

# المحاضرة العاشرة

## النهايات العظمى والصغرى وتطبيقاتها الاقتصادية

إن النقاط التي تتحول عندها الدالة من دالة تزايدية إلى دالة تناقصية أو العكس ، من دالة تناقصية إلى تزايدية تسمى نقاط دوران وهذه النقاط قد تكون نقاط نهاية عظمى وصغرى ولمعرفة ما إذا كان يوجد نقاط نهايات عظمى أم صغرى يتم اتباع اختبار رياضي لذلك

## قواعد وتعريف

**نقطة النهاية العظمى :** تكون أعلى من أي نقطة مجاورة لها سواء من جهة

اليمين أو من جهة اليسار وهي النقطة التي عندها تتحول الدالة من دالة تزايدية إلى تناقصية أي يتحول ميل المماس من موجب إلى سالب وعند نقطة النهاية العظمى يكون:

$$\frac{دص}{دس} = \text{الصفء}$$

أي أن المماس يوازي محور السينات وهذا يمثل شرط ضروري والشرط الكافي يتمثل في

$$\text{أن } \frac{د2ص}{2دس} > \text{الصفء أي (كمية سالبة)}$$

**نقطة النهاية الصغرى :** تكون أدنى من أي نقطة مجاورة لها سواء من جهة

اليمين أو من جهة اليسار وهي النقطة التي عندها تتحول الدالة من دالة تناقصية إلى دالة تزايدية أي يتحول ميل المماس من سالب إلى موجب وعند نقطة النهاية الصغرى يكون :

$$\frac{دص}{دس} = \text{الصفء}$$

أي أن المماس يوازي محور السينات وهذا يمثل شرط ضروري أيضا كما هو الحال في

$$\text{نقطة النهاية العظمى والشرط الكافي يتمثل في أن } \frac{د2ص}{2دس} < \text{الصفء أي (كمية موجبة)}$$

## خطوات تحديد النهايات العظمى والصغرى

- ١ - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة ويرمز لها  $d$  /  $د$  س
- ٢ - يتم مساواة المشتقة الأولى بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة ( قيم  $s$  ) وهي تلك النقط التي يكون عندها إما نهاية عظمى للدالة أو نهاية صغرى .
- ٣ - يتم إيجاد المشتقة الثانية ويرمز لها لها  $v$  " أو

$\frac{d^2}{ds^2}$

$د$  س

- ٤ - تحديد نوع النهاية ( عظمى - صغرى ) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة .: يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية موجبة .: يعني ذلك وجود نهاية صغرى للدالة

- 5 - إيجاد نقطة النهاية ، أي إيجاد الإحداثي السيني والصادي للنقطة، حيث يتم إيجاد قيمة  $v$  بالتعويض بقيمة  $s$  التي تم الحصول عليها في الخطوة الثانية في الدالة الأصلية .

أي أن :

أ- شروط النهاية العظمى (تعظيم ربح):

① المشتقة الأولى (التفاضل الأول) = صفر.

② المشتقة الثانية (التفاضل الثاني) (سالبة)  $>$  صفر

ب- شروط النهاية الصغرى (تقليل تكاليف):

① المشتقة الأولى (التفاضل الأول) = صفر.

② المشتقة الثانية (موجب)  $<$  صفر

## تمرين ١

تقوم شركة الخزف السعودي ببيع س وحدة في الشهر بسعر قدره  
ث = ٢٠٠ - ٠,٢ س وكانت التكاليف الكلية تتحدد بالعلاقة التالية:  
ت = ٥٠ س + ١٠٠٠٠٠

## المطلوب

١. إيجاد عدد الوحدات المنتجة س التي تحقق أعلى ربح .
٢. تحديد قيمة أعلى ربح .
٣. إيجاد سعر بيع الوحدة عند نقطة النهاية العظمى للربح.

