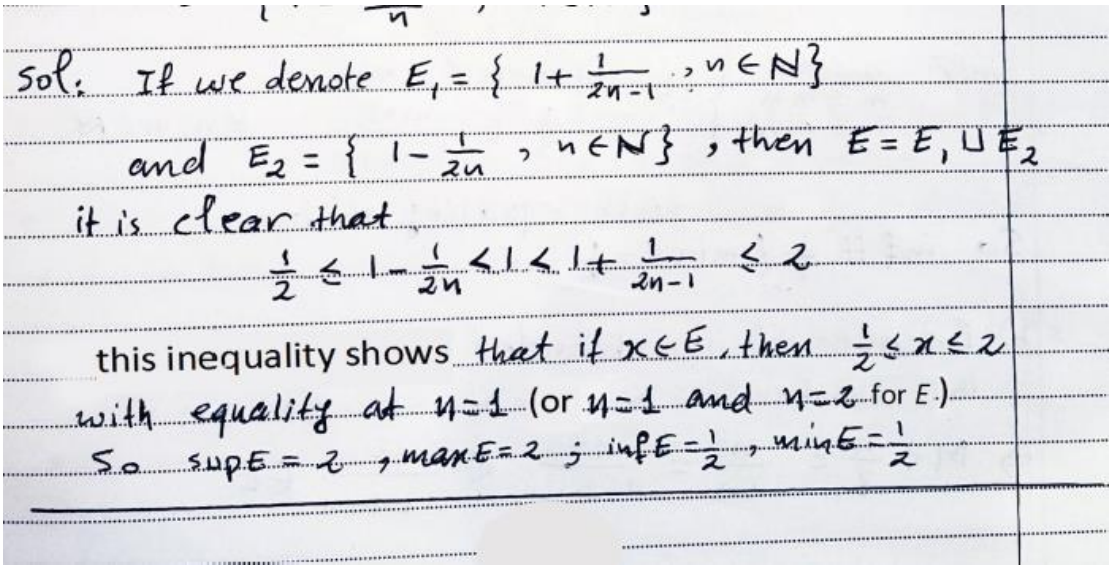
تمارين الباب الثاني

6. أوجد $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ للمجموعات الآتية إن وجدت

$$A = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \star \quad (1)$$

$$\sup A = 2, \inf A = \frac{1}{2}.$$



Sol. If we denote $E_1 = \{1 + \frac{1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}$

and $E_2 = \{1 - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$, then $E = E_1 \cup E_2$

it is clear that

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2n} < 1 < 1 + \frac{1}{2n-1} \leq 2$$

this inequality shows that if $x \in E$, then $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

with equality at $n=1$ (or $n=1$ and $n=2$ for E.)

So $\sup E = 2$, $\max E = 2$; $\inf E = \frac{1}{2}$, $\min E = \frac{1}{2}$

1 Let

$$S = \{1 - (-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Find $\inf S$ and $\sup S$ and prove your answers.

Solution We claim that $\inf S = 1/2$ and $\sup S = 2$. Note that, if n is odd, $1-(-1)^n/n = 1+1/n$, while, if n is even, $1-(-1)^n/n = 1-1/n$. It follows, if n is odd, that $1-(-1)^n/n > 1 > 1/2$. If $n \geq 2$ is even,

$$1-(-1)^n/n = 1-1/n \geq 1-1/2 = 1/2.$$

Arguing similarly, $1-(-1)^n/n \leq 2$ and so $1/2$ and 2 are, respectively, lower and upper bounds for S. Since $1/2 \in S$, there cannot be a lower bound $m > 1/2$ and so $1/2$ is the greatest lower bound for S, i.e. $\inf S = 1/2$. Since $2 \in S$, there cannot be a upper bound $M < 2$ and so 2 is the least upper bound for S, i.e. $\sup S = 2$.

$$A = \left\{\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\} \star \quad (ج)$$

- $A = B - B$ where $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ and $X - Y = \{x - y : x \in X, y \in Y\}$.
- $\inf B = 0$, $\sup B = 1$. ($\inf B = 0$ is the Archimedean property.)
- $\inf(X - Y) = \inf X - \sup Y$ implies $\inf A = \inf B - \sup B = 0 - 1 = -1$.
- $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$ implies $\sup A = \sup B - \inf B = 1 - 0 = 1$.

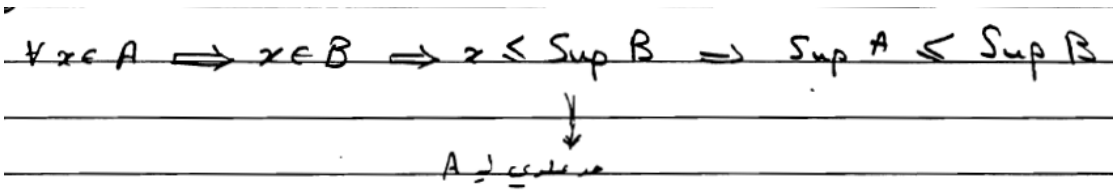
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\} \star \quad (هـ)$$

Since $x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$ we see that $E=(-2,2)$. Using Q4 we get:

$$\sup E = 2,\ \inf E = -2,\ no \max E\ and\ no \min E\ .$$

10. ⋆ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، وكان $A \subset B$، فأثبت أن

$$\sup A \leq \sup B$$



12. ⋆ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، فأثبت أن $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ محدودة، ثم أثبت أن

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

$\forall a \in A \quad a \leq K$
$\forall b \in B \quad b \leq L$ $\Rightarrow$ $\forall z \in A+B \quad z = a+b \leq K+L$

$(A+B)$ محدودة من اعلى

$Sup(A+B)$ متواجدة $\Leftarrow$

$\forall z \in A+B \quad a \leq Sup A \quad , \quad b \leq Sup B$

$z = a+b \leq Sup A + Sup B$

$Sup(A) + Sup B$ حد علوي لـ $(A+B)$

$Sup(A+B) \leq Sup A + Sup B$

$$0 \leq \sup(A) + \sup B - \sup(A+B) \quad \longrightarrow (1)$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists\, a_0 \in A \quad a_0 > \sup A + \frac{\varepsilon}{2}$

ليس حد علوي لـ A

$\sup B - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists\, b_0 \in B \quad b_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$

ليس حد علوي لـ B

$$\sup(A+B) \geq \underbrace{a_0 + b_0}_{\in A+B} > \sup A + \sup B - \varepsilon$$

$$\sup(A+B) > \sup(A) + \sup B - \varepsilon$$

$$\sup(A) + \sup(B) - \sup(A+B) < \varepsilon \quad \longrightarrow (2)$$

$$0 \leq \sup(A) + \sup(B) - \sup(A+B) < \varepsilon$$

$$\sup(A) + \sup B - \sup(A+B) = 0$$

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

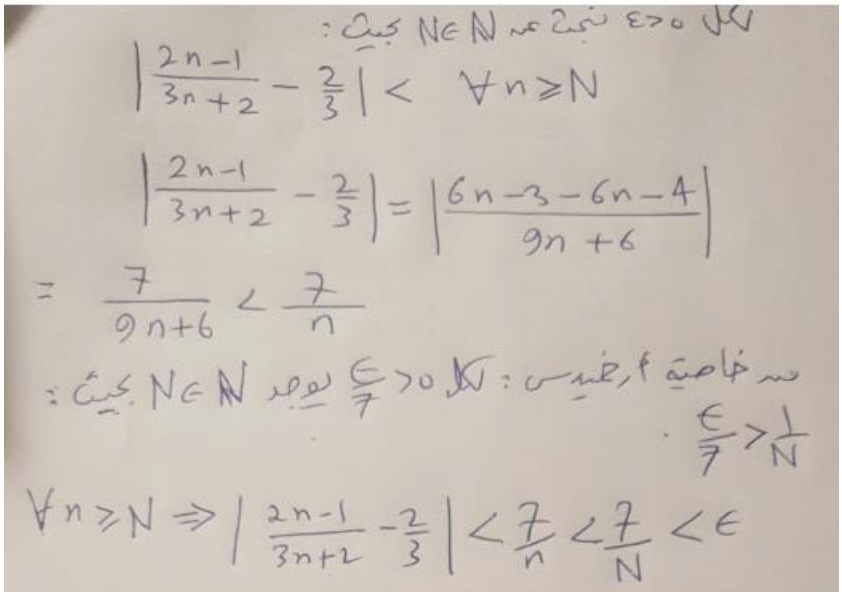
الباب الثالث

المتتاليات

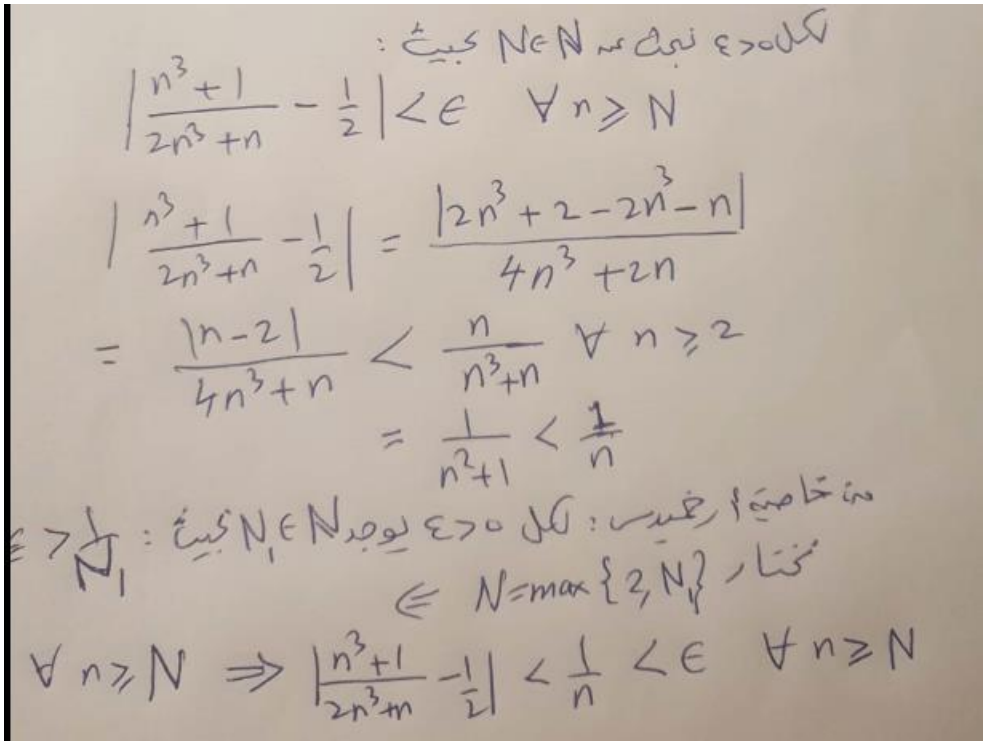
تمارين 3.1

3. أثبت ما يلي باستخدام التعريف:

(ا) ⋆ $\lim \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$



(و) ⋆ $\lim \dfrac{n^3+1}{2n^3+n} = \dfrac{1}{2}$.



5. ⋆ إذا كانت $\lim x_n = L$ و $\lim y_n = L$، فأثبت أن المتتالية $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ متقاربة ونهايتها L.

3.1(5)

$x_n \to L \Rightarrow$ یعنی: $\forall \epsilon > 0$ یوجد $N_1 \in \mathbb{N}$

$|x_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq N_1$

$y_n \to L \Rightarrow$ یعنی: $\forall \epsilon > 0$ یوجد $N_2 \in \mathbb{N}$

$|y_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq N_2$

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ فردی} \\ y_{\frac{n}{2}} & n \text{ زوجی} \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $N = \max\{N_1, N_2\}$

اگر $n \geq N$ آنگاه:

$$|z_n - L| = \begin{cases} |x_{\frac{n+1}{2}} - L| & n \text{ فردی} \\ |y_{\frac{n}{2}} - L| & n \text{ زوجی} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} < \epsilon & \forall \frac{n+1}{2} \geq N_1 \\ < \epsilon & \forall \frac{n}{2} \geq N_2 \end{cases}$$

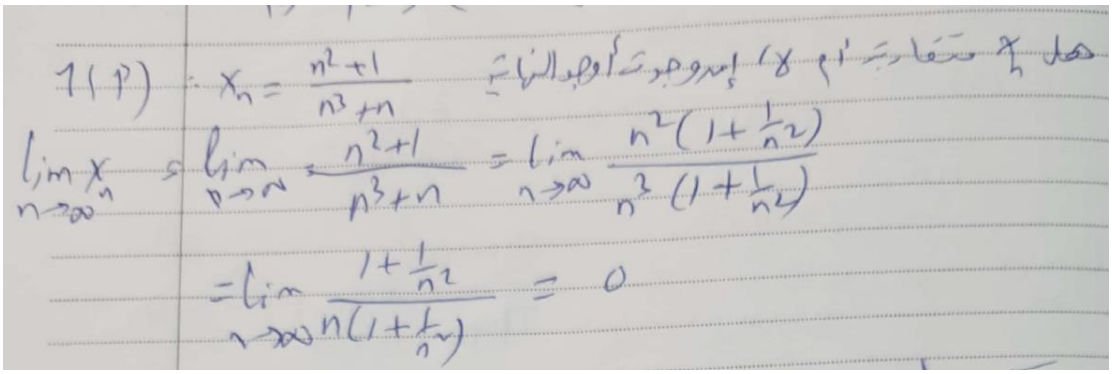
$$\Rightarrow \begin{cases} < \epsilon & \forall n \geq N_1 \\ < \epsilon & \forall n \geq N_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

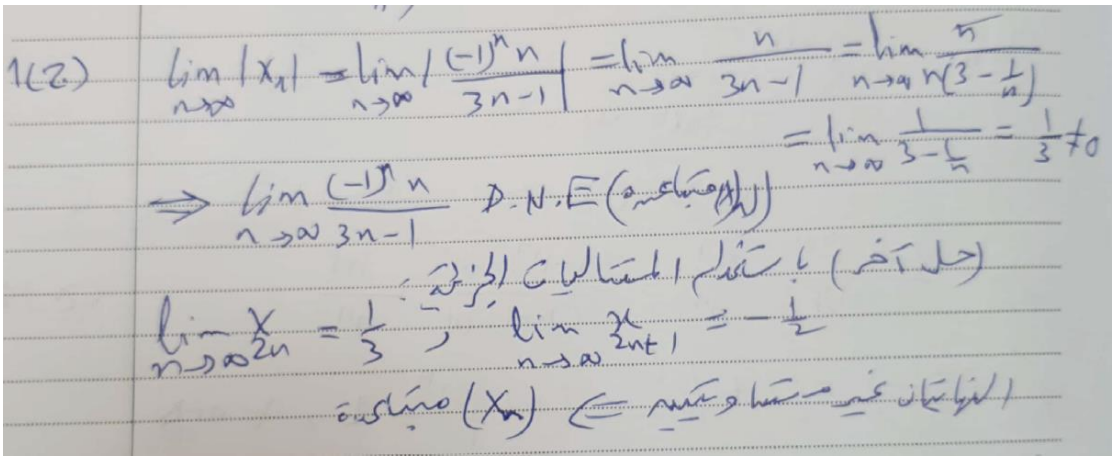
تمارين 3.2

1. بين ما إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة أم لا، وأوجد النهاية إن وجدت.

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^3+n} \qquad \star \ (ا)$$

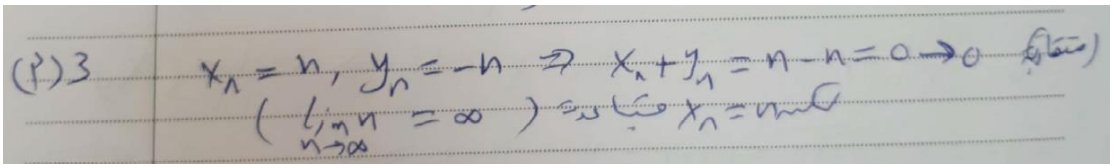


$$x_n = \frac{(-1)^n n}{3n-1} \qquad \star \ (ج)$$

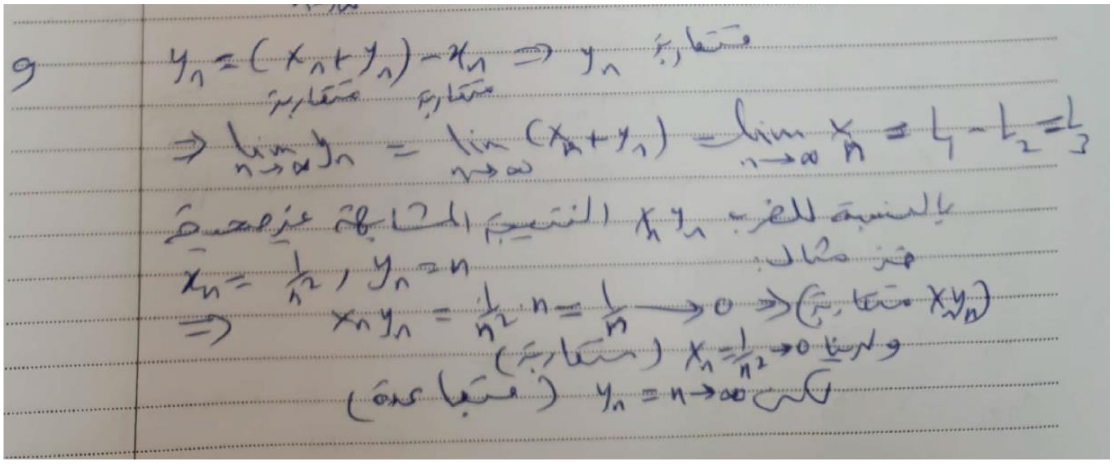


3. أعط مثالا لما يلي:

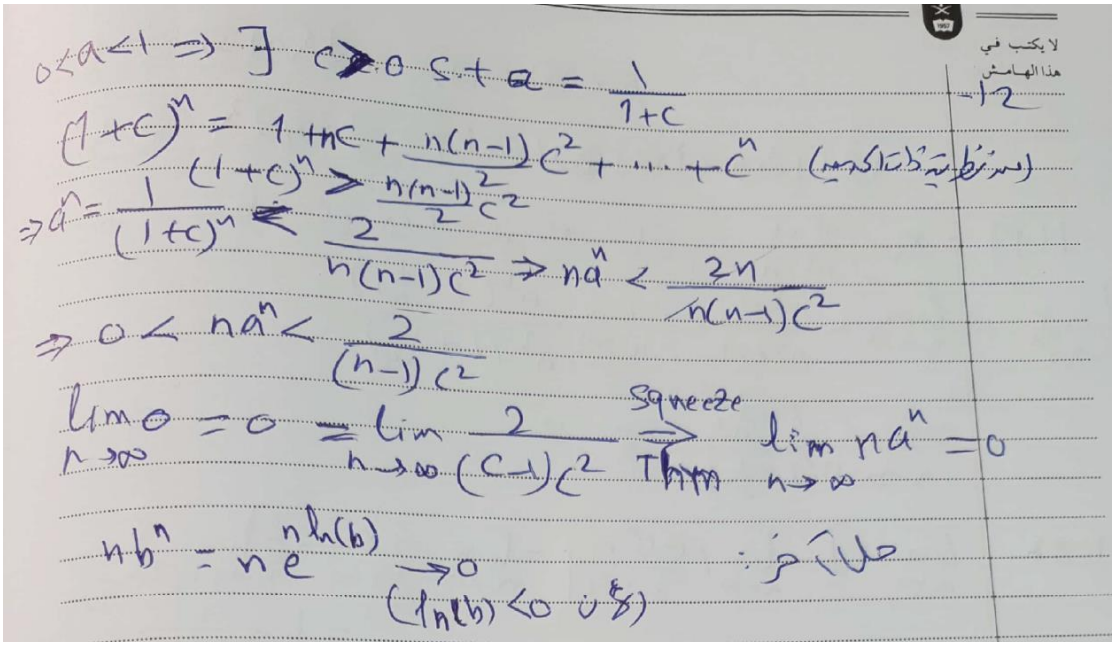
(ا) ⋆ متتاليتان $(x_n), (y_n)$ بحيث تكون $(x_n + y_n)$ متقاربة، بينما (x_n) متباعدة.



