

الباب الثاني

الأعداد الحقيقية

تمارين الباب الثاني

6. أوجد $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ للمجموعات الآتية إن وجدت

$$A = \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (*)$$

$$\sup A = 2, \inf A = \frac{1}{2}.$$

Sol: If we denote $E_1 = \left\{ 1 + \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 and $E_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, then $E = E_1 \cup E_2$
 it is clear that

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2n} < 1 < 1 + \frac{1}{2n-1} \leq 2$$

 this inequality shows that if $x \in E$, then $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$
 with equality at $n=1$ (or $n=1$ and $n=2$ for E).
 So $\sup E = 2, \max E = 2; \inf E = \frac{1}{2}, \min E = \frac{1}{2}$

1 Let

$$S = \{1 - (-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Find $\inf S$ and $\sup S$ and prove your answers.

Solution We claim that $\inf S = 1/2$ and $\sup S = 2$. Note that, if n is odd, $1 - (-1)^n/n = 1 + 1/n$, while, if n is even, $1 - (-1)^n/n = 1 - 1/n$. It follows, if n is odd, that $1 - (-1)^n/n > 1 > 1/2$. If $n \geq 2$ is even,

$$1 - (-1)^n/n = 1 - 1/n \geq 1 - 1/2 = 1/2.$$

Arguing similarly, $1 - (-1)^n/n \leq 2$ and so $1/2$ and 2 are, respectively, lower and upper bounds for S . Since $1/2 \in S$, there cannot be a lower bound $m > 1/2$ and so $1/2$ is the greatest lower bound for S , i.e. $\inf S = 1/2$. Since $2 \in S$, there cannot be an upper bound $M < 2$ and so 2 is the least upper bound for S , i.e. $\sup S = 2$.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad \star \quad (\text{ج})$$

- $A = B - B$ where $B = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ and $X - Y = \{x - y : x \in X, y \in Y\}$.
- $\inf B = 0, \sup B = 1$. ($\inf B = 0$ is the Archimedean property.)
- $\inf(X - Y) = \inf X - \sup Y$ implies $\inf A = \inf B - \sup B = 0 - 1 = -1$.
- $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$ implies $\sup A = \sup B - \inf B = 1 - 0 = 1$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\} \quad \star \quad (\text{هـ})$$

Since $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ we see that $E = (-2, 2)$. Using Q4 we get:

$$\sup E = 2, \inf E = -2, \text{ no } \max E \text{ and no } \min E.$$

10. $\star$ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، وكان $A \subset B$ ، فأثبت أن

$$\sup A \leq \sup B$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leq \sup B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

↓
محدودية A

12. $\star$ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، فأثبت أن $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ محدودة، ثم أثبت أن

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall a \in A \quad a \leq K \\ \forall b \in B \quad b \leq L \end{array} \right\} \Rightarrow \forall z \in A+B \quad z = a+b \leq K+L$$

عنصر من $(A+B)$

$$\text{متتالية} \quad \text{Sup}(A+B) \quad \leftarrow$$

$$\forall z \in A+B \quad a \leq \text{Sup } A \quad b \leq \text{Sup } B$$

$$z = a+b \leq \text{Sup } A + \text{Sup } B$$

$$(A+B) \quad \text{متتالية} \quad \text{Sup } (A) + \text{Sup } B$$

$$\text{Sup}(A+B) \leq \text{Sup } A + \text{Sup } B$$

$$0 \leq \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \text{Sup}(A+B) \quad \text{--- (1)}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{Sup}(A) + \frac{\epsilon}{2} < \overset{A}{\Rightarrow} \exists a_0 \in A \quad a_0 > \text{Sup}(A) + \frac{\epsilon}{2}$$

A ليس له حد أعلى

$$\text{Sup}(B) - \frac{\epsilon}{2} < \overset{B}{\Rightarrow} \exists b_0 \in B \quad b_0 > \text{Sup}(B) - \frac{\epsilon}{2}$$

B ليس له حد أعلى

$$\text{Sup}(A+B) > \underbrace{a_0 + b_0}_{\in A+B} > \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \epsilon$$

$$\text{Sup}(A+B) > \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \epsilon$$

$$\boxed{\text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \text{Sup}(A+B) < \epsilon} \quad \text{--- (2)}$$

$$0 \leq \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \text{Sup}(A+B) < \epsilon$$

$$\text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \text{Sup}(A+B) = 0$$

$$\boxed{\text{Sup}(A+B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)}$$

الباب الثالث

المتتاليات

تمارين 3.1

3. أثبت ما يلي باستخدام التعريف:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} \quad \star \quad (I)$$

كل $\epsilon > 0$ نبحث عن $N \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$\left| \frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\left| \frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6n-3-6n-4}{9n+6} \right|$$

$$= \frac{7}{9n+6} < \frac{7}{n}$$

من خاصية f , g نعلم: $\frac{\epsilon}{7} > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$\frac{\epsilon}{7} > \frac{1}{N}$$

$$\forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| < \frac{7}{n} < \frac{7}{N} < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{2n^3+n} = \frac{1}{2} \quad \star \quad (و)$$

لكل $\epsilon > 0$ نريد أن نجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$\left| \frac{n^3+1}{2n^3+n} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\left| \frac{n^3+1}{2n^3+n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|2n^3+2-2n^3-n|}{4n^3+2n}$$

$$= \frac{|n-2|}{4n^3+n} < \frac{n}{n^3+n} \quad \forall n \geq 2$$

$$= \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n}$$

من خاصية أرخميدس: لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N_1} < \epsilon$

نختار $N = \max\{2, N_1\}$

$$\forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{n^3+1}{2n^3+n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5. ★ إذا كانت $\lim x_n = L$ و $\lim y_n = L$ ، فأثبت أن المتتالية $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ متقاربة ونهايتها L .

3.1(5)

نکته: $\epsilon > 0$ وجود $N \in \mathbb{N}$ چنانچه $x_n \rightarrow L \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq N_1$

نکته: $\epsilon > 0$ وجود $N_2 \in \mathbb{N}$ چنانچه $y_n \rightarrow L \Rightarrow |y_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq N_2$

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ فردی} \\ y_{\frac{n}{2}} & n \text{ زوجی} \end{cases}$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \quad \text{نکته}$$

اگر $n \geq N$ آنگاه $n \geq N_1$ و $n \geq N_2$

$$|z_n - L| = \begin{cases} |x_{\frac{n+1}{2}} - L| & n \text{ فردی} \\ |y_{\frac{n}{2}} - L| & n \text{ زوجی} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} < \epsilon & \forall n \geq N_1 \\ < \epsilon & \forall n \geq N_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} < \epsilon & \forall n \geq N_1 \\ < \epsilon & \forall n \geq N_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

تمارين 3.2

1. بين ما إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة أم لا، وأوجد النهاية إن وجدت.