## الحل

١. لتحديد عدد الوحدات المنتجة س نوجد الآتي:
  - الربح ( ر ) = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية
  - الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة
  - $ر = ث \times س = (٢٠٠ - ٠,٢ س) \times س$
  - $ر = ٢٠٠ س - ٠,٢ س^٢$  دالة الإيراد الكلي

## دالة الربح

- $ر = ٢٠٠ س - ٠,٢ س^٢ - (١٠٠٠٠٠ + ٥٠ س)$
- $ر = ١٥٠ س - ٠,٢ س^٢$

إيجاد عدد الوحدات المنتجة التي تحقق أقصى ربح

- لتعظيم الربح نوجد المشتقة الأولى بالنسبة لدالة الربح
- $= - ٠,٤ س + ١٥٠$
- بمساواة المشتقة الأولى بالصفر
- $٠ = ١٥٠ - ٠,٤ س$
- $١٥٠ = ٠,٤ س$

إيجاد قيمة أقصى ربح وسعر بيع الوحدة في ظل النهاية العظمى للربح

- المشتقة الثانية =  $-0,4 >$  صفر نهاية عظمى
- أقصى ربح ممكن:
- بالتعويض في دالة الربح نجد أن أقصى ربح يمكن تحقيقه هو:  
 $R = -0,2(375)^2 + 150(375) - 10000 = 18125$  ريال
- تحديد سعر بيع الوحدة في ظل النهاية العظمى للربح:  
سعر بيع الوحدة = ث =  $200 - 0,2(375) = 125$  ريال

## تمرين ٢

إذا علمت أن دالة الربح اليومية لمطعم وجبات سريعة هي  $\epsilon(s) = -s^2 + 6s - 1$  فأوجد السعر الذي يحقق أكبر ربح؟

### الحل

أولاً: إيجاد المشتقة الأولى للدالة ومساواتها بالصفر  $\leftarrow \epsilon(s) = -s^2 + 6s - 1 = \text{صفر}$

$$-s^2 + 6s - 1 = \text{صفر}$$

$$\frac{-6}{-2} = s = \frac{1}{-2}$$

$$s = 3$$

ثانياً: إيجاد المشتقة الثانية للدالة  $\leftarrow \epsilon''(s) = -2$

∴ الإشارة سالبة

∴ هناك قيمة عظمة للربح عندما  $s = 3$



## الواجب

### تمرين ١

إذا كانت تكاليف إنتاج (س) وحدة إنتاج من منتج معين تتحدد

$$\text{بالعلاقة التالية: } ت = ٢٠ - ٦س + س^٢$$

حيث (ت) تمثل تكاليف الإنتاج بالمليون ريال و المطلوب:

١. تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق تذييه تكاليف الإنتاج عند أدنى حد لها.

٢. تحديد أدنى مستوى ممكن من التكاليف.

٣. تحديد التكلفة المتوسطة للإنتاج لكل وحدة

### تمرين ٢

إذا كانت تكاليف إنتاج (س) مليون وحدة إنتاج من منتج معين

تتحدد بالعلاقة التالية :

$$ت = ٣٥ - ٨س + س^٢$$

حيث (ت) تمثل تكاليف الإنتاج بالمليون ريال

المطلوب

١ - قدر كمية الإنتاج (س) التي تحقق أدنى تكاليف (النهاية

الصغرى للتكاليف)

٢ – أدنى مستوى للتكاليف .

٣ – التكاليف المتوسطة لإنتاج الوحدة عند أدنى مستوى للتكاليف .

### تمرين ٣

شركة هابي عرب لإنتاج المشايح يمكنها أن تبيع (س) وحدة بسعر (ع) يعطى بالمعادلة

$$ع = ٢٠٠ - ٢س$$

وكانت التكلفة الكلية تحدد بالمعادلة  $ت = ١٠٠٠٠٠ + ٥٠س$

فما هو عدد الوحدات (س) التي تحقق أكبر ربح ممكن وما مقدار الربح وما هو السعر؟