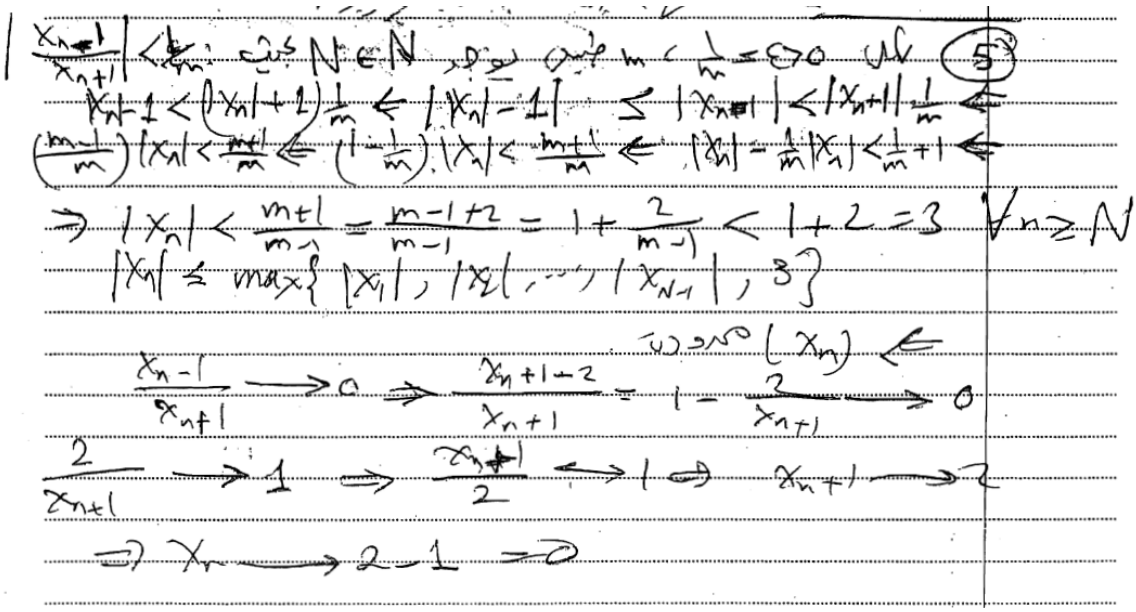
9. ⋆ إذا كانت $(x_n + y_n)$ متقاربة و (x_n) متقاربة، فأثبت أن (y_n) متقاربة. هل نستطيع استنتاج نتيجة مشابهة للمتتالية $(x_n y_n)$؟



12. ⋆ إذا كان $0 < a < 1$، فأثبت أن $\lim na^n = 0$



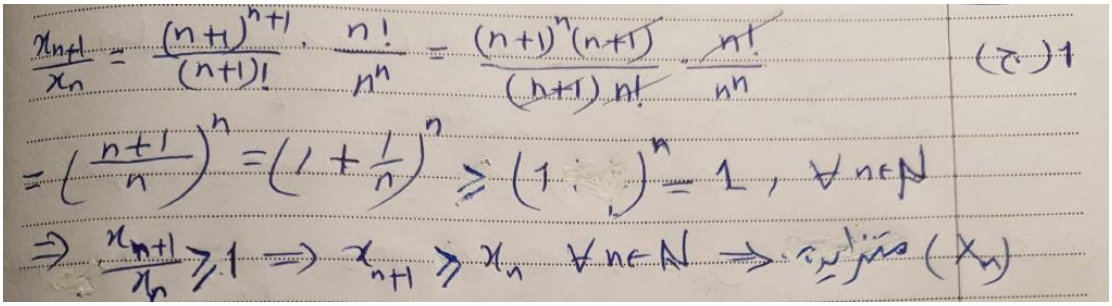
17. ⋆ إذا كانت $\lim \dfrac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0$، فأثبت أن (x_n) محدودة، ثم أثبت أن نهايتها تساوي 1.



تمارين 3.3

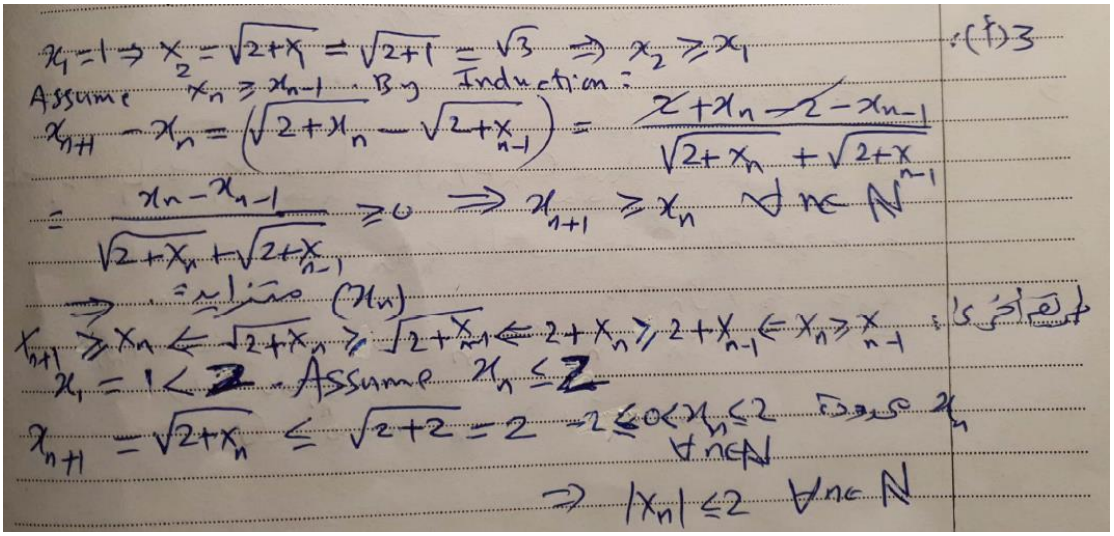
1. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة حيث

(ج) ⋆ $x_n = \frac{n^n}{n!}$



3. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم أوجد نهايتها.

(ا) ⋆ $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$



$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \Rightarrow x_2 \geq x_1$ (أ) 3

Assume $x_n \geq x_{n-1}$ By Induction:

$x_{n+1} - x_n = \left(\sqrt{2+x_n} - \sqrt{2+x_{n-1}}\right) = \dfrac{2+x_n-2-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}$

$= \dfrac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

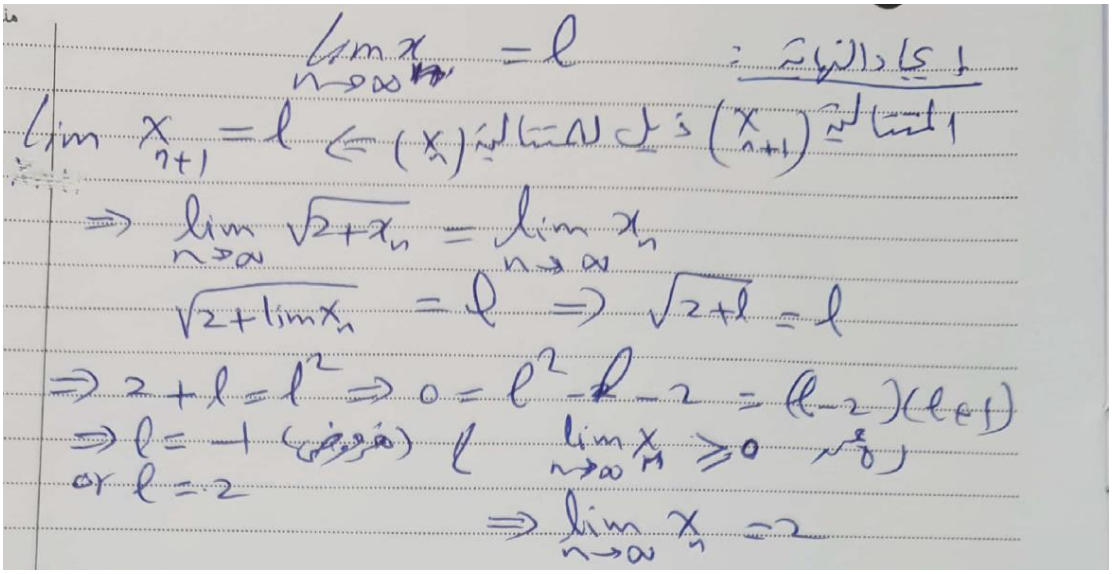
$\Rightarrow \exists \lim (x_n)$

لتقارب كا: $x_{n+1} \geq x_n \Leftarrow \sqrt{2+x_n} \geq \sqrt{2+x_{n-1}} \Leftarrow 2+x_n \geq 2+x_{n-1} \Leftarrow x_n \geq x_{n-1}$

$x_1 = 1 < 2$ Assume $x_n \leq 2$

$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$ $\Rightarrow -2 \leq 0 < x_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ متقاربة x_n

$\Rightarrow |x_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$: كما رأينا

المتتالية (x_{n+1}) متقاربة $\Leftarrow$ المتتالية (x_n) متقاربة و $\lim x_{n+1} = \ell$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$

$\sqrt{2+\lim x_n} = \ell \Rightarrow \sqrt{2+\ell} = \ell$

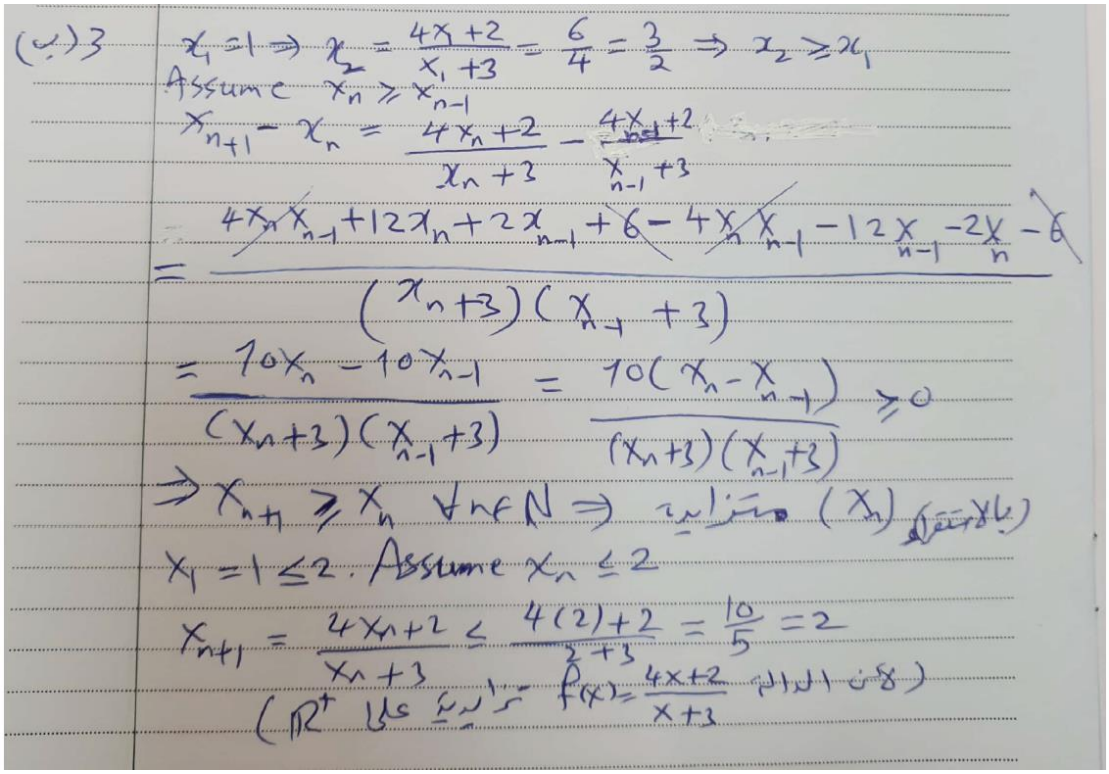
$\Rightarrow 2+\ell = \ell^2 \Rightarrow 0 = \ell^2 - \ell - 2 = (\ell-2)(\ell+1)$

$\Rightarrow \ell = -1$ (مرفوض) لأن $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$ (موجبة)

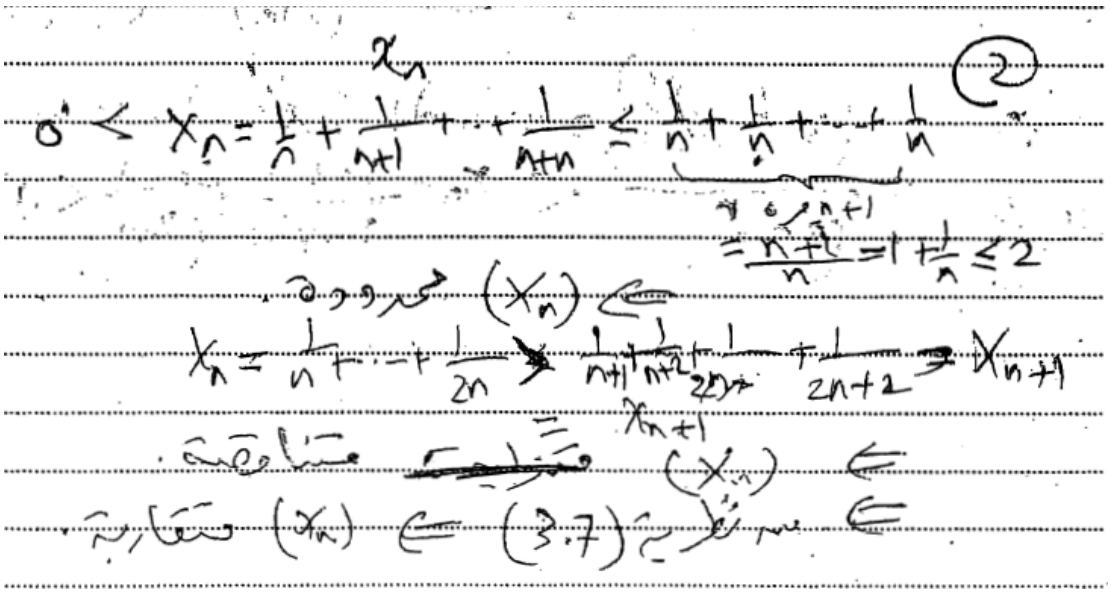
or $\ell = 2$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2$

(ب) $\star$ $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{4x_n + 2}{x_n + 3}$



7. ⋆ إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$، فأثبت أن (x_n) متناقصة ومحدودة وبالتالي متقاربة.

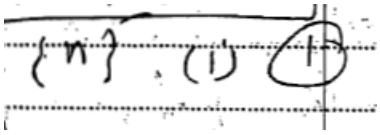


$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} \leq 0$, then the sequence $(x_n)_n$ is decreasing and non negative. It is convergent.

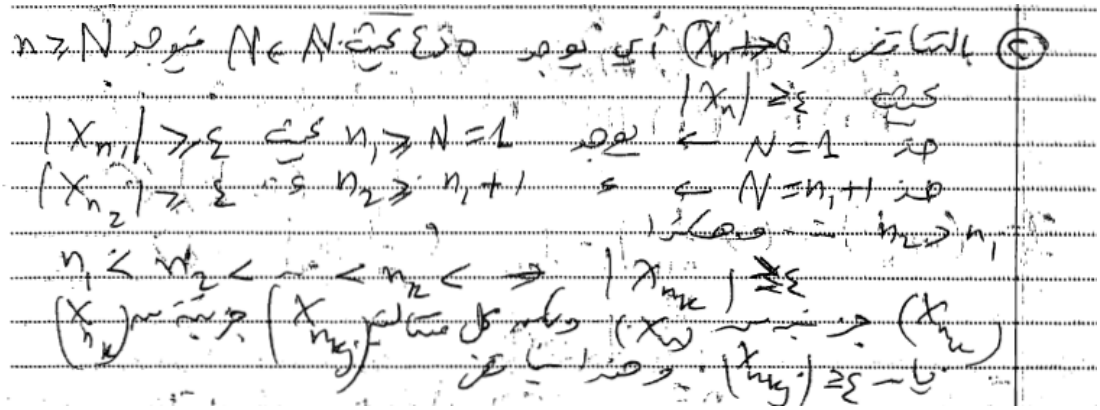
تمارين 3.4

1. أعط مثالا لما يلي:

(ا) ⋆ متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة



2. ⋆ إذا كانت كل متتالية جزئية من (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة إلى 0، فأثبت ان $\lim x_n = 0$.