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} \quad \star (1)$$

هل x_n متقاربة أم لا؟ $x_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}{n^3(1 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{n(1 + \frac{1}{n^2})} = 0$$

$$x_n = \frac{(-1)^n n}{3n - 1} \quad \star (ج)$$

1(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n n}{3n - 1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(3 - \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{3n - 1}$ D.N.E (لا متقاربة)

(حل آخر) باستعمال المتسلسلة الجبرية:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = -\frac{1}{3}$$

النهايتان غير متساويتين $\Rightarrow (x_n)$ متباعدة

3. أعط مثالا لما يلي:

(1) $\star$ متتاليتان $(x_n), (y_n)$ بحيث تكون $(x_n + y_n)$ متقاربة، بينما (x_n) متباعدة.

(2) $x_n = n, y_n = -n \Rightarrow x_n + y_n = n - n = 0 \rightarrow 0$ (متقاربة)

بما أن $x_n = n$ متباعدة $(\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty)$

9. $\star$ إذا كانت $(x_n + y_n)$ متقاربة و (x_n) متقاربة، فأثبت أن (y_n) متقاربة. هل نستطيع استنتاج نتيجة مشابهة للمتتالية $(x_n y_n)$ ؟

9

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n \Rightarrow y_n \text{ متقارب}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1 - l_2 = l_3$$

بالنسبة للفرض x_n, y_n النسبة المتساوية عند l عند l

فرض مثال

$$x_n = \frac{1}{n}, y_n = n$$

$$\Rightarrow x_n y_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \rightarrow 0 \Rightarrow (x_n y_n) \text{ متقارب}$$

ولكن $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ متقارب

لكن $y_n = n \rightarrow \infty$ متقارب

12. ★ إذا كان $0 < a < 1$ ، فأثبت أن $\lim na^n = 0$

لا يكتب في هذا الهامش

12

$$0 < a < 1 \Rightarrow \exists c > 0 \text{ s.t. } a = \frac{1}{1+c}$$

$$(1+c)^n = 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2 + \dots + c^n$$

(استخدمنا هنا أن $c > 0$)

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+c)^n} < \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}c^2} \Rightarrow na^n < \frac{2n}{n(n-1)c^2}$$

$$\Rightarrow 0 < na^n < \frac{2}{(n-1)c^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)c^2} \xrightarrow{\text{Squeeze Thm}} \lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$$

طالعاً

$$nb^n = ne^{n \ln(b)} \rightarrow 0 \quad (\ln(b) < 0 \text{ و } n \rightarrow \infty)$$

17. ★ إذا كانت $\lim \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0$ ، فأثبت أن (x_n) محدودة، ثم أثبت أن نهايتها تساوي 1.

$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$ حيث $N \in \mathbb{N}$ ، $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ 5
 $|x_{n+1}| < (|x_n| + 1) \frac{1}{m} \leq |x_n| + 1 \leq |x_{n+1}| + 1 \frac{1}{m} \leq$
 $\left(\frac{m+1}{m} \right) |x_n| < \frac{m+1}{m} \leq \left(1 + \frac{1}{m} \right) |x_n| < \frac{m+1}{m} \leq |x_n| + \frac{1}{m} |x_n| < 1 + 1 \leq$
 $\Rightarrow |x_n| < \frac{m+1}{m-1} = \frac{m-1+2}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1} < 1 + 2 = 3 \quad \forall n \geq N$
 $|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, 3\}$
 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_{n+1+2}}{x_{n+1}} = 1 - \frac{2}{x_{n+1}} \rightarrow 0$
 $\frac{2}{x_{n+1}} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{2} \rightarrow 1 \Rightarrow x_{n+1} \rightarrow 2$
 $\Rightarrow x_n \rightarrow 2$

تمارين 3.3

1. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة حيث

$$x_n = \frac{n^n}{n!} \quad \star \text{ (ج)}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1) n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\
 &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 &\Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n) \text{ متزايدة}
 \end{aligned}$$

3. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم أوجد نهايتها.

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad \star \text{ (ا)}$$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \Rightarrow x_2 \geq x_1$ (f)3
 Assume $x_n \geq x_{n-1}$. By Induction:

$$x_{n+1} - x_n = \left(\sqrt{2+x_n} - \sqrt{2+x_{n-1}} \right) = \frac{2+x_n - 2 - x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n} + \sqrt{2+x_{n-1}}}$$

$$= \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n} + \sqrt{2+x_{n-1}}} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$$

$$x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow \sqrt{2+x_n} \geq \sqrt{2+x_{n-1}} \Rightarrow 2+x_n \geq 2+x_{n-1} \Rightarrow x_n \geq x_{n-1}$$

$$x_1 = 1 < 2$$
 Assume $x_n \leq 2$

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow 2 \leq x_n \leq 2 \Rightarrow x_n = 2$$

$$\Rightarrow |x_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = l \Leftrightarrow (x_n) \text{ is a Cauchy sequence} \Leftrightarrow (x_{n+1}) \text{ is a Cauchy sequence}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2+x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\sqrt{2+\lim x_n} = l \Rightarrow \sqrt{2+l} = l$$

$$\Rightarrow 2+l = l^2 \Rightarrow 0 = l^2 - l - 2 = (l-2)(l+1)$$

$$\Rightarrow l = -1 \text{ (reject)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$$

$$\text{or } l = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$$

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3} \quad \star (b)$$

(ب) 3 $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{4x_1 + 2}{x_1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 \geq x_1$
 Assume $x_n \geq x_{n-1}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3} - \frac{4x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 3}$$

$$= \frac{4x_n x_{n-1} + 12x_n + 2x_{n-1} + 6 - 4x_n x_{n-1} - 12x_{n-1} - 2x_n - 6}{(x_n + 3)(x_{n-1} + 3)}$$

$$= \frac{10x_n - 10x_{n-1}}{(x_n + 3)(x_{n-1} + 3)} = \frac{10(x_n - x_{n-1})}{(x_n + 3)(x_{n-1} + 3)} \geq 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n) \text{ متزايدة (بالاعتقاد)}$$

$$x_1 = 1 \leq 2. \text{ Assume } x_n \leq 2$$

$$x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3} \leq \frac{4(2) + 2}{2 + 3} = \frac{10}{5} = 2$$

(8 من الـ 8) $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$ متزايدة على $\mathbb{R}^+$

7. * إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ ، فأثبت أن (x_n) متناقصة ومحدودة وبالتالي متقاربة.

$$0 < x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \quad (2)$$

$$= \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

(x_n) محدودة $\Leftarrow$
 $x_n = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2} \rightarrow x_{n+1}$

$$x_{n+1} < x_n$$

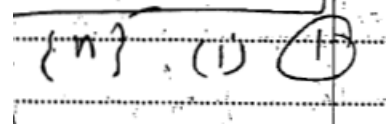
(x_n) متناقصة $\Leftarrow$
 (x_n) متقاربة $\Leftarrow$ (3.7) $\Leftarrow$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \leq 0$, then the sequence $(x_n)_n$ is decreasing and non negative. It is convergent.

