*+1)$$

ب-

الكمية الإقتصادية للطلب:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = 100$$

العدد الأمثل للطلبيات:

$$N^* = \frac{D}{q^*} = \frac{1200}{100} = 12$$

التكلفة الإجمالية المثلى:

بسبب عدم وجود سعر شراء نحتسب التكلفة المتغيرة المثلى

$$VCU(N^*) = \frac{Dh}{2N^*} + KN^* = \frac{4.8(1200)}{2(12)} + 20(12) = 480$$

الطول الأمثل للدورة:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{1}{12}\text{سنة} = 1\text{شهر}$$