7. ⋆ أثبت أن المتتالية (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة حيث

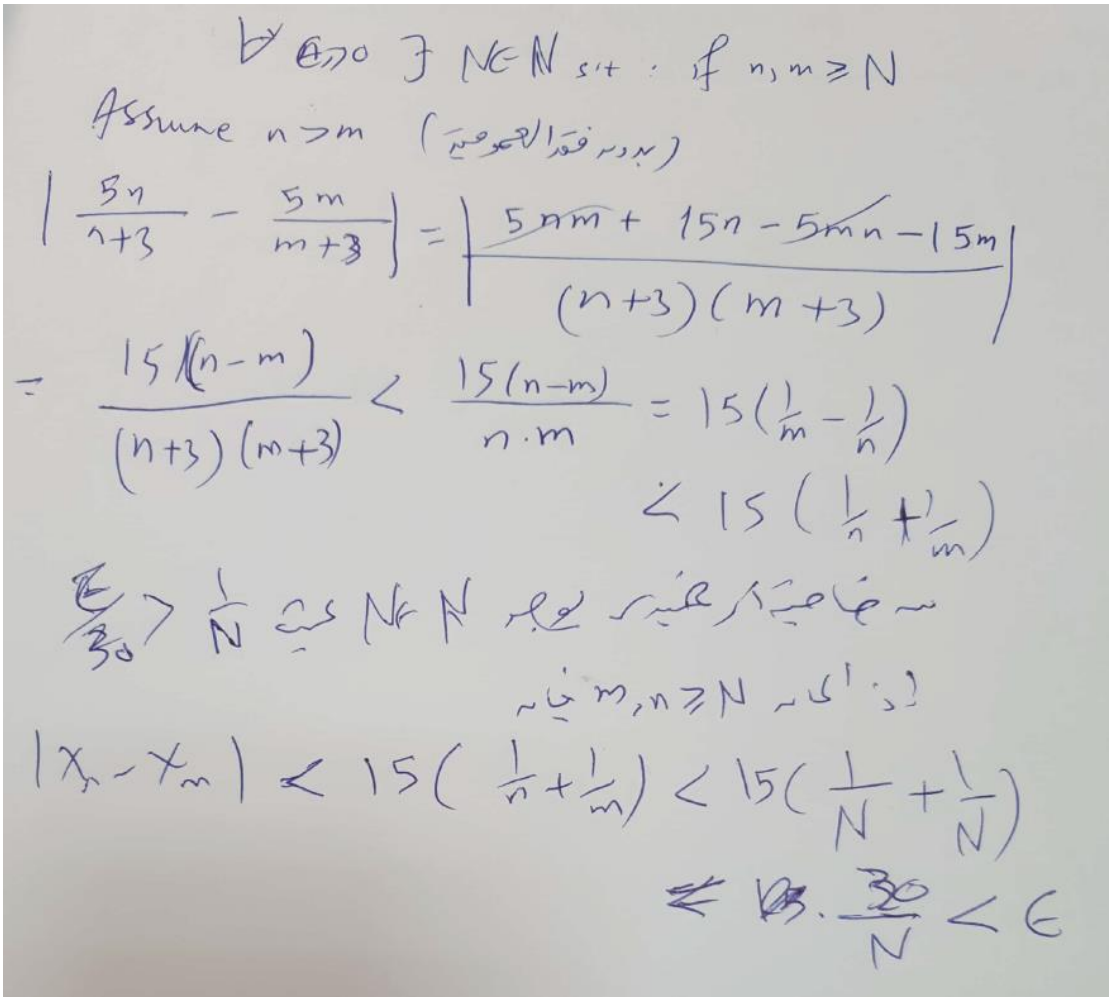
$$x_n = \frac{(n^2 + 20n + 30)\sin(n^3)}{n^2 + n + 1}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+20n+35}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{20}{n}+\frac{35}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$, *and every convergent sequence is bounded, therefore* $\left\{y_n = \frac{n^2+20n+35}{n^2+n+1}\right\}$ *is bounded, so there exists* $M \in \mathbb{R}$ *such that* $|y_n| \leq M$ *for all* $n \in \mathbb{N}$. *Also,* $\{z_n = \sin(n^3)\}$ *is bounded:* $|z_n| \leq 1$ *for all* $n \in \mathbb{N}$. *Therefore* $\{x_n\}$ *is bounded:* $|x_n| = |y_n z_n| = |y_n||z_n| \leq M$ *for all* $n \in \mathbb{N}$. *Every bounded sequence has a convergent subsequence, thus* $\{x_n\}$ *has a convergent subsequence.*

تمارين 3.5

1. ⋆ أثبت أن المتتالية (x_n) من نوع كوشي

$$x_n = \frac{5n}{n+3}$$

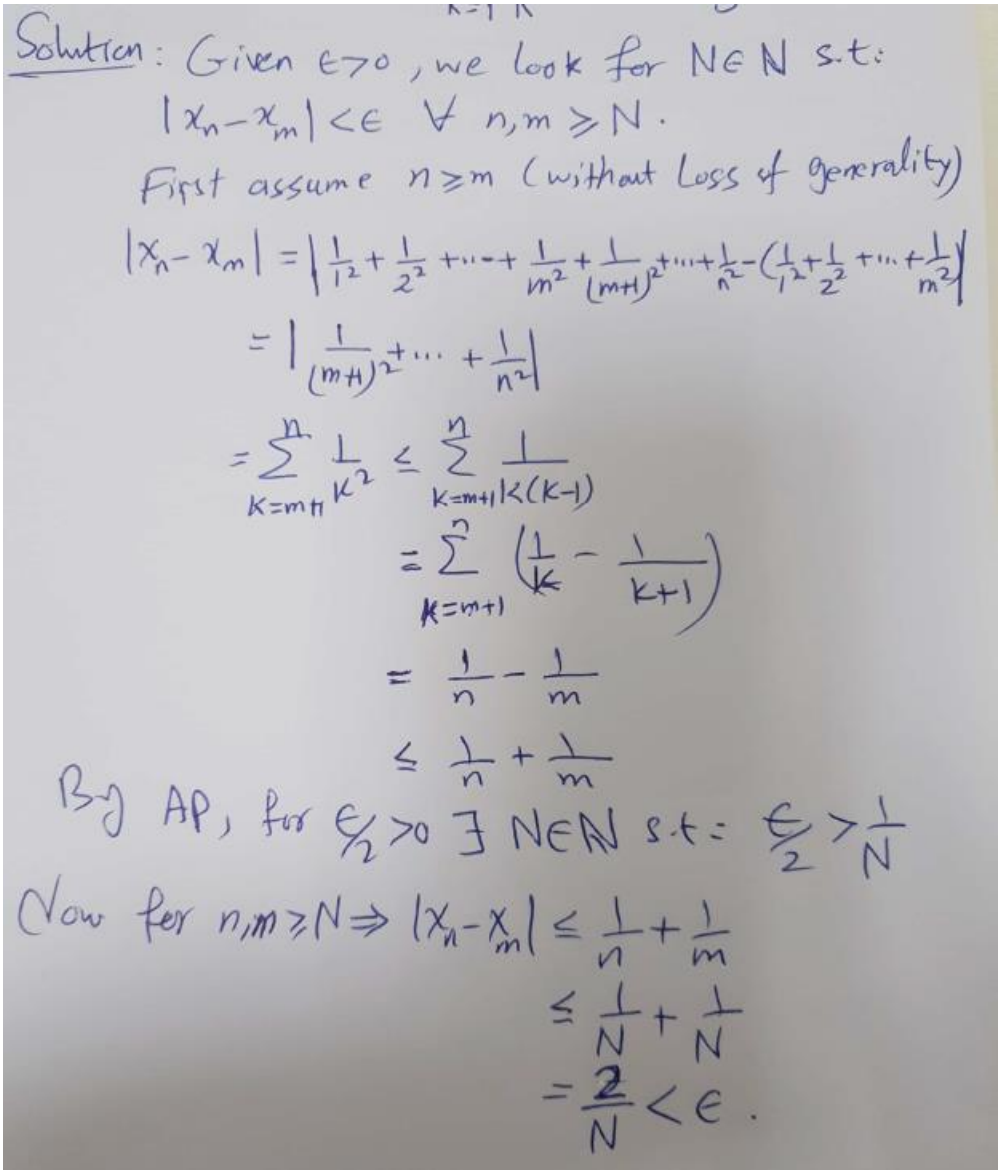


2. ⋆ إذا كانت (x_n) متتالية تحقق

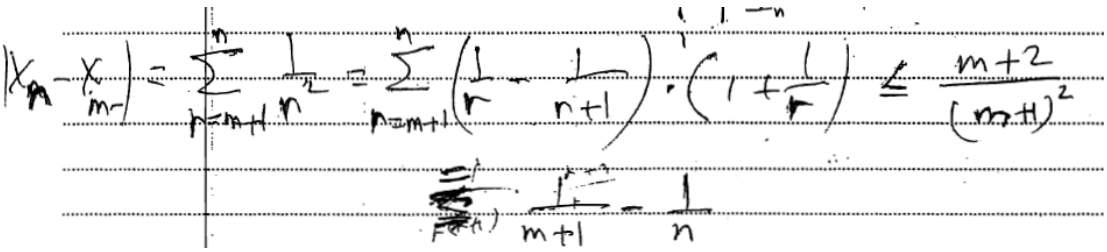
$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$$

https://youtu.be/svGyTISaMg8

6. ⋆ أثبت أن المتتالية $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ من نوع كوشي.



حلول أخرى:



Exercise 183 :

$\sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{n+m}(\frac{1}{(k-1)}-\frac{1}{k}) = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+m} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. The sequence $(x_n)_n$ is a Cauchy sequence.

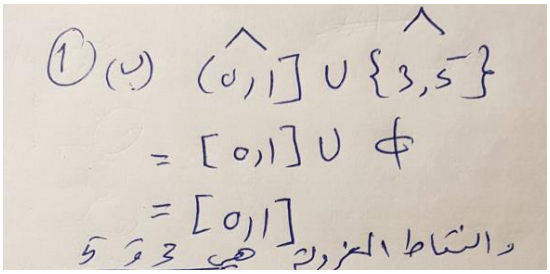
الباب الرابع

توبولوجيا الأعداد الحقيقية

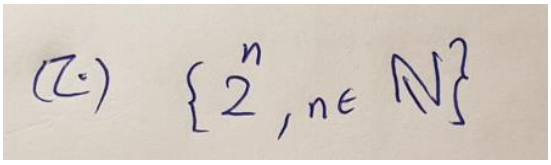
تمارين 4.1

1. أوجد نقاط التراكم، والنقاط المعزولة للمجموعات الآتية

(ب) $\star$ $(0,1] \cup \{3,5\}$



(ج) $\star$ $\left\{2^n + \frac{1}{k} : k, n \in \mathbb{N}\right\}$



4. $\star$ إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة ، و $\sup A \notin A$، فأثبت أن $\sup A \in \widehat{A}$.

Let $a = \sup A$, there exist a sequence $(x_n)_n \in A$ which converges to a. Since $a \notin A$, there exists a subsequence $(x_{n_k})_k$ with different terms. a is an accumulation point of the sequence $(x_{n_k})_k$.

و يمكن استخدام المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.3

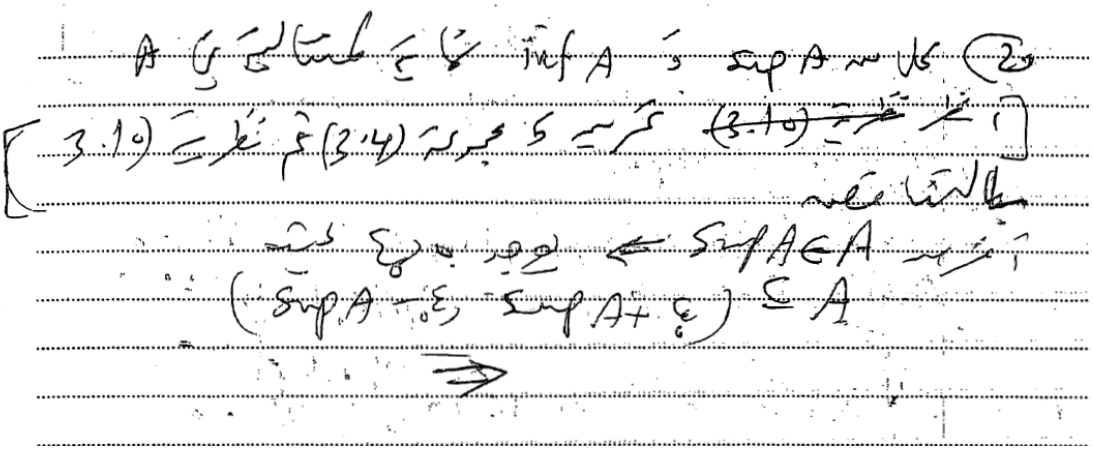
إذا كان β حدا علويا للمجموعة A ، فإن $\beta = \sup A$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A : \qquad \beta - \varepsilon < a$$

تمارين 4.2

3. ⋆ إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ غير خالية ومفتوحة ومحدودة، فأثبت أن $\sup A \notin A$

Let A be a bounded open subset of $\mathbb{R}$. If $a = \sup A \in A$, there is $r > 0$ such that $(a - r, a + r) \subset A$, which contradicts the fact that $a = \sup A$ since the interval $[a, a + r) \subset A$.



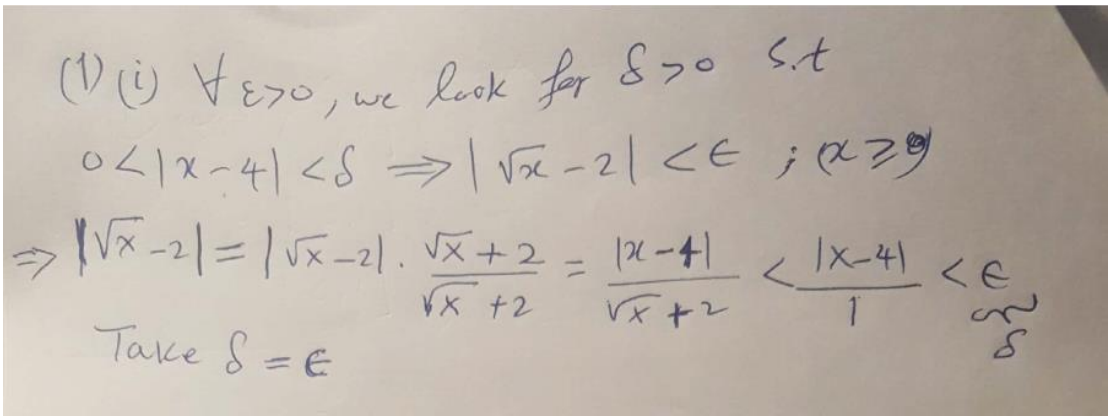
الباب الخامس

نهايات الدوال

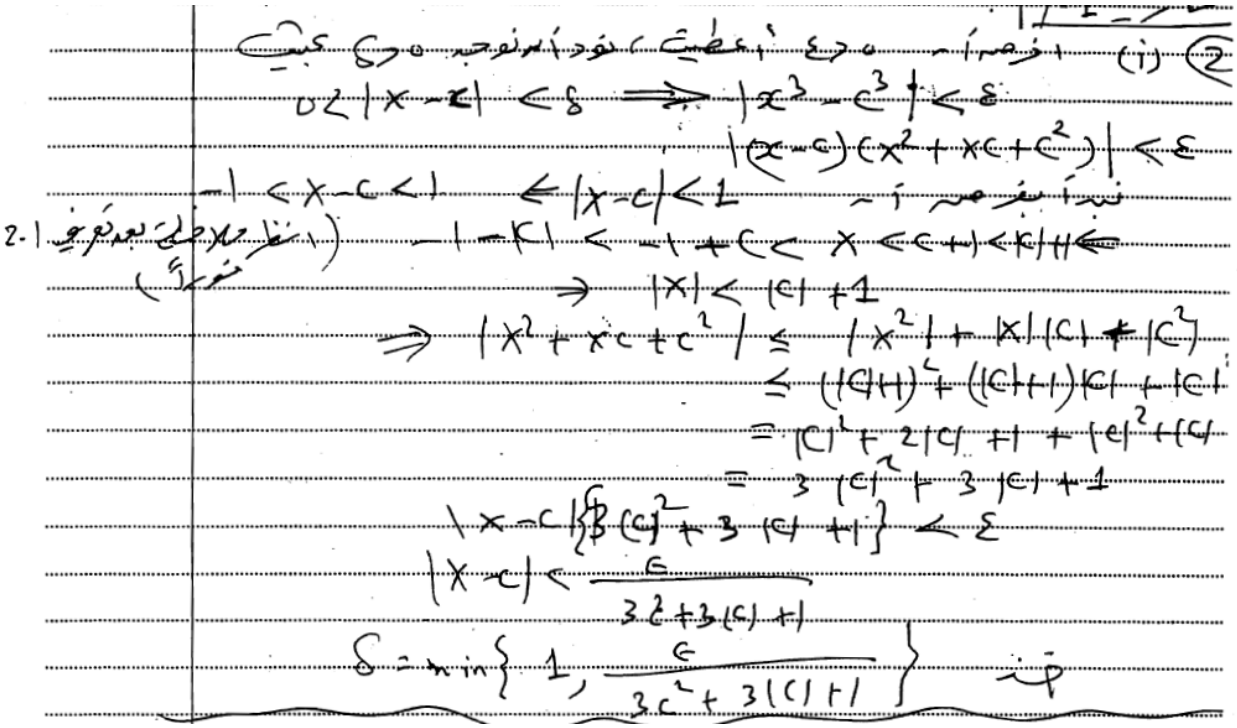
تمارين 5.1

1. باستخدام التعريف أثبت ما يلي:

(ا) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ ⋆



(و) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ ⋆



حل آخر:

• Let $\varepsilon > 0$ and $|x-c| \leq 1$. $|x^3-c^3| = |x-c|\,|x^2+xc+c^2| \leq |x-c|(|x|+|c|)^2 \leq |x-c|(2|c|+1)^2$. Then if $\alpha = \inf(1, \frac{\varepsilon}{(2|c|+1)^2})$, for all $x \in D, 0 < |x-c| < \alpha \Rightarrow |x^3-c^3| \leq \varepsilon$.