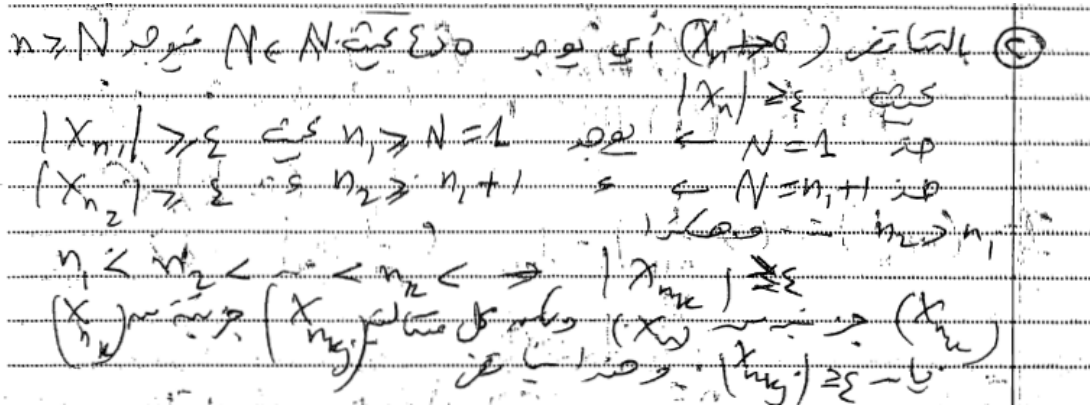
تمارين 3.4

1. أعط مثالا لما يلي:

(أ) * متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة



2. * إذا كانت كل متتالية جزئية من (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة إلى 0، فأثبت ان $\lim x_n = 0$.



7. * أثبت أن المتتالية (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة حيث

$$x_n = \frac{(n^2 + 20n + 30) \sin(n^3)}{n^2 + n + 1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 20n + 35}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{20}{n} + \frac{35}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$, and every convergent sequence is bounded, therefore $\left\{ y_n = \frac{n^2 + 20n + 35}{n^2 + n + 1} \right\}$ is bounded, so there exists $M \in \mathbb{R}$ such that $|y_n| \leq M$ for all $n \in \mathbb{N}$. Also, $\{z_n = \sin(n^3)\}$ is bounded: $|z_n| \leq 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore $\{x_n\}$ is bounded: $|x_n| = |y_n z_n| = |y_n| |z_n| \leq M$ for all $n \in \mathbb{N}$. Every bounded sequence has a convergent subsequence, thus $\{x_n\}$ has a convergent subsequence.

تمارين 3.5

1. * أثبت أن المتتالية (x_n) من نوع كوشي

$$x_n = \frac{5n}{n+3}$$

↳ $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. : if $n, m \geq N$

Assume $n > m$ (بدون فقد العمومية)

$$\left| \frac{5n}{n+3} - \frac{5m}{m+3} \right| = \left| \frac{5nm + 15n - 5mn - 15m}{(n+3)(m+3)} \right|$$

$$= \frac{15(n-m)}{(n+3)(m+3)} < \frac{15(n-m)}{n \cdot m} = 15 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$$

$$< 15 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$$

من خاصية أرخميدس يوجد $N \in \mathbb{N}$ حيث $\frac{\epsilon}{30} > \frac{1}{N}$

لذا إذا $n, m \geq N$ فإن

$$|x_n - x_m| < 15 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) < 15 \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\epsilon}{30} < \epsilon$$

2. ★ إذا كانت (x_n) متتالية تحقق

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$$

<https://youtu.be/svGyTISaMg8>

6. ★ أثبت أن المتتالية $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ من نوع كوشي.

Solution: Given $\epsilon > 0$, we look for $N \in \mathbb{N}$ s.t:

$$|x_n - x_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

First assume $n \geq m$ (without loss of generality)

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{(m+1)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right|$$

$$= \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

By AP, for $\epsilon/2 > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.t: $\epsilon/2 > \frac{1}{N}$

$$\begin{aligned} \text{Now for } n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \\ &= \frac{2}{N} < \epsilon. \end{aligned}$$

حلول أخرى:

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \frac{m+2}{(m+1)^2}$$

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n}$$

EXERCISE 100.
 $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. The sequence $(x_n)_n$ is a Cauchy sequence.

الباب الرابع

توبولوجيا الأعداد الحقيقية

تمارين 4.1

1. أوجد نقاط التراكم، والنقاط المعزولة للمجموعات الآتية

(ب) $(0, 1] \cup \{3, 5\}$ *

① (ب) $(0, 1] \cup \{3, 5\}$
 $= [0, 1] \cup \emptyset$
 $= [0, 1]$
النقاط المعزولة هي 3 و 5

(ج) $\left\{2^n + \frac{1}{k} : k, n \in \mathbb{N}\right\}$ *

(د) $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$

4. * إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة ، و $\sup A \notin A$ ، فأثبت أن $\sup A \in \hat{A}$.

Let $a = \sup A$, there exist a sequence $(x_n)_n \in A$ which converges to a . Since $a \notin A$, there exists a subsequence $(x_{n_k})_k$ with different terms. a is an accumulation point of the sequence $(x_{n_k})_k$.

و يمكن استخدام المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.3

إذا كان β حدا علويا للمجموعة A ، فإن $\beta = \sup A$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad \beta - \varepsilon < a$$

تمارين 4.2

3. ★ إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ غير خالية ومفتوحة ومحدودة، فأثبت أن $\sup A \notin A$

Let A be a bounded open subset of $\mathbb{R}$. If $a = \sup A \in A$, there is $r > 0$ such that $(a - r, a + r) \subset A$, which contradicts the fact that $a = \sup A$ since the interval $[a, a + r) \subset A$.

(2) كلما $\sup A$ و $\inf A$ هما الحديين A
 [(3.10) تمرين 3.10 كمرس 3.14 تمرين 3.15]
 بالمتناهي
 ان $\sup A \in A$ يوجد $\epsilon > 0$ كى
 $(\sup A - \epsilon, \sup A + \epsilon) \subseteq A$
 $\Rightarrow$

الباب الخامس

نهايات الدوال

5.1 تمارين

1. باستخدام التعريف أثبت ما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2 \quad \star (1)$$

(1) (i) $\forall \epsilon > 0$, we look for $\delta > 0$ s.t

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| < \epsilon \quad (x \geq 0)$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - 2| = |\sqrt{x} - 2| \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{|x - 4|}{\sqrt{x} + 2} < \frac{|x - 4|}{1} < \epsilon$$

Take $\delta = \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \quad \star (2)$$

(2) (i) $\forall \epsilon > 0$, we look for $\delta > 0$ s.t

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^3 - 8| < \epsilon$$

$$|x^3 - 8| = |(x - 2)(x^2 + 2x + 4)| < \epsilon$$

نبدأ بفرض $|x - 2| < 1$

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 3$$

(نظرا لملاحظة بعد تعريف 2.1)

$$|x| < |2| + 1 = 3$$

$$\Rightarrow |x^2 + 2x + 4| \leq |x^2| + |2x| + |4|$$

$$\leq (|x|)^2 + (|2|)|x| + |4|$$

$$= |x|^2 + 2|x| + 4$$

$$= 3|x| + 3|x| + 4 = 6|x| + 4$$

$$|x - 2| \cdot \{6|x| + 4\} < \epsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\epsilon}{6|x| + 4}$$

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{6|x| + 4} \right\}$$

حل آخر:

• Let $\varepsilon > 0$ and $|x - c| \leq 1$. $|x^3 - c^3| = |x - c| |x^2 + xc + c^2| \leq |x - c|(|x| + |c|)^2 \leq |x - c|(2|c| + 1)^2$. Then if $\alpha = \inf(1, \frac{\varepsilon}{(2|c| + 1)^2})$, for all $x \in D, 0 < |x - c| < \alpha \Rightarrow |x^3 - c^3| \leq \varepsilon$.

7. * إذا كانت $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \hat{D}$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^2 = 0$ ، فأثبت أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$. ماذا لو كانت $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^2 = L^2 \neq 0$

(7) $\forall \varepsilon > 0$, we look for $\delta > 0$ s.t.:

$$0 < |x - c| < \delta, x \in \hat{D} \Rightarrow |[f(x)]^2 - 0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow [f(x)]^2 < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{[f(x)]^2} < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |f(x)| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |f(x) - 0| < \underbrace{\sqrt{\varepsilon}}_{\delta}$$

Take $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

If $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^2 \neq l \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$

For example: $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

but $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ D.N.E, since $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

$\exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, they are not equal.

تمارين 5.2

1. أثبت أن النهايات الآتية غير موجودة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \star (1)$$

(1) (i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} ; f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

خذ المتتالية $x_n = \frac{1}{n^2} \in (0, \infty)$

$0 \neq x_n \rightarrow 0$

$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = n$ نك

متباينة $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ غير موجودة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{2x} \quad \star (2)$$

(2) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2x}\right) ; f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow [-1, 1]$

خذ المتتالية $x_n = \frac{1}{2n\pi} \in \mathbb{R} - \{0\}$

$0 \neq x_n \rightarrow 0$

$f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2n\pi}}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ نك

متباينة $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{2x}\right)$ غير موجودة

3. ★ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ، فأثبت أن $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |L|$ متى يكون العكس صحيحاً؟

Let $\varepsilon > 0$, there is $\alpha > 0$ such that for $|x - c| \leq \alpha$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Moreover $||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ for $|x - c| \leq \alpha$.
The converse is true if f has a constant sign.

كيفية العكس صحيحاً إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$

تمارين 5.3

1. (ا) ★ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ غير موجودة، فهل يمكن أن تكون النهاية $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]$ موجودة؟
ماذا عن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$ ؟

$$f(x) = \frac{1}{x} + x$$

$$g(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sgn} x$$

$$g(x) = x + \operatorname{sgn} x$$

$$f(x) \cdot g(x) = x^2 (\operatorname{sgn} x)^2$$

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = -1$$

(ب) ★ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة و $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]$ غير موجودة فهل يمكن أن تكون $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ موجودة؟

$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ لا يمكن
 بالتناقض أزمه $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ موجود $\Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ موجود
 $= \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود موجود
 تناقض مع الفرض

3. أوجد قيم النهايات الآتية إن وجدت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} \quad \star (1)$$

(3) (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{x^2}{x} & ; x > 0 \\ \frac{x^2}{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \begin{cases} x & ; x > 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

مساوية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin x)}{(x + \sin x)^2} \quad \star (2)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin x)}{(x + \sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin x)}{x^2 \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \sin x}{\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{3 + 0}{(1 + 1)^2} = \frac{3}{4}$$

5. ★ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ و g محدودة في جوار ما للنقطة c ، فأثبت أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$.

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1$$

$$x \in D$$

$$x \neq c$$

$$|x - c| < \delta_1 \implies |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$$

$$(ii) \quad \exists \delta_2, K > 0$$

$$|g(x)| \leq K \quad \forall x \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$$

$$V_1(\varepsilon) = (c - \delta_1, c + \delta_1) \setminus \{c\}$$

$$V_2(\varepsilon) = (c - \delta_2, c + \delta_2) \setminus \{c\}$$

$$V = V_1 \cap V_2 = (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\forall x \in V \implies |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| |g(x)|$$

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \implies |f(x)| K < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

5.4 تمارين

1. أوجد قيم النهايات الآتية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x + 1}{3x^3 + x^2} \quad \star (1)$$

(1) (ج)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x + 1}{3x^3 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(3 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2 + 0 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \star (2)$$

(2) (ب)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{-\sqrt{1 + 0}} = -1 \end{aligned}$$

3. * أثبت باستخدام التعريف $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

③ لكي $\epsilon > 0$ معين، يجب $\frac{1}{(x-3)^2} < \epsilon$ إذا

$$(x-3)^2 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow (x-3) > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 3$$

ننتا $M = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 3$

4. * إذا كانت $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ، فأثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

؟ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

$(\Rightarrow)$ $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $0 < x < \delta \Rightarrow |f\left(\frac{1}{x}\right) - L| < \epsilon$
 $t = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M \Rightarrow |f(t) - L| < \epsilon$

$\therefore \forall \epsilon > 0 \exists M > 0$
 $t > M = \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(t) - L| < \epsilon$

$$(\Leftarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0$$

$$x > K > 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{K} = \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$0 < t < \delta \Rightarrow |f(\frac{1}{t}) - l| < \varepsilon$$

$$t \rightarrow 0^+ \quad f(\frac{1}{t}) \rightarrow l$$

الباب السادس

الاتصال

تمارين 6.1

4. * إذا كانت $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ تحقق

$$|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in (-1, 1)$$

فأثبت أن f متصلة عند $x = 0$.

(4) $|f(x)| \leq x$ $\Rightarrow f(x) = 0$ $\Rightarrow f(0) = 0$ $\Rightarrow |f(0)| = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ومن هنا نستنتج أن f متصلة عند $x = 0$.