7. ⋆ إذا كانت $f : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ إذا كانت $\lim_{x\to c}[f(x)]^2 = 0$، فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. ماذا لو كانت $\lim_{x\to c}[f(x)]^2 = L^2 \neq 0$

(7) $\forall \epsilon > 0$, we look for $\delta > 0$ s.t:

$0 < |x-c| < \delta$, $x \in \widehat{D} \Rightarrow |[f(x)]^2 - 0| < \epsilon$

$\Rightarrow [f(x)]^2 < \epsilon \Rightarrow \sqrt{[f(x)]^2} < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |f(x)| < \sqrt{\epsilon}$

$\Rightarrow |f(x) - 0| < \underbrace{\sqrt{\epsilon}}_{\delta}$

Take $\delta = \sqrt{\epsilon}$

If $\lim_{x\to c}[f(x)]^2 = \ell \not\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = \ell$

For example: $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f^2(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

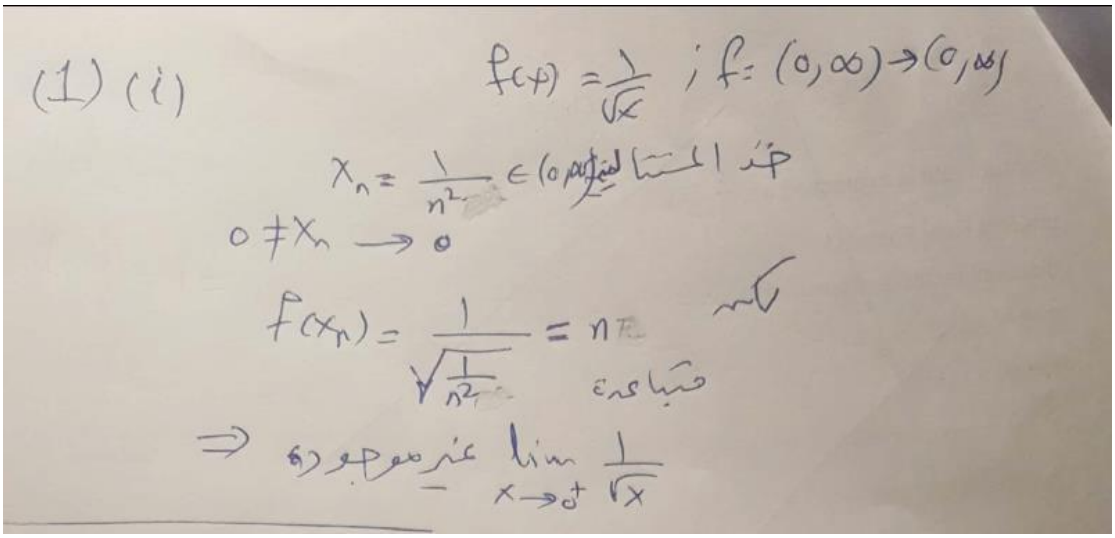
but $\lim_{x\to 0} f(x)$ D.N.E, since $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

& $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, they are not equal.

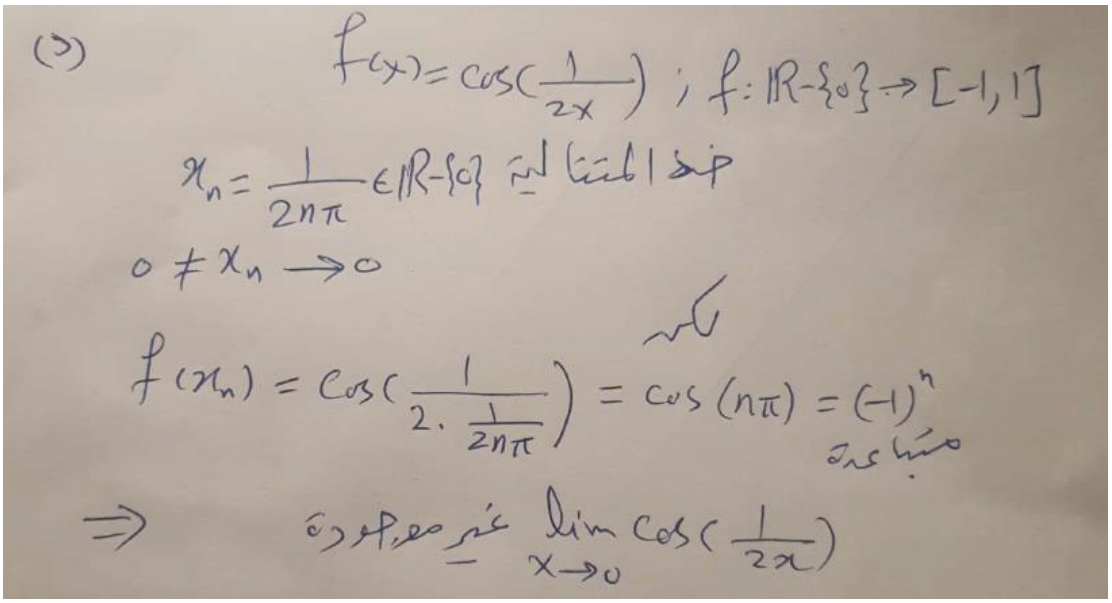
تمارين 5.2

1. أثبت أن النهايات الآتية غير موجودة

(ا) ⋆ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$

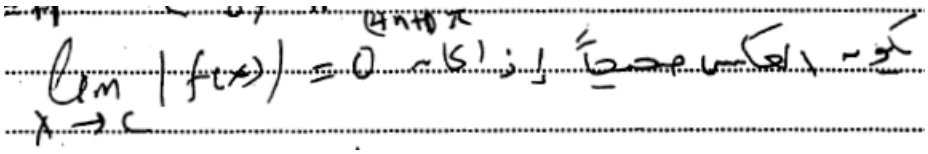


(د) ⋆ $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{2x}$



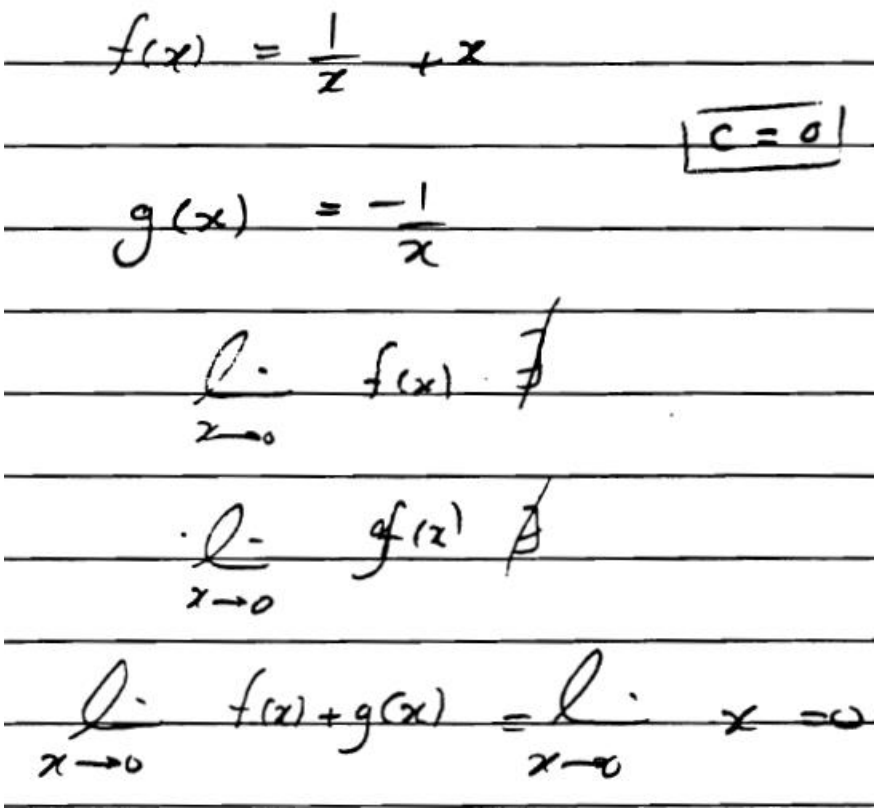
3. ⋆ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$، فأثبت أن $\lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$. متى يكون العكس صحيحا؟

Let $\varepsilon > 0$, there is $\alpha > 0$ such that for $|x - c| \leq \alpha$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Moreover $||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ for $|x - c| \leq \alpha$.
The converse is true if f has a constant sign.



تمارين 5.3

1. (ا) ⋆ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة، فهل ممكن أن تكون النهاية $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ موجودة؟ ماذا عن $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$؟



$f(x) = x - \operatorname{sgn} x$

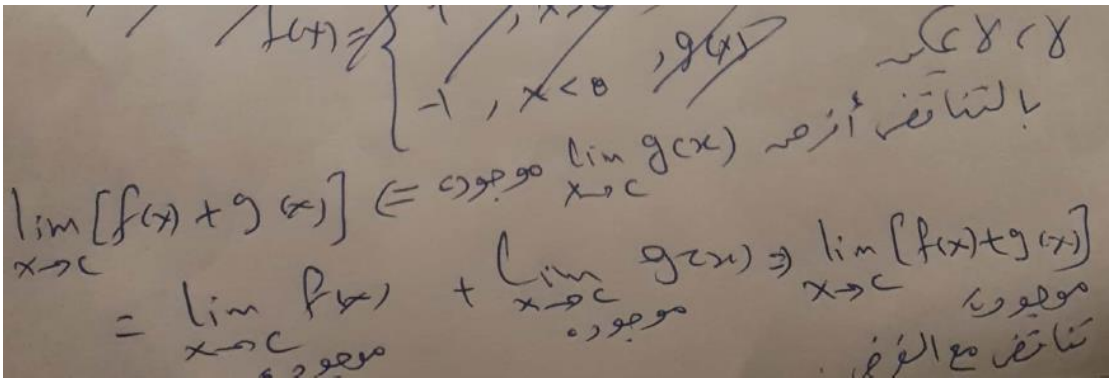
$g(x) = x + \operatorname{sgn} x$

$f(x)\,g(x) = x^2 - (\operatorname{sgn} x)^2$

$$f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

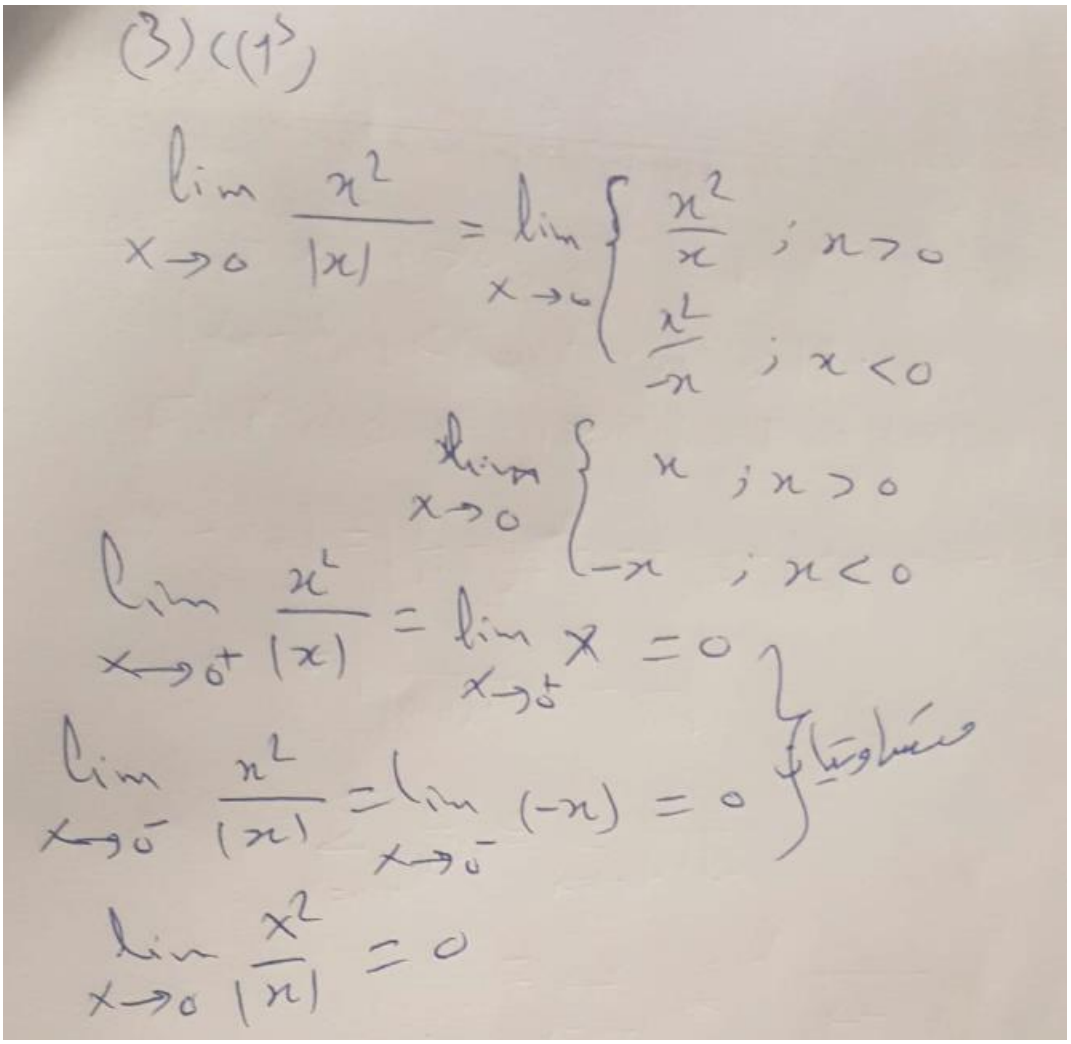
$$\lim_{x\to 0} f(x)\,g(x) = -1$$

(ب) ⋆ إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة و $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ غير موجودة فهل يمكن أن تكون $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ موجودة؟

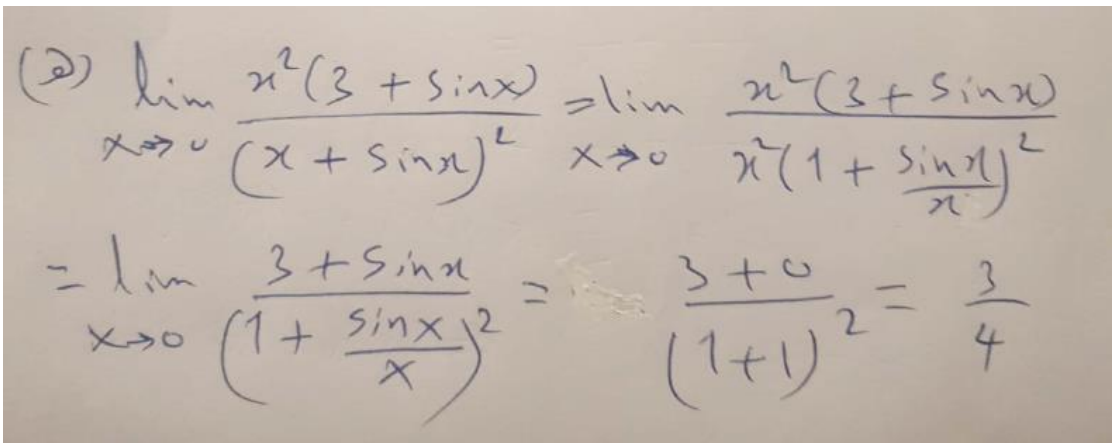


3. أوجد قيم النهايات الآتية إن وجدت

(أ) ⋆ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$



(هـ) ⋆ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\sin x)}{(x+\sin x)^2}$



5. ⋆ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ و g محدودة في جوار ما للنقطة c، فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1$

$x \in D$

$x \neq c$

$|x-c| < \delta_1 \Rightarrow f(x) < \frac{\varepsilon}{K}$

(ii) $\exists \delta_2, K > 0$

$|g(x)| \leq K \quad \forall x \in (c-\delta_2, c-\delta_2)$

$V_1(\varepsilon)$ $(\ \delta_2 \quad c \quad \delta_1\ )$

$V_2(\varepsilon)$ $(\ \delta_2 \quad c \quad \varepsilon_1\ )$

$V = V_1 \cap V_2 = (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\forall x \in V \Rightarrow |f(x).g(x)| = |f(x)|\,|g(x)|$

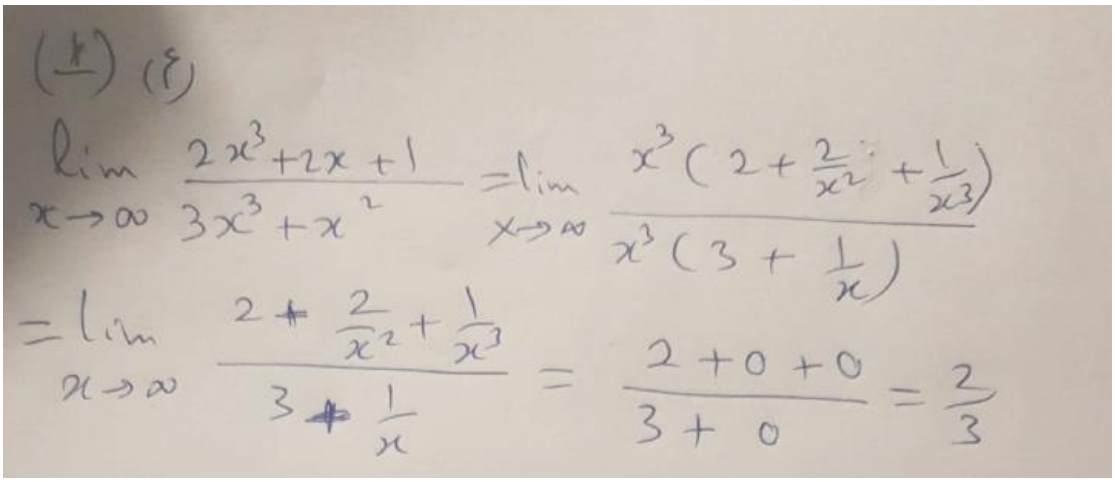
$0 < |x-c| < \delta \qquad \leq |f(x)|\,K < K.\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

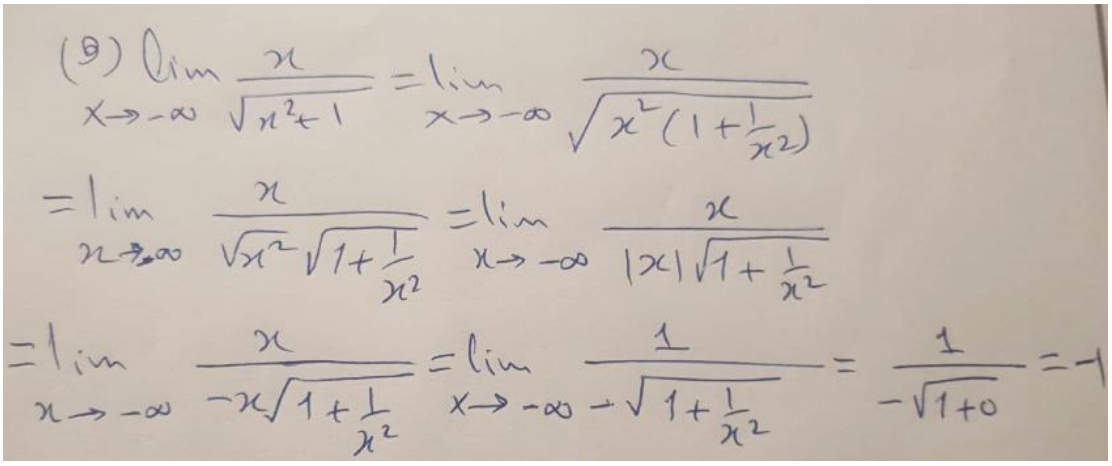
تمارين 5.4

1. أوجد قيم النهايات الآتية

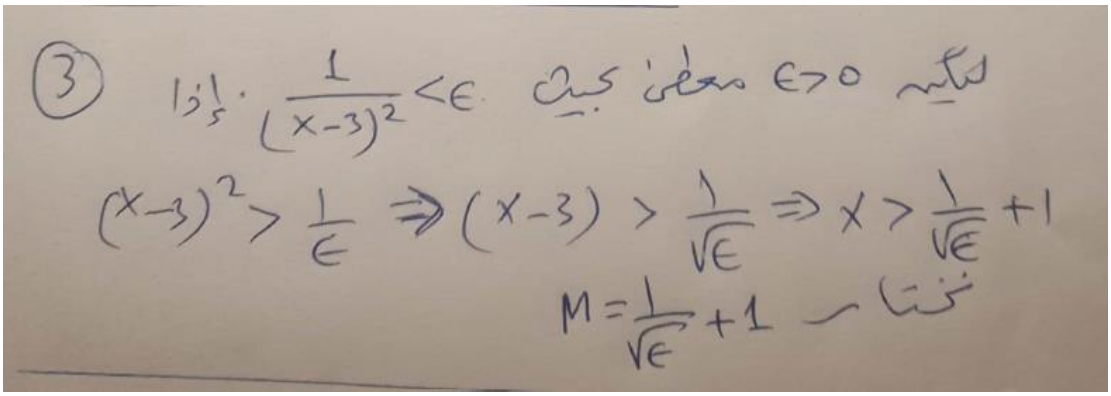
(ا) ⋆ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+2x+1}{3x^3+x^2}$



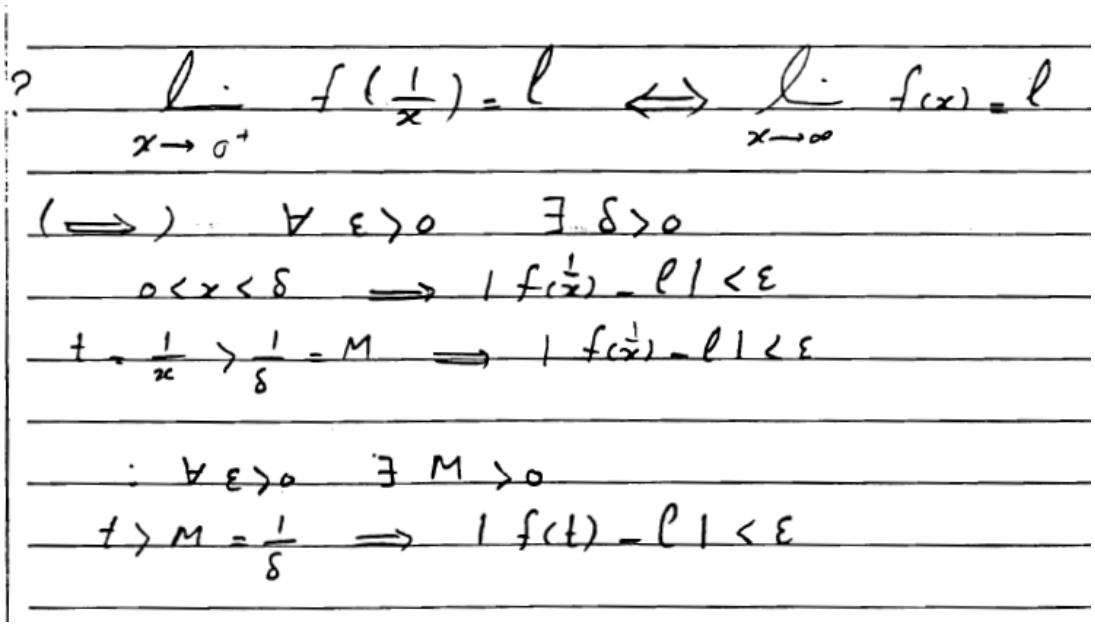
(ه) ⋆ $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$



3. ⋆ أثبت باستخدام التعريف $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$



4. ⋆ إذا كانت $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$، فأثبت أن $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.



$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K > 0$

$x > K > 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{K} = \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$t = \frac{1}{x}$

$0 < t < \delta \Rightarrow |f(\frac{1}{t}) - l| < \varepsilon$

$t \to 0^+$ $f(\frac{1}{t}) \longrightarrow l$

الباب السادس

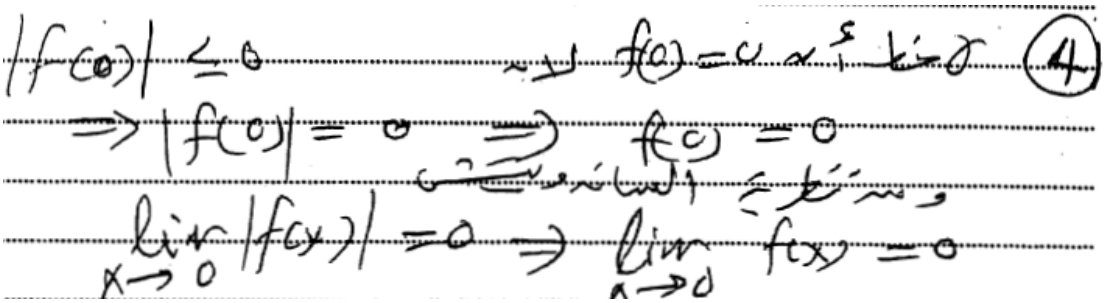
الاتصال

تمارين 6.1

4. ⋆ إذا كانت $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ تحقق

$$|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in (-1,1)$$

فأثبت أن f متصلة عند $x = 0$.



7. ⋆ إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، وكان

$$f(q) = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{Q}$$

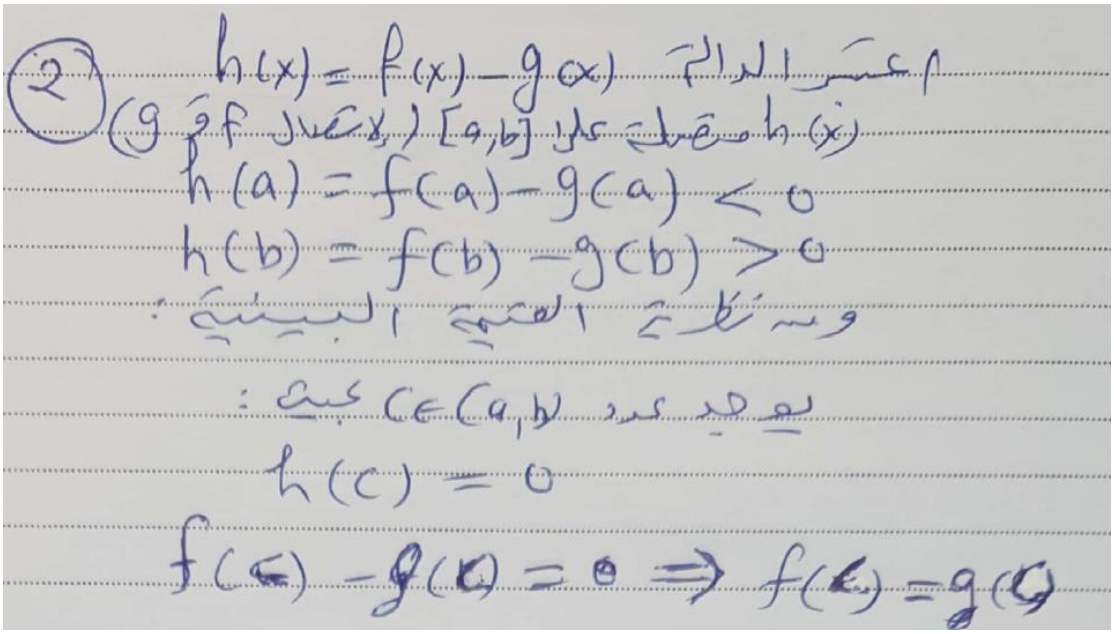
فأثبت أن

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

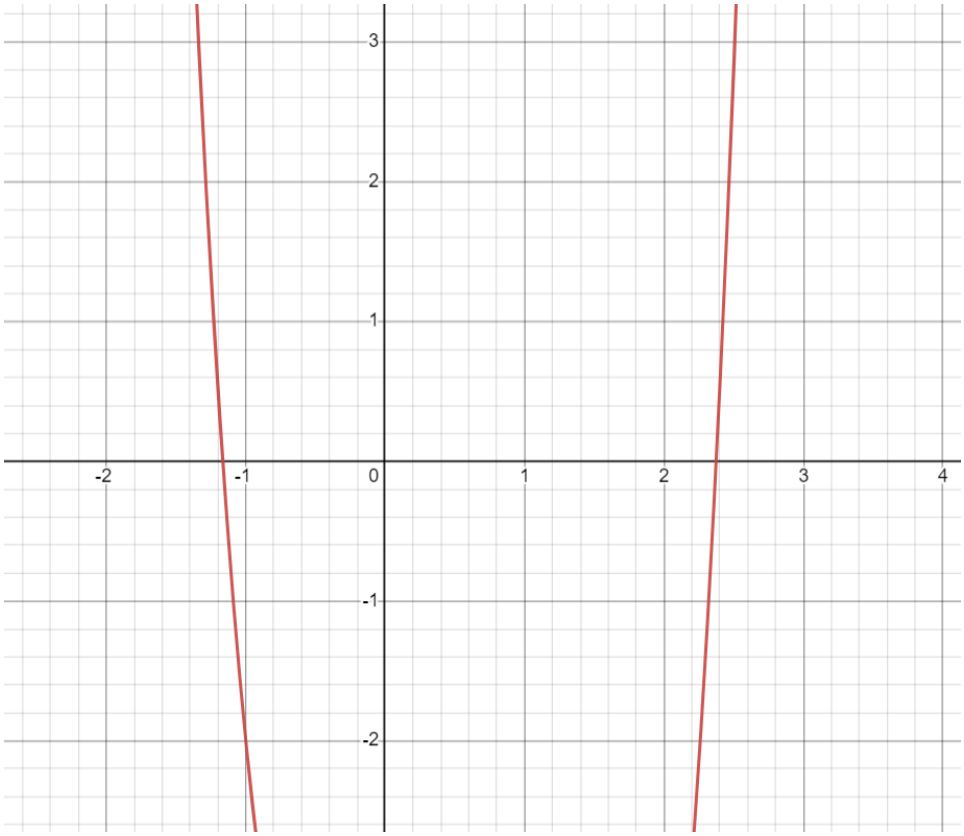
$\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, then for all $x \in \mathbb{R}$ there exist a sequence $(x_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ convergent to x and $x_n \neq x$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since $f(x_n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, then $f(x) = 0$.

تمارين 6.2

2. ⋆ إذا كانت $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دوالا متصلة، وكان $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$ فأثبت أنه يوجد $c \in (a,b)$ بحيث $f(c) = g(c)$.

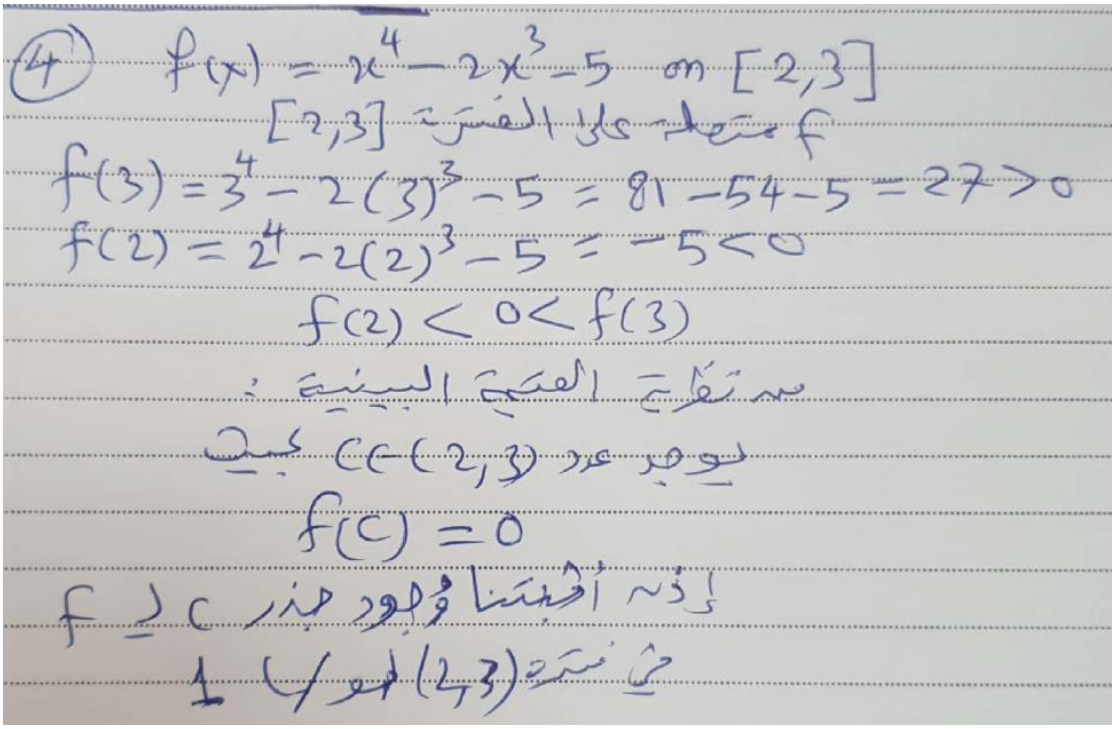


4. ⋆ عين فترة طولها 1 تحتوي على جذر للمعادلة $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$.