7. * إذا كانت $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة، وكان

$$f(q) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

فأثبت أن

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

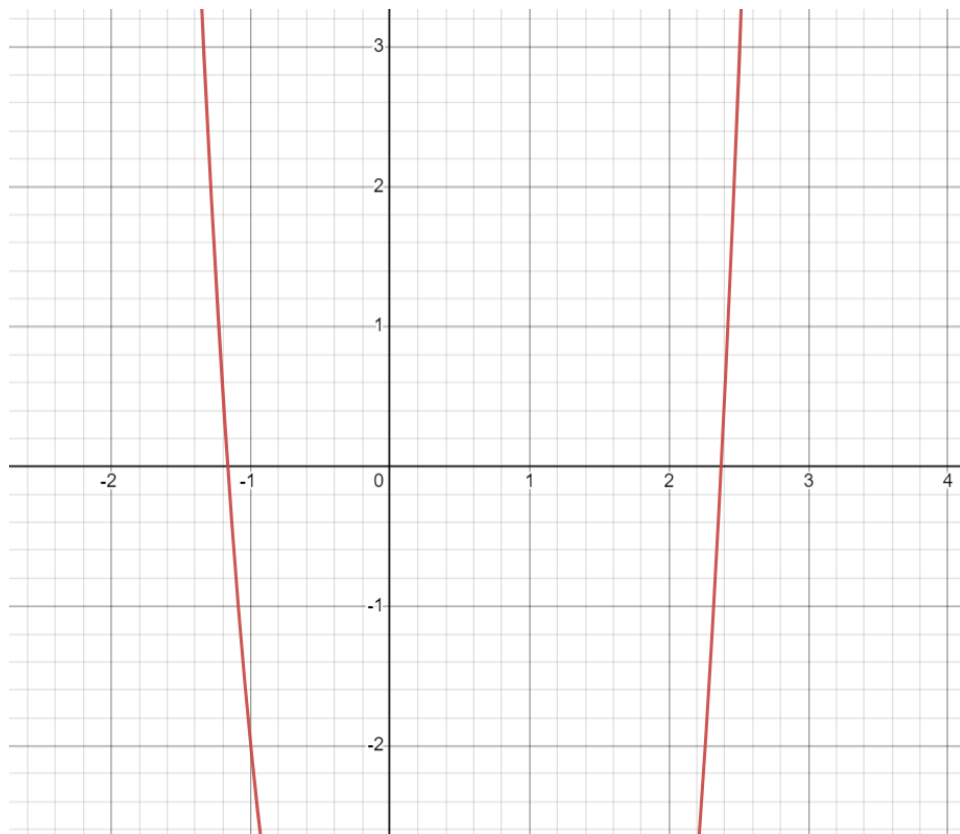
$\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, then for all $x \in \mathbb{R}$ there exist a sequence $(x_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ convergent to x and $x_n \neq x$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since $f(x_n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, then $f(x) = 0$.

تمارين 6.2

2. * إذا كانت $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دوالا متصلتين، وكان $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$ فأثبت أنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث $f(c) = g(c)$.

١. عكس الدالة $h(x) = f(x) - g(x)$
 (2) $h(x)$ متصلة على $[a, b]$ (لا تفصل f و g)
 $h(a) = f(a) - g(a) < 0$
 $h(b) = f(b) - g(b) > 0$
 ومن خلال الفهم البديهي :
 يوجد عدد $c \in (a, b)$ حيث :
 $h(c) = 0$
 $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$

4. ★ عين فترة طولها 1 تحتوي على جذر للمعادلة $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$.



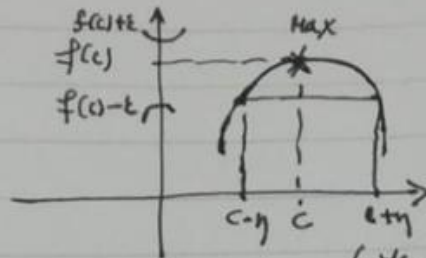
يوجد جذران حقيقيان للدالة أحدهما موجب و الآخر سالب

لندرس احدهما .. مثلا الموجب:

④ $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5$ on $[2, 3]$
 f متصلة على الفترة $[2, 3]$
 $f(3) = 3^4 - 2(3)^3 - 5 = 81 - 54 - 5 = 27 > 0$
 $f(2) = 2^4 - 2(2)^3 - 5 = -5 < 0$
 $f(2) < 0 < f(3)$
 من مبرهن القيمة البينية :
 يوجد عدد $c \in (2, 3)$ بحيث
 $f(c) = 0$
 أي أنه أوجدنا c موجوداً في f
 في الفترة $(2, 3)$ لـ f

15. ★ إذا كانت $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة ولها قيمة قصوى عند نقطة $c \in (a, b)$ ، فأثبت أن f ليست أحادية.

نفترض أن f لها قيمة قصوى عند c
و f متصلة في جوار c



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0 \exists \eta \text{ such that } |x - c| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon \right)$$

$$f(x) \leq f(c) = \max$$

لأن x في (a, b)

هناك عدد L $(f(c) - \epsilon, f(c)) \ni x_1$

Mean value thm

و نظريتنا نظرية القيمة المتوسطة
فمتصلة على $(c - \eta, c)$ و $f(c) - \epsilon < L < f(c)$
لذلك يوجد عدد x_1 $(c - \eta, c) \ni x_1$

$$f(x_1) = L \text{ بحيث}$$

و نظريتنا النظرية MVT على $(c, c + \eta)$

يوجد عدد x_2 $(c, c + \eta) \ni x_2$

$$f(x_2) = L \text{ بحيث}$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

يعني f ليست أحادية

تمارين 6.3

1. * إذا كانت $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ متزايدتين، فأثبت أن $f + g$ متزايدة. ماذا عن fg ؟

الحل:

①

$$f \text{ متزايدة } \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow x \leq y, (x, y) \in D$$

$$g \text{ متزايدة } \Leftrightarrow g(x) \leq g(y) \Leftrightarrow x \leq y, (x, y) \in D$$

$$\text{إذاً: } f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y) \Leftrightarrow x \leq y, (x, y) \in D$$

$$(f+g)(x) \leq (f+g)(y)$$

$$\Leftrightarrow f+g \text{ متزايدة على } D$$

بالنسبة لـ fg : $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, x \in D$

$$f(x)g(x) \leq f(y)g(y)$$

$$(fg)(x) \leq (fg)(y)$$

$$\Leftrightarrow fg \text{ متزايدة على } D$$

إذا كانت f, g متزايدتين على D فأثبت أن $f+g$ متزايدة على D . إذا كانت بالإضافة إلى ذلك $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ لكل $x \in D$ فأثبت أن $f \cdot g$ متزايدة على D .