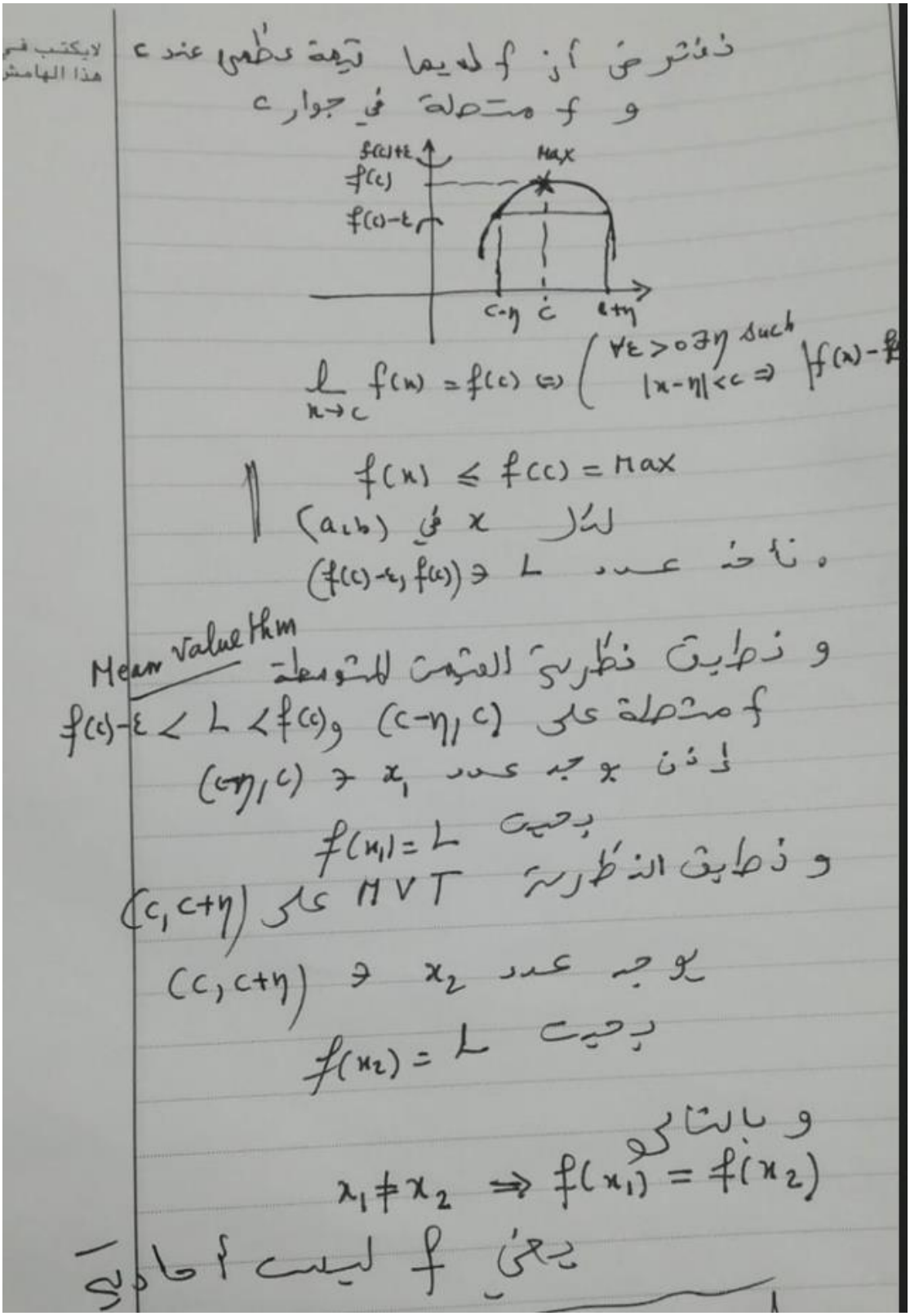


يوجد جذران حقيقيان للدالة أحدهما موجب و الآخر سالب

لندرس احدهما .. مثلا الموجب:



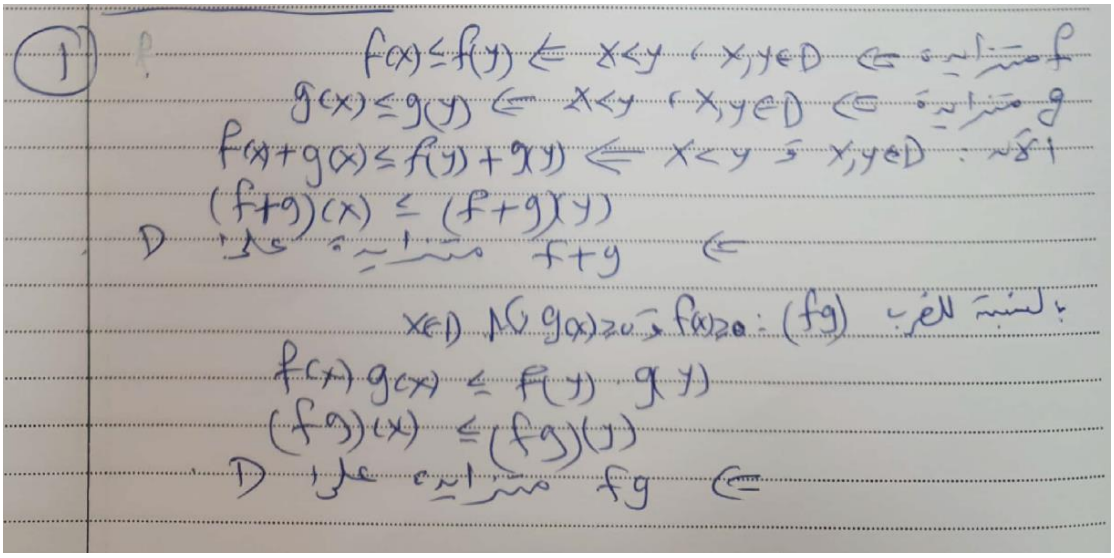
15. ⋆ إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة متصلة ولها قيمة قصوى عند نقطة $c \in (a,b)$، فأثبت أن f ليست أحادية.



تمارين 6.3

1. ⋆ إذا كانت $f, g : D \to \mathbb{R}$ متزايدتين، فأثبت أن $f + g$ متزايدة. ماذا عن fg؟

الحل:



إذا كانـــت f، g متزايدتين على D فأثبت أن $f+g$ متزايدة على D. إذا كانـــت بالإضـــافة إلى ذلك $f(x)\geq 0$، $g(x)\geq 0$ لكل $x\in D$ فأثبت أن $f\cdot g$ متزايدة على D.

لـــتكن $D=[0,1]$، $f(x)=x$، $g(x)=1-x$. أثبت أن كلاً من f و g دالة مطردة ولكن $f\cdot g$ ليست مطردة.

الحل:

$x, y \in [0,1]$ and $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$\Leftarrow f$ متزايدة

$x, y \in [0,1]$ and $x < y \Rightarrow -x > -y$

$\Rightarrow 1 - x > 1 - y$

$\Rightarrow g(x) > g(y)$

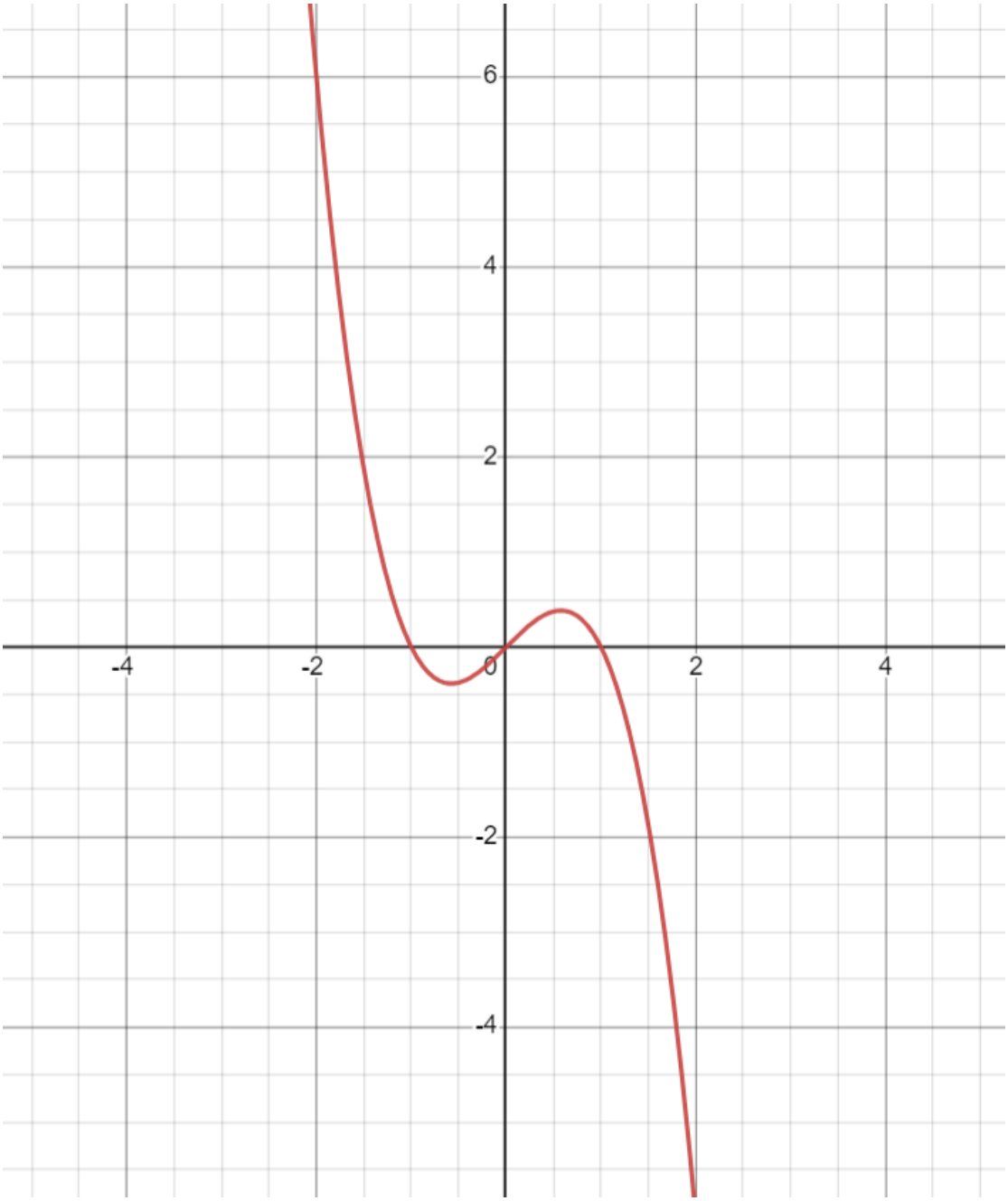
$\Leftarrow g$ متناقصة

لكنه الفرق:

$(f \cdot g)(x) = x(1-x)$

$= x - x^2$

ليست مطردة على $[0,1]$



تمارين 6.4

1. أثبت ان الدوال الآتية متصلة بانتظام على مجالها

(ا) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ⋆ على $[2,\infty)$.

• $g(x)=\sqrt[3]{x},\ D_g=\mathbb{R}$. g is uniformly continuous since g is uniformly continuous on $[-1,1]$ and for $x,y\geq 1$, $|g(x)-g(y)|\leq|x-y|$. $(x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy))$. The same result for $x,y\leq -1$.

(ج) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ ⋆ على $(0,\infty)$.

1) (ج) $\forall x,t \in (0,\infty) : \left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{t^2}{t+1}\right| =$

$$\left|\frac{x^2(t+1) - t^2(x+1)}{(x+1)(t+1)}\right| = \frac{|x^2t + x^2 - t^2x - t^2|}{(x+1)(t+1)}$$

$$= \frac{|xt(x-t) + x^2 - t^2|}{(x+1)(t+1)}$$

$$= \frac{|xt(x-t) + (x-t)(x+t)|}{(x+1)(t+1)}$$

$$= \frac{|x-t|(xt+x+t)}{x^2+x+t+1}$$

$$\leftarrow |x-t|(1) < \epsilon$$

إذن $\delta = \epsilon$ (تعتمد على ϵ فقط)

(د) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ★ على $(0,\infty)$

(د) اعتبر الدالة $g(x)$ على $[0,\infty)$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

g متصلة على $[0,\infty)$ (لماذا؟)

$g(x) = f(x)$ on $(0,\infty)$

$\Leftarrow f$ متصلة بانتظام على $(0,\infty)$

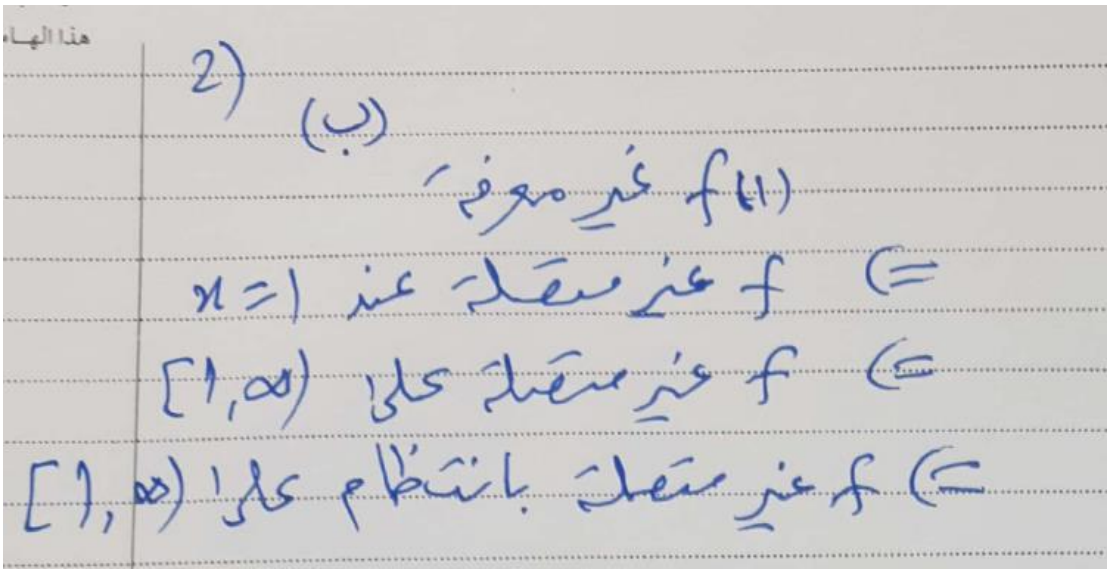
(مبرهنة 6.20 عند الاقتضاء)

مبرهنة 6.20

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على D . فإنه يمكن تمديد الدالة f لتصبح متصلة بانتظام على $\overline{D} = D \cup \widehat{D}$.

2. أثبت أن الدوال الآتية غير متصلة بانتظام على مجالها

(ب) ⋆ $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ على $[1, \infty)$



2. أي دالة متصلة بانتظام، فهي متصلة.

(ج) ⋆ $f(x) = x \sin x$ على $\mathbb{R}$.

$f(x) = x \sin x$ غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$

$x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$

$t_n = 2n\pi$

$x_n - t_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$f(x_n) - f(t_n) = (2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(2n\pi + \frac{1}{n})$

$- 2n\pi \underbrace{\sin 2n\pi}_{0}$

$= (2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n})$

$= 2n\pi \sin(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \underbrace{\sin(\frac{1}{n})}_{\text{bounded}} \longrightarrow 0$

$= 2\pi \frac{\sin(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} \longrightarrow 2\pi \not\longrightarrow 0$

$\frac{1}{n} \to 0$

(1) نأخذ $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$ و $x_n = 2n\pi$ بحيث $|y_n - x_n| = |\frac{1}{n}| \to 0$

$|f(y_n) - f(x_n)| = |(2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(2n\pi + \frac{1}{n}) - 2n\pi \sin(2n\pi)|$

$= |(2n\pi + \frac{1}{n})[\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0} \cos(\frac{1}{n}) + \underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} \sin\frac{1}{n}]|$

$= |(2n\pi + \frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n})| = |\frac{2n^2\pi + 1}{n} \sin(\frac{1}{n})|$

3. أثبت ان الدوال الآتية تحقق شرط ليبشتز على مجالها

(ا) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ⋆ على $[0, 5]$.

3) (أ)

$$|f(x)-f(t)| = |x^2+2x+3-t^2-2t-3|$$

$$= |(x^2-t^2)+2(x-t)| = |(x-t)(x+t)+2(x-t)|$$

$$= |(x-t)(x+t+2)| = |x-t| \cdot |x+t+2|$$

$$\leq |x-t| \cdot (|x|+|t|+|2|)$$

$$\leq |x-t| \ (5+5+2)$$

$$= 12\,|x-t|$$

(لأن $x, t \in [-5,5]$) $K = 12$ نختار

6. ⋆ إذا كانت كل من $f, g : D \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام ومحدودة، فأثبت أن fg متصلة بانتظام على D.