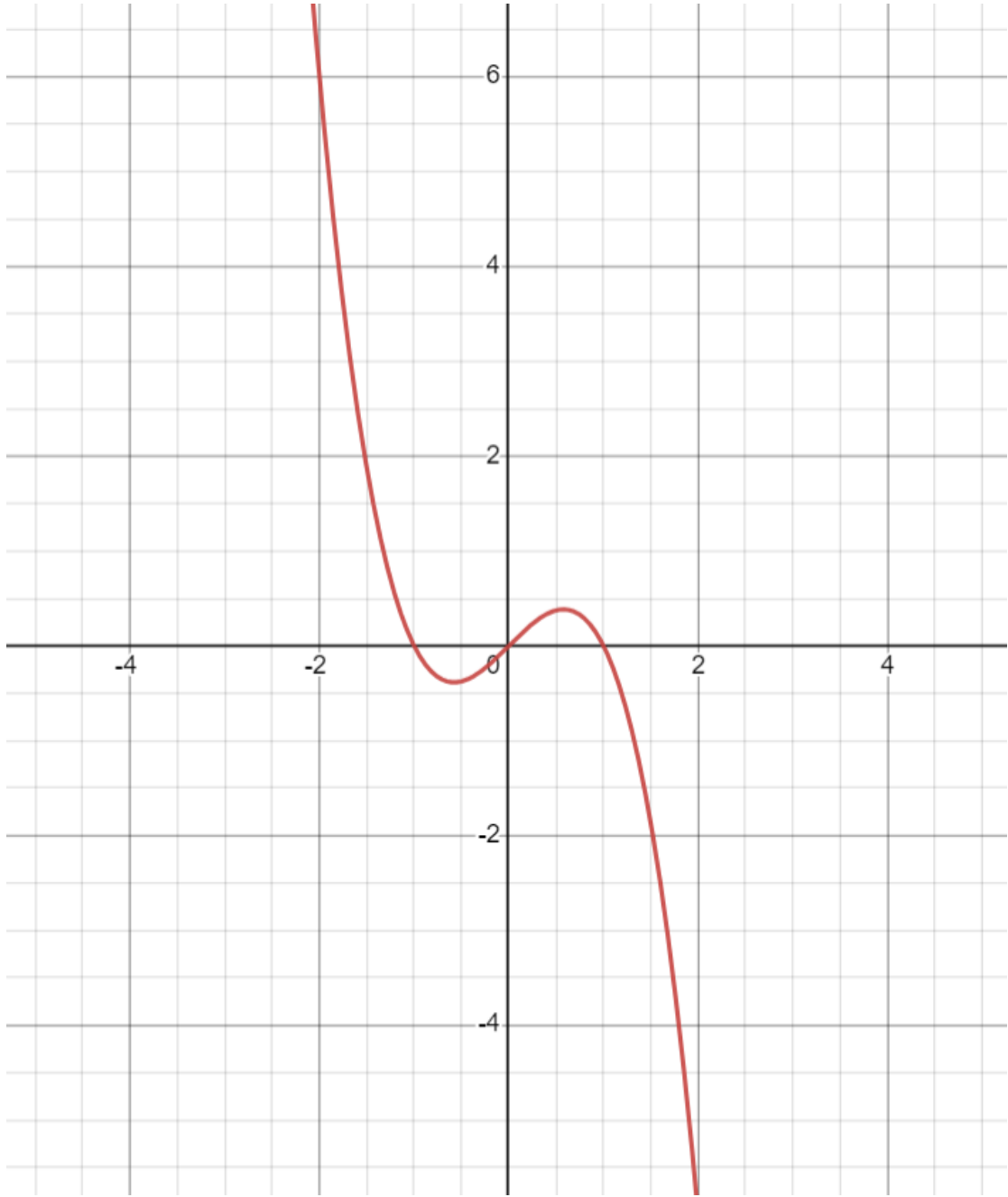
لتكن $D = [0, 1], f(x) = x, g(x) = 1 - x$. أثبت أن كلا من f و g دالة مطردة ولكن $f \cdot g$ ليست مطردة.

: دالة

$x, y \in [0, 1]$ and $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
 f متزايدة $\Leftarrow$

$x, y \in [0, 1]$ and $x < y \Rightarrow -x > -y$
 $\Rightarrow 1 - x > 1 - y$
 $\Rightarrow g(x) > g(y)$
 g متناقصة $\Leftarrow$

$(fg)(x) = x(1-x)$
 $= x - x^2$
متناقص في $[0, 1]$ $\therefore$ الفرض



6.4 تمارين

1. أثبت ان الدوال الآتية متصلة بانتظام على مجالها

(أ) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ على $[2, \infty)$.

• $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_g = \mathbb{R}$. g is uniformly continuous since g is uniformly continuous on $[-1, 1]$ and for $x, y \geq 1$, $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$. ($x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)$). The same result for $x, y \leq -1$.

(ب) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ على $(0, \infty)$.

$$\begin{aligned}
 1) \quad (\epsilon) \quad \forall x, t \in (0, \infty) : & \left| \frac{x^2}{x+1} - \frac{t^2}{t+1} \right| = \\
 & \left| \frac{x^2(t+1) - t^2(x+1)}{(x+1)(t+1)} \right| = \frac{|x^2t + x^2 - t^2x - t^2|}{(x+1)(t+1)} \\
 & = \frac{|xt(x-t) + x^2 - t^2|}{(x+1)(t+1)} \\
 & = \frac{|xt(x-t) + (x-t)(x+t)|}{(x+1)(t+1)} \\
 & = \frac{|x-t|(xt+x+t)}{x^2+x+t+1} \\
 & \leq |x-t|(1) < \epsilon \\
 & (\text{بمعنى } \epsilon \text{ مقرر}) \quad \delta = \epsilon \quad \text{is}
 \end{aligned}$$

$$(0, \infty) \text{ على } f(x) = \frac{\sin x}{x} \star (\gamma)$$

(\gamma) اعتبر الدالة $g(x)$ على $[0, \infty)$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} ; & x \neq 0 \\ 1 ; & x = 0 \end{cases}$$

(\gamma) g متصلة على $[0, \infty)$ (نرى)