(i). $\exists K, M > 0$ $\quad |f(x)| \leq K \quad \forall x \in D$

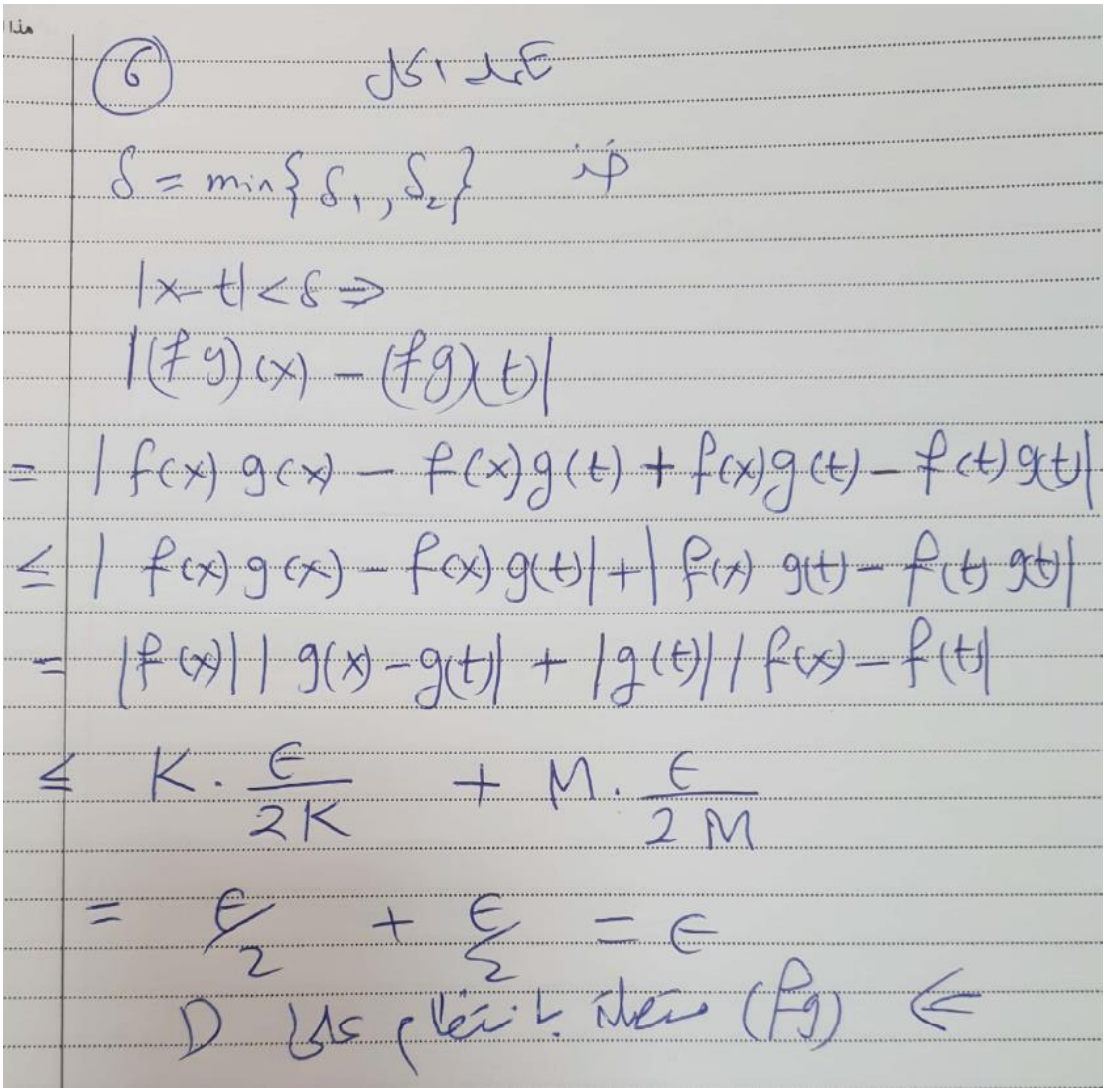
$|g(x)| \leq M \quad \forall x \in D$

(ii). $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_1(\varepsilon) > 0$

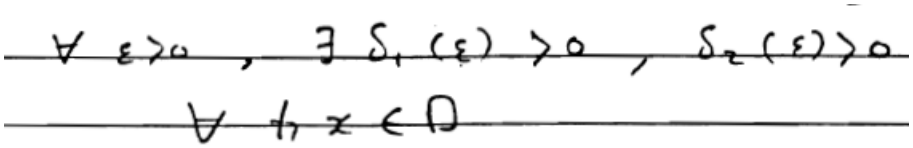
$\delta_2(\varepsilon) > 0$

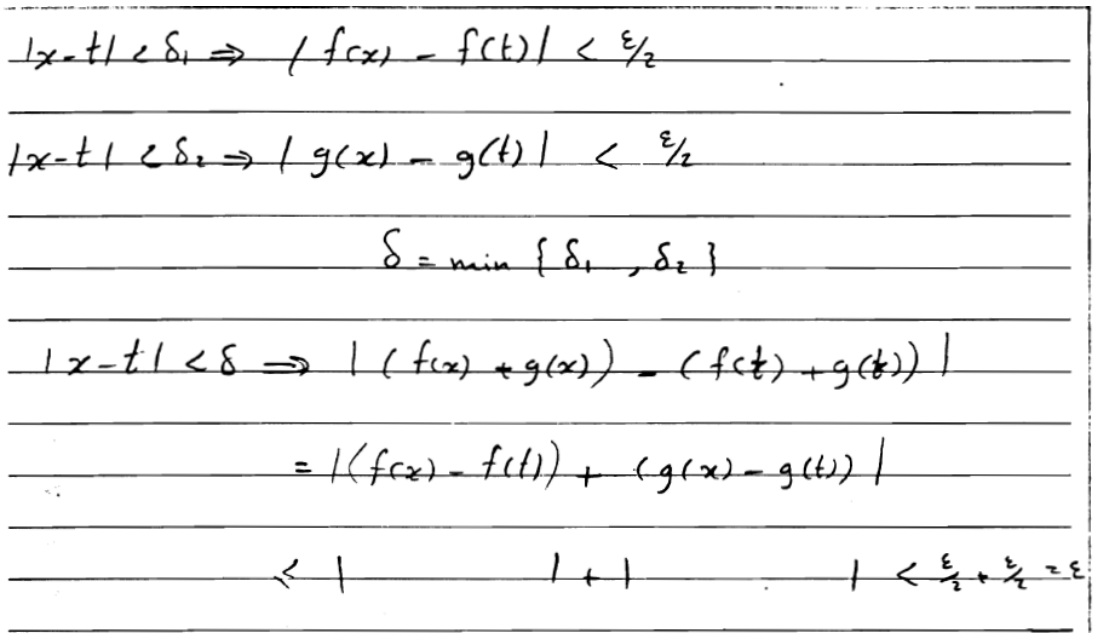
$|x-t| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x)-f(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

$|x-t| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x)-g(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$



14. ⋆ إذا كانت $f, g : D \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، فأثبت أن $f+g$ متصلة بانتظام على D. ثم أوجد مثالا يوضح أن fg ليست بالضرورة متصلة بانتظام على D.





مثال الضرب:

The function f defined by $f(x) = x$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}$ but f^2 is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$.

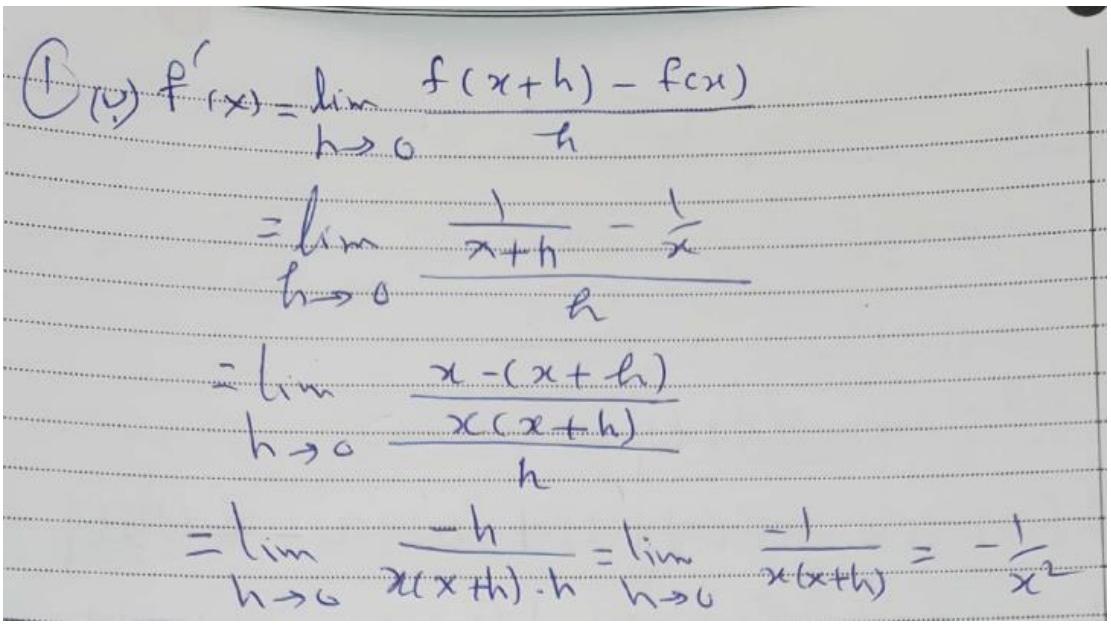
الباب السابع

الاشتقاق

تمارين 7.1

1. باستخدام التعريف أوجد مشتقات الدوال الآتية

(ب) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ ⋆



3. أوجد مجموعة النقاط التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.

(أ) $f(x) = |x^2 - 1|$ ⋆

• $f(x) = |x^2 - 1|$, $f'(x) = -2x$ if $|x| < 1$, $f'(x) = 2x$ if $|x| > 1$ and $f'(1)$ and $f'(-1)$ does not exist.

(ج) $f(x) = x|x|$ ⋆

$f(x) = x|x|$, $f'(x) = 2x$ if $x > 0$, $f'(x) = -2x$ if $x < 0$ and $f'(0) = 0$.

4. ⋆ أثبت أن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند $x = 0$، ثم أوجد $f'(0)$.

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. But $|f(x)| \leq x^2$ for all $x \in \mathbb{R}$, then $f'(0) = 0$.

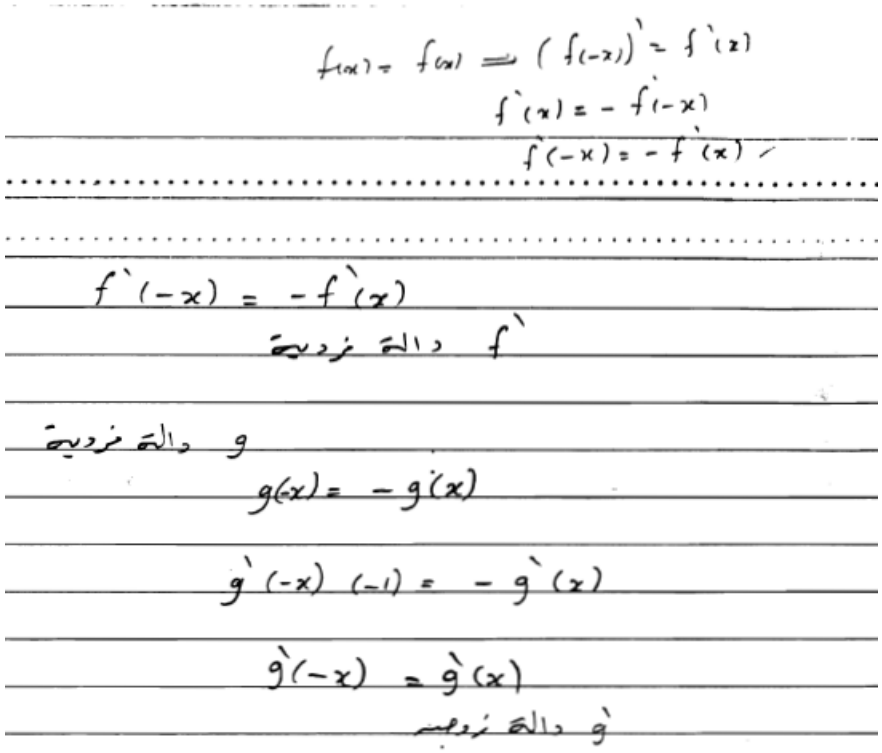
5. ⋆ إذا كانت f تحقق

$$|f(x)| \leq |x|^r$$

في جوار 0 وكان $r > 1$، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. But $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ and $\alpha > 1$, then $f'(0) = 0$.

9. ⋆ إذا كانت f قابلة للاشتقاق، فأثبت أن f' فردية إذا كانت f زوجية، و f' زوجية إذا كانت f فردية.



حل آخر:

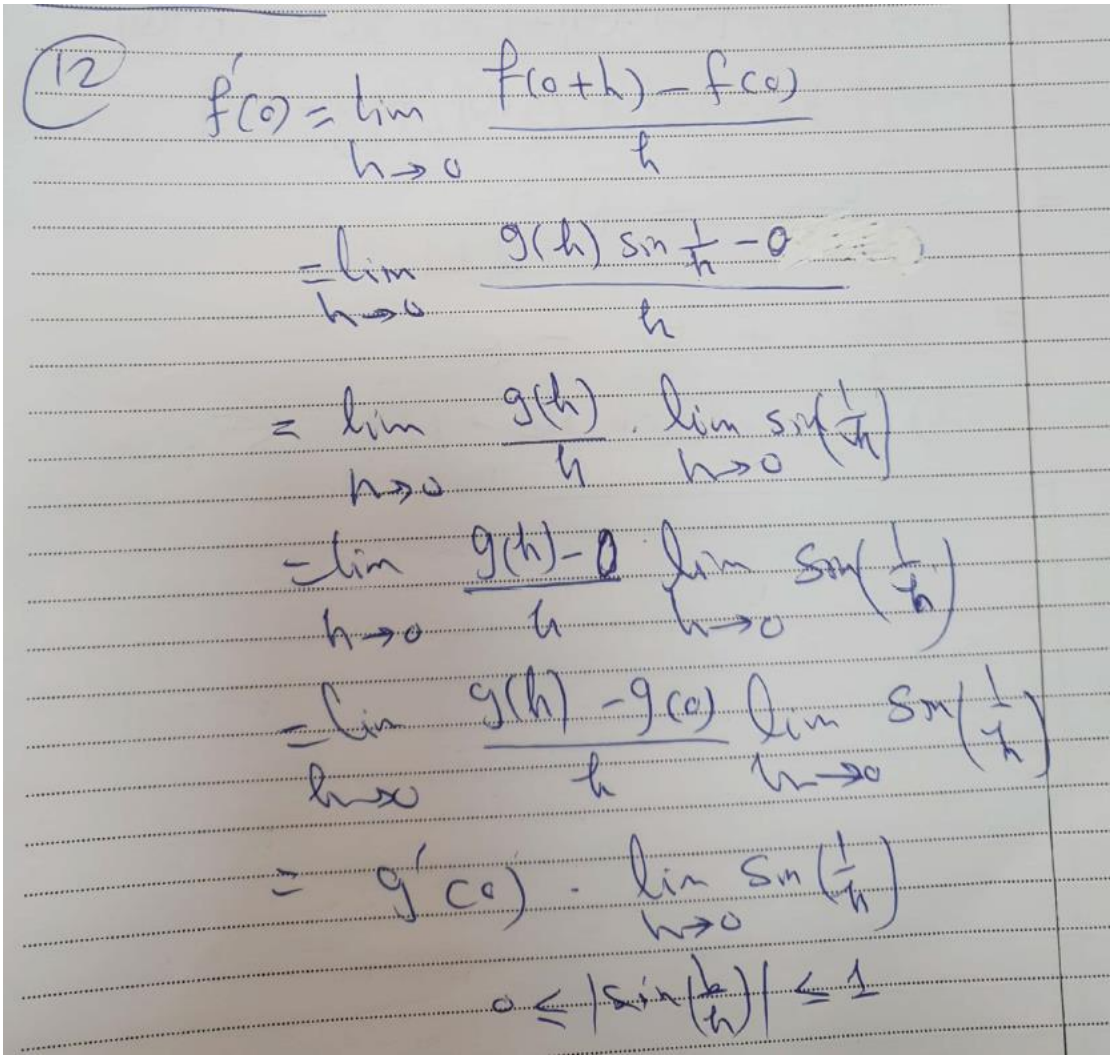
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

If f is even, $f'(-x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x)$. Then f' is odd.

If f is odd, $f'(-x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-f(x-h)+f(x)}{h} = f'(x)$. Then f' is even.

12. ⋆ إذا كانت $g(0) = g'(0) = 0$، فأوجد $f'(0)$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



تمارين 7.2

5. ⋆ أثبت أنه لكل $x, y \in \mathbb{R}$، فإن

$$|\cos x - \cos y| \le |x - y|$$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ نفرض أن $x < y$

$f(x) = \cos x$ على $[x,y]$

f متصلة على $[x,y]$ $\Leftarrow$ على $\mathbb{R}$

f قابلة للاشتقاق على (x,y) $\Leftarrow$ على $\mathbb{R}$

$\exists\ x < c < y$ $\Leftarrow$ حسب نظرية القيمة المتوسطة

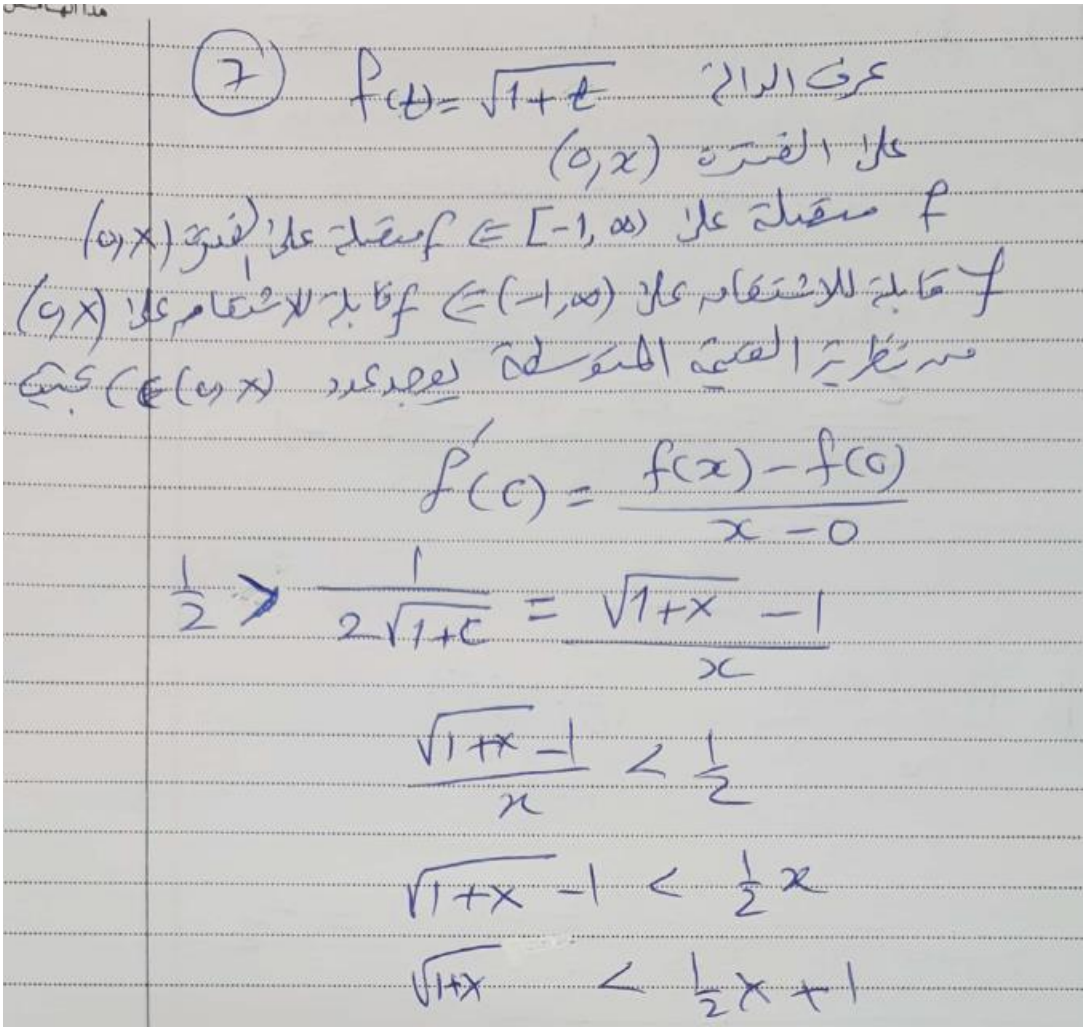
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) = -\sin c$$

$$\left| \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \right| = |-\sin x| \leq 1$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

7. ⋆ أثبت أن

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \forall\, x > 0$$



14. ⋆ باستخدام التعريف، أثبت أن الدالة $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ثم برهن وجود $c\in(0,1)$ بحيث

$$\sqrt{2}-1=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

(14) $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$: $c \in \mathbb{R}$ نأخذ

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(c+h)^2+1} - \sqrt{c^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{(c+h)^2+1} - \sqrt{c^2+1}\right)\left(\sqrt{(c+h)^2+1} + \sqrt{c^2+1}\right)}{h\left(\sqrt{(c+h)^2+1} + \sqrt{c^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^2+1-(c^2+1)}{h\left(\sqrt{(c+h)^2+1} + \sqrt{c^2+1}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2ch+h^2}{h\left(\sqrt{(c+h)^2+1} + \sqrt{c^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2c+h}{\left(\sqrt{(c+h)^2+1} + \sqrt{c^2+1}\right)} = \frac{2c}{2\sqrt{c^2+1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ $f'(c)$ موجودة $\Leftarrow$ f قابلة للاشتقاق عند أي عدد حقيقي c.