$g(x) \equiv f(x)$ on $(0, \infty)$

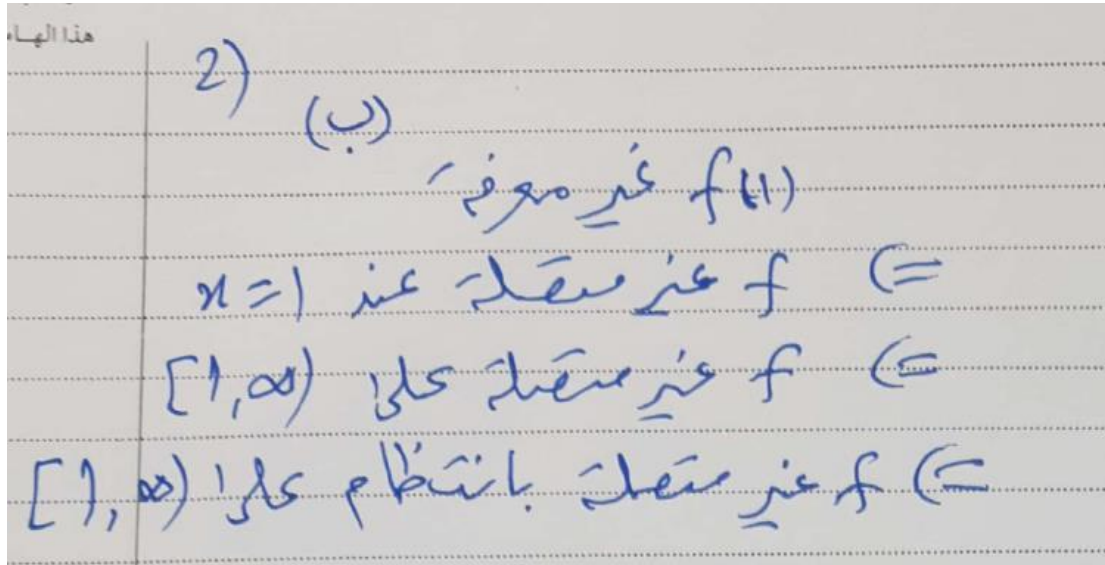
f متصلة باستمرار على $(0, \infty)$

(بمعنى 6.20 : متصلة بالقياس)

إذا كانت $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على D ، فإنه يمكن تمديد الدالة f لتصبح متصلة بانتظام على $\bar{D} = D \cup \hat{D}$.

2. أثبت أن الدوال الآتية غير متصلة بانتظام على مجالها

(ب) $\star f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ على $[1, \infty)$



2. أي دالة متصلة بانتظام، فهي متصلة.

(ج) $\star f(x) = x \sin x$ على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x \sin x$$

من مصادره بانتقال على $\mathbb{R}$

$$x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$$

$$t_n = 2n\pi$$

$$x_n - t_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$f(x_n) - f(t_n) = (2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(2n\pi + \frac{1}{n}) - 2n\pi \sin 2n\pi$$

$$= (2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n})$$

$$= 2n\pi \sin(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n})$$

bounded $\rightarrow 0$

$$= 2\pi \frac{\sin(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} \rightarrow 2\pi$$

$\mathbb{R}$: $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$ $x_n = 2n\pi$ $\rightarrow$ (5.9) $\in \mathbb{R}$ (1.)

$|y_n - x_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$|f(y_n) - f(x_n)| = |(2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(2n\pi + \frac{1}{n}) - 2n\pi \sin(2n\pi)|$$

$$= |(2n\pi + \frac{1}{n}) [\sin(2n\pi) \cos(\frac{1}{n}) + \cos(2n\pi) \sin(\frac{1}{n})]|$$

$$= |(2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n})| = |\frac{2n^2\pi + 1}{n} \sin(\frac{1}{n})|$$

3. أثبت ان الدوال الآتية تحقق شرط ليبشتر على مجالها

$$[0, 5] \text{ على } f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \star (1)$$

3) (i)

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(t)| &= |x^2 + 2x + 3 - t^2 - 2t - 3| \\
 &= |(x^2 - t^2) + 2(x - t)| = |(x - t)(x + t) + 2(x - t)| \\
 &= |(x - t)(x + t + 2)| = |x - t| \cdot |x + t + 2| \\
 &\leq |x - t| \cdot (|x| + |t| + |2|) \\
 &\leq |x - t| (5 + 5 + 2) \\
 &= 12 |x - t|
 \end{aligned}$$

نختار $K=12$ (ممكن)

6. * إذا كانت كل من $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام ومحدودة، فأثبت أن fg متصلة بانتظام على D .

(i). $\exists K, M > 0$

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in D$$

$$|g(x)| \leq M \quad \forall x \in D$$

(ii).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$$

$$\delta_2(\varepsilon) > 0$$

$$|x - t| < \delta_1 \implies |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|x - t| < \delta_2 \implies |g(x) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

هذا

⑥ لكي δ

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \quad \text{نحسب}$$

$$|x - t| < \delta \Rightarrow$$

$$|(fg)(x) - (fg)(t)|$$

$$= |f(x)g(x) - f(x)g(t) + f(x)g(t) - f(t)g(t)|$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x)g(t)| + |f(x)g(t) - f(t)g(t)|$$

$$= |f(x)| |g(x) - g(t)| + |g(t)| |f(x) - f(t)|$$

$$\leq K \cdot \frac{\epsilon}{2K} + M \cdot \frac{\epsilon}{2M}$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(fg) متصلة بانتظام على D $\leftarrow$

14. * إذا كانت $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، فأثبت أن $f + g$ متصلة بانتظام على D . ثم أوجد مثالا يوضح أن fg ليست بالضرورة متصلة بانتظام على D .

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1(\epsilon) > 0, \exists \delta_2(\epsilon) > 0, \forall x, t \in D, |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - f(t)g(t)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
 |x-t| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \\
 |x-t| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \\
 \delta &= \min \{ \delta_1, \delta_2 \} \\
 |x-t| < \delta &\Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (f(t) + g(t))| \\
 &= |(f(x) - f(t)) + (g(x) - g(t))| \\
 &< | \quad | + | \quad | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

مثال الضرب:

The function f defined by $f(x) = x$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}$ but f^2 is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$.

الباب السابع

الاشتقاق

تمارين 7.1

1. باستخدام التعريف أوجد مشتقات الدوال الآتية

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0 \star (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (\text{ب}) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{x(x+h) \cdot h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x(x+h) \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

3. أوجد مجموعة النقاط التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.

$$f(x) = |x^2 - 1| \star (\text{ا})$$

• $f(x) = |x^2 - 1|$, $f'(x) = -2x$ if $|x| < 1$, $f'(x) = 2x$ if $|x| > 1$ and $f'(1)$ and $f'(-1)$ does not exist.

$$f(x) = x|x| \star (\text{ج})$$

$f(x) = x|x|$, $f'(x) = 2x$ if $x > 0$, $f'(x) = -2x$ if $x < 0$ and $f'(0) = 0$.

4. أثبت أن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ ، ثم أوجد $f'(0)$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}. \text{ But } |f(x)| \leq x^2 \text{ for all } x \in \mathbb{R}, \text{ then } f'(0) = 0.$$

5. إذا كانت f تحقق

$$|f(x)| \leq |x|^r$$

في جوار 0 وكان $r > 1$ ، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}. \text{ But } |f(x)| \leq |x|^\alpha \text{ and } \alpha > 1, \text{ then } f'(0) = 0.$$

9. * إذا كانت f قابلة للاشتقاق، فأثبت أن f' فردية إذا كانت f زوجية، و f' زوجية إذا كانت f فردية.

$$f(x) = f(x) \Rightarrow (f(-x))' = f'(x)$$

$$f'(x) = -f'(-x)$$

$$f'(-x) = -f'(x) \quad \checkmark$$

$$f'(-x) = -f'(x)$$

f' دالة فردية

و دالة زوجية

$$g(x) = -g'(x)$$

$$g'(-x) (-1) = -g'(x)$$

$$g'(-x) = g'(x)$$

g' دالة زوجية

حل آخر:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{If } f \text{ is even, } f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x). \text{ Then } f' \text{ is odd.}$$

$$\text{If } f \text{ is odd, } f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = f'(x). \text{ Then } f' \text{ is even.}$$

12. * إذا كانت $g(0) = g'(0) = 0$ ، فأوجد $f'(0)$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 0}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(c)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \\
 &= g'(c) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \\
 &\quad 0 \leq \left| \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right| \leq 1
 \end{aligned}$$

تمارين 7.2

5. * أثبت أنه لكل $x, y \in \mathbb{R}$ فإن

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

ولنفرض - $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, x < y$

$$f(x) = \cos x \quad [x, y]$$

f متصلة على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ متصلة على $[x, y]$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ قابلة للاشتقاق على (x, y)

نمطبق القيمة المتوسطة $\Leftarrow \exists x < c < y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) = -\sin c$$

$$\left| \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \right| = |-\sin c| \leq 1$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

7. * أثبت أن

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \forall x > 0$$

عرف الدالة $f(x) = \sqrt{1+x}$ (7)

على الفترة $(0, x)$

f متصلة على $[-1, \infty)$ متصلة على الفترة $(0, x)$

f قابلة للاشتقاق على $(-1, \infty)$ f قابلة للاشتقاق على $(0, x)$

من نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد $c \in (0, x)$ بحيث

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2\sqrt{1+c}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 < \frac{1}{2}x$$

$$\sqrt{1+x} < \frac{1}{2}x + 1$$

14. * باستخدام التعريف، أثبت أن الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ثم برهن وجود $c \in (0, 1)$ بحيث

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}$$

(14) $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad : c \in \mathbb{R} \text{ و } u$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(c+h)^2 + 1} - \sqrt{c^2 + 1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{(c+h)^2 + 1} - \sqrt{c^2 + 1})(\sqrt{(c+h)^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1})}{h(\sqrt{(c+h)^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c+h)^2 + 1 - (c^2 + 1)}{h(\sqrt{(c+h)^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ch + h^2}{h(\sqrt{(c+h)^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2c + h}{\sqrt{(c+h)^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}} = \frac{2c}{2\sqrt{c^2 + 1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow f'(c)$ موجود $\Rightarrow f$ قابلة للاشتقاق عند c أي عند c حقيقي.

(15) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ f مشتقة على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ f مشتقة على $(0, 1)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow f$ قابلة للاشتقاق على $(0, 1)$

من نظرية، لنفرض المشتقة موجودة عند $c \in (0, 1)$ بحسب:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \sqrt{2} - 1$$

تمارين 7.3

1. أوجد النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \quad * \quad (1)$$

① (أ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \cdot (I.F)$
 نطبق قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

2. أوجد النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \quad * \quad (ب)$$

② (ب) $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = y$ $\Rightarrow$
 $x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \ln y$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y$
 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right) (I.F)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{1 + \frac{2}{x}} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{\infty} = 0$

هذا الهامش

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = 1$$

4. * إذا كانت $g \in C^2(\mathbb{R})$ و $g(0) = g'(0) = 0$ و $g''(0) = 6$ ، وكانت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومعرفة بالعلاقة

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}, \quad x \neq 0$$

أوجد $f(0)$ ، ثم بين هل f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

④ 0 ist l.h.f. $\Leftarrow \mathbb{R}$ da hier f
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftarrow$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \\ &= g'(0) = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(v) = 0 = g'(v) = 0$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(h)}{h} - 0}{\frac{h}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$(f(h))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 6$$

$$6 = g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 0}{h}$$

$$\Rightarrow f(0) \text{ صفر و } 0 \Rightarrow f \text{ قابلية الاستقامة عند } 0.$$

8. * إذا كانت $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, $g(x) = \sin x$ ، بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ موجودة، ولكن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$\sin x \sim x$ when $x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$

does not exist

تمارين 7.4

5. * أثبت أنه لكل $x > 0$ ، فإن

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

لا يكتب في هذا الهامش

⑤ لدينا متراجعتان :

$$\sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{x+1} \quad (2)$$

الاثبات المتراجمة (2) :

من نقطة نأخذ :

لكن $x > 0$ ، $b > x > 0$ على $f(x) = \sqrt{x+1}$ على $(0, b)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ مشتقة على } (0, b)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \text{ مشتقة على } (0, b)$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \text{ موجودة على } (0, b)$$

لذا نأخذ c بين 0 و x كبير :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-0)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{\frac{3}{8}(1+c)^{-\frac{5}{2}}}{6}x^3$$

موجب

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} > 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

إثبات المتراجحة (1):

عربي الرابع

على الفترة $(0, x)$

f مستمرة على $[-1, \infty)$ مستمرة على الفترة $(0, x)$

f قابلة للاشتقاق على $(-1, \infty)$ قابلة للاشتقاق على $(0, x)$

من نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد $\xi \in (0, x)$ بحيث

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 < \frac{1}{2}x$$

$$\sqrt{1+x} < \frac{1}{2}x + 1$$

6. حدد فيما إذا كانت $f(0)$ قيمة عظمى محلية، صغرى محلية، ليست قيمة قصوى

(ب) ★ $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

مبرهنة 7.22

إذا كانت

$$f'(c) = f''(c) = \dots, f^{(m-1)}(c) = 0$$

و

$$f^{(m)}(c) \neq 0$$

وكان

1. m عددا فرديا، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية

2. m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية

3. m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c) > 0$ ، فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية

⑥ (ب)

$$f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$$

$$f''(x) = -\sin(x) + x$$

$$f''(0) = -\sin(0) + 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) + 1$$

$$f'''(0) = -\cos(0) + 1 = 0$$

$$f^{(4)}(x) = +\sin(x)$$

$$f^{(4)}(0) = +\sin(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos(x)$$

$$f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

$m=5$ عدد فردی $f(0) \neq 0$ پس تابع در $x=0$ نقطه
(f) نقطه عطف محلی
و نقطه مینیمم محلی است