$f \in \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ لتكن الدالة f على $(0,1)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \Leftarrow f$ قابلة للاشتقاق على $(0,1)$

حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد $c \in (0,1)$ بحيث:

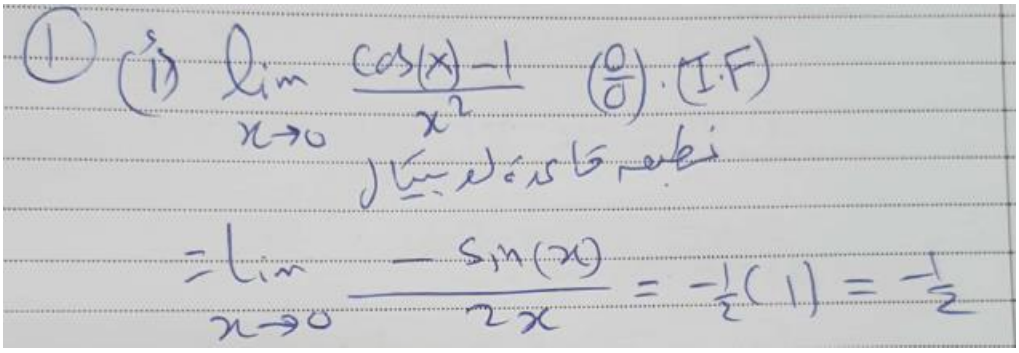
$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

تمارين 7.3

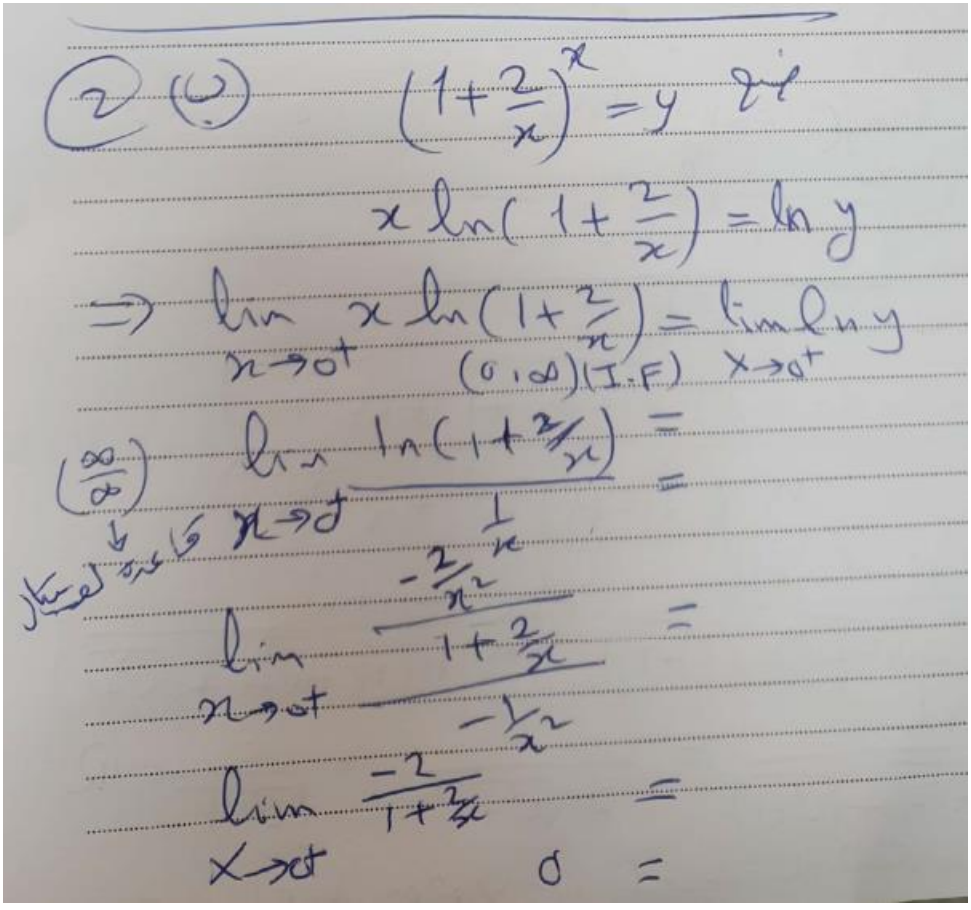
1. أوجد النهايات التالية

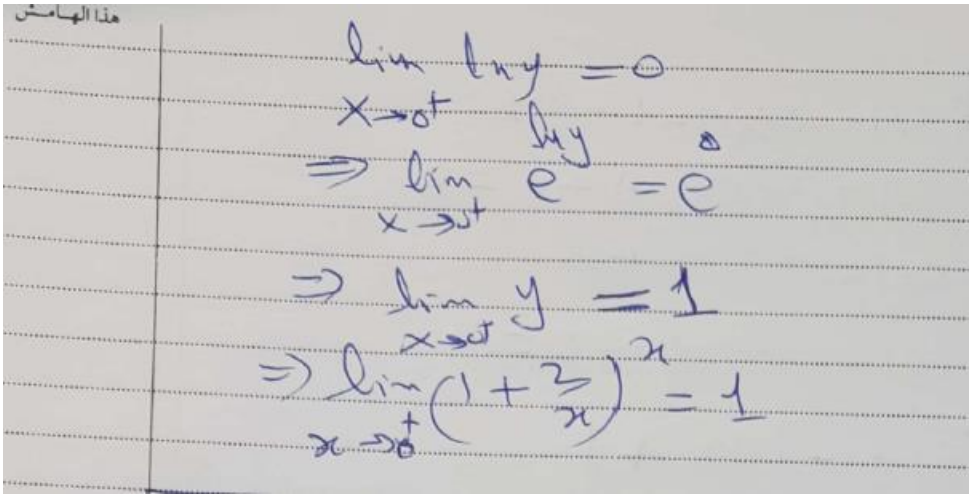
(أ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ ⋆



2. أوجد النهايات التالية

(ب) $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ ⋆

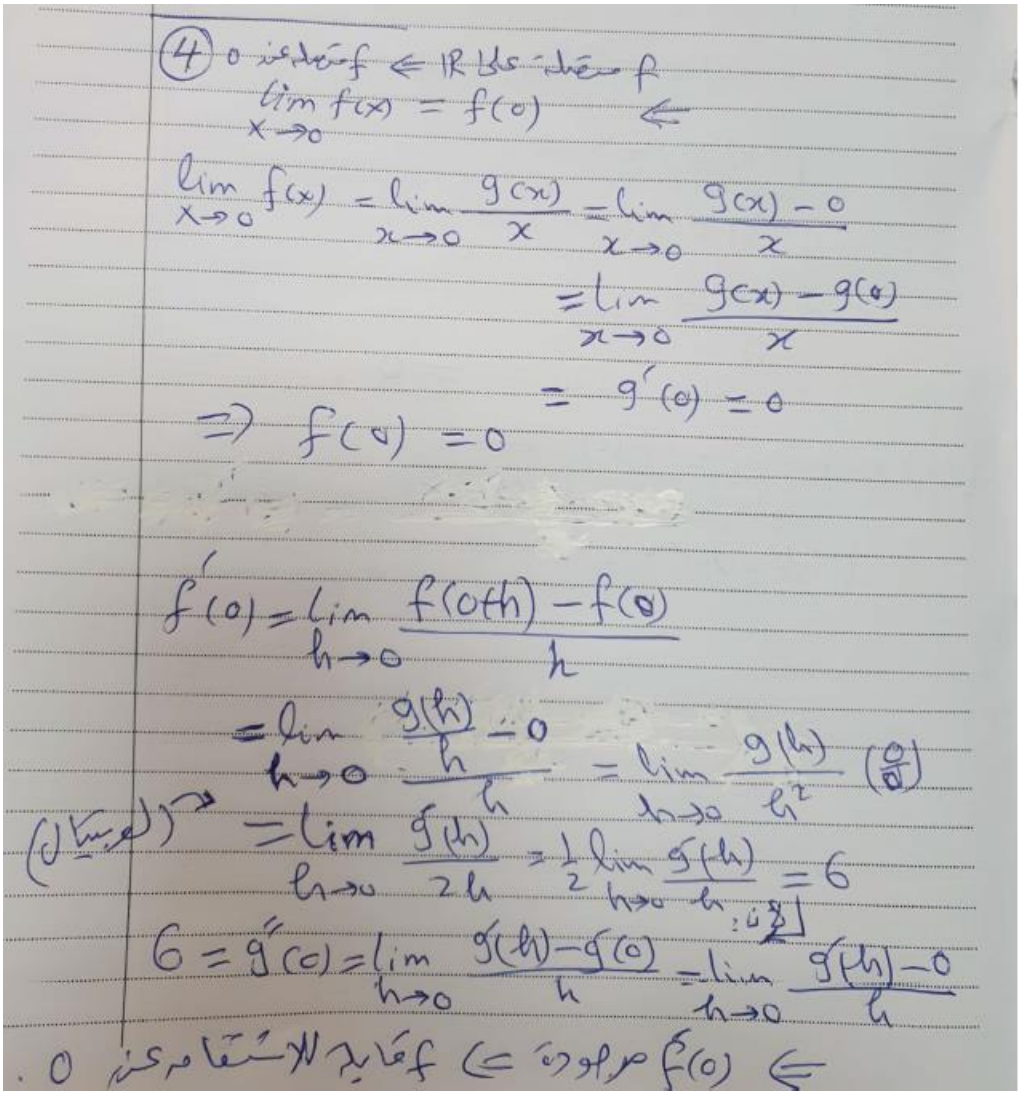




4. ⋆ إذا كانت $g \in C^2(\mathbb{R})$ و $g(0) = g'(0) = 0$ و $g''(0) = 6$، وكانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متصلة ومعرفة بالعلاقة

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}, \qquad x \neq 0$$

أوجد $f(0)$، ثم بين هل f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.



8. ⋆ إذا كانت $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}),\ g(x) = \sin x$، بين أن $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ موجودة، ولكن $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$\sin x \sim x$ when $x \to 0$

2

$$= \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1/x)}{(1/x)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx} x^2 \sin\frac{1}{x}}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

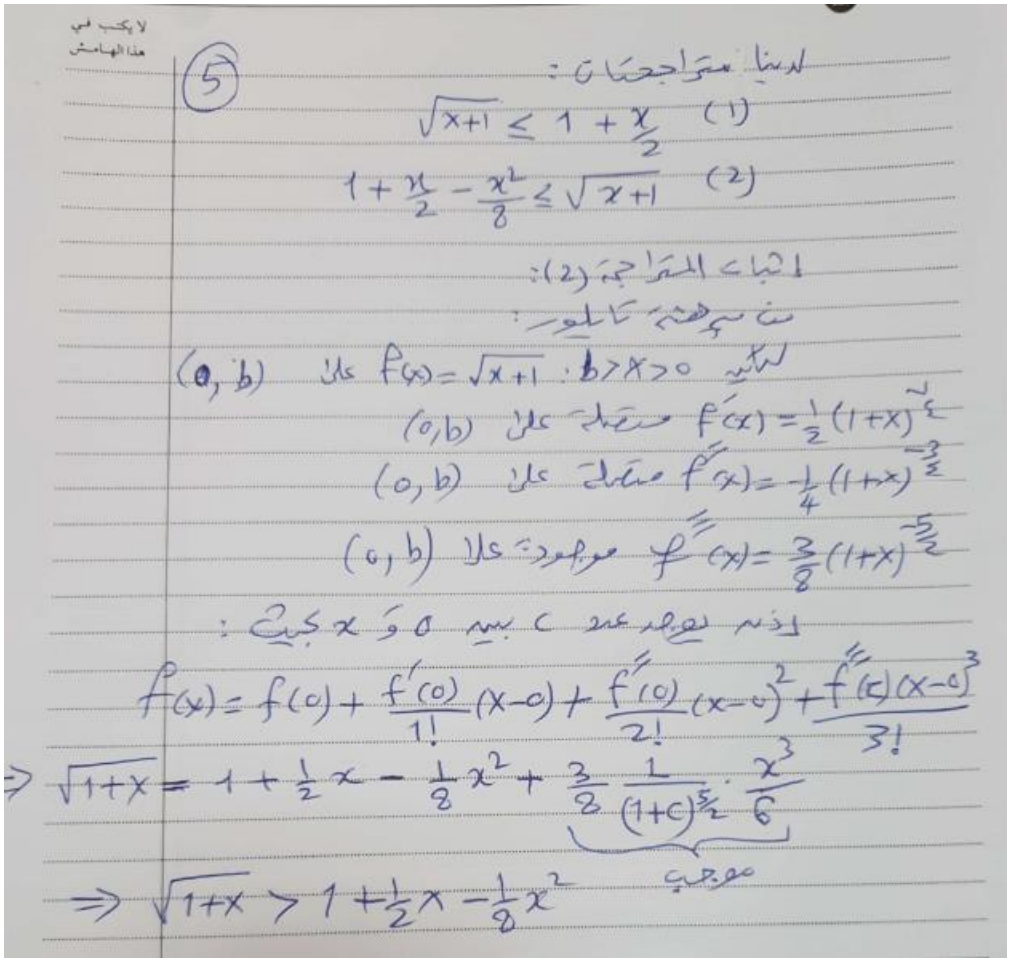
$$= \lim_{x\to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

does not exist

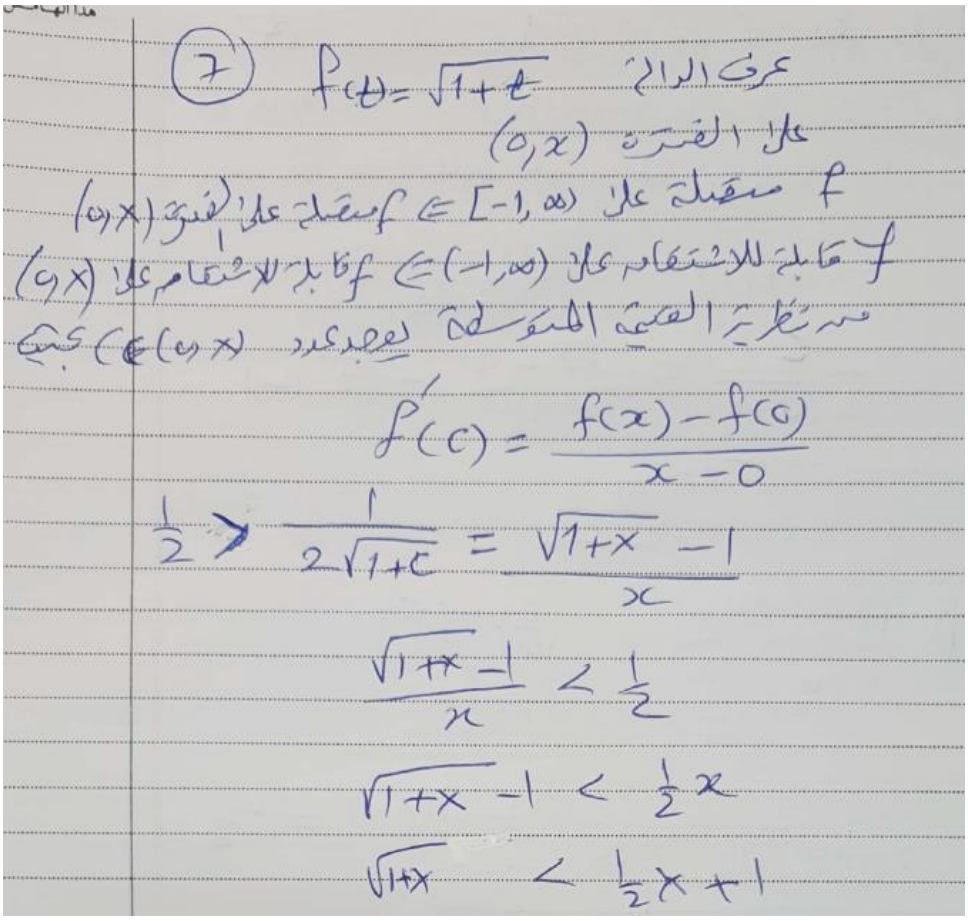
تمارين 7.4

5. ⋆ أثبت أنه لكل $x > 0$، فإن

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$$



إثبات المتراجحة (1):



6. حدد فيما إذا كانت $f(0)$ قيمة عظمى محلية، صغرى محلية، ليست قيمة قصوى

(ب) ⋆ $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$

مبرهنة 7.22

إذا كانت

$$f'(c)=f''(c)\ldots,f^{(m-1)}(c)=0$$

و

$$f^{(m)}(c)\neq 0$$

وكان

1. m عددا فرديا، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية
2. m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c)<0$ ، فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية
3. m عددا زوجيا وكانت $f^{(m)}(c)>0$ ، فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية

هذا الهامش

6 (ب)

$f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$

$f'(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$

$f''(x) = -\sin x + x$

$f''(0) = -\sin(0) + 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos(x) + 1$

$f'''(0) = -\cos(0) + 1 = 0$

$f^{(4)}(x) = +\sin(x)$

$f^{(4)}(0) = +\sin(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos(x)$

$f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$,

$m = 5$ عدد فردي $\in f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية

(أي ليست عظمى محلية

وليست صغرى محلية)