المحاضرة السابعة

المصفوفات وتطبيقها الاقتصادية

تعرف المصفوفة بأنها عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة وموضوعة داخل قوسين أما (   ) أو [ ] كالآتى :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{bmatrix}$$

أ١١ يسمى عنصراً فى المصفوفة أ ويقع فى الصف الأول والعمود الأول.

أ٢١ يسمى عنصراً فى المصفوفة أ ويقع فى الصف الأول والعمود الثانى.

أ٣١ يسمى عنصراً فى المصفوفة أ ويقع فى الصف الثالث والعمود الأول.

أى أن الرقم الأول فى دليل العنصر يعبر عن رقم الصف والرقم الثانى يعبر عن رقم العمود. كما أن العناصر أ١١، أ٢٢، أ٣٣ تسمى عناصر القطر الرئيسى.

لا يشترط أن يكون عدد الصفوف = عدد الأعمدة كما هو الحال في المحددات وليس للمصفوفة قيمة جبرية كما هو الحال في المحدد

قواعد وتعاريف وملاحظاتك

أنواع المصفوفات

١ - المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة.

فهى تكون من الرتبة (٢ × ٢) أو (٣ × ٣) أو (٤ × ٤) أو (م × ن) ، حيث م = ن

فعلى سبيل المثال فإن:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{bmatrix}$$ **مصفوفة مربعة من الدرجة (٢×٢)**

$ب = \begin{bmatrix} ب_{11} & ب_{21} & ب_{31} \\ ب_{12} & ب_{22} & ب_{32} \\ ب_{13} & ب_{23} & ب_{33} \end{bmatrix}$ **مصفوفة مربعة من الدرجة (٣×٣)**

$جـ = \begin{bmatrix} جـ_{11} & جـ_{21} & جـ_{31} & جـ_{41} \\ جـ_{12} & جـ_{22} & جـ_{32} & جـ_{42} \\ جـ_{13} & جـ_{23} & جـ_{33} & جـ_{43} \\ جـ_{14} & جـ_{24} & جـ_{34} & جـ_{44} \end{bmatrix}$ **مصفوفة مربعة من الدرجة (٤×٤)**

٢ - المصفوفة المستطيلة : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف لا يساوى عدد الأعمدة.

$أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \\ أ_{13} & أ_{23} \end{bmatrix}$ **مصفوفة مستطيلة من الدرجة (٣×٢)**

$ب = \begin{bmatrix} ب_{11} & ب_{21} & ب_{31} & ب_{41} \\ ب_{12} & ب_{22} & ب_{32} & ب_{42} \\ ب_{13} & ب_{23} & ب_{33} & ب_{43} \end{bmatrix}$ **مصفوفة مستطيلة من الدرجة (٣×٤)**

٣ – المصفوفة المتماثلة: وهي مصفوفة مربعة إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف لكان الناتج هو ذات المصفوفة الأصلية وذلك لتماثل العناصر المتناظرة أعلى وأسفل القطر الرئيسي.

مثال :

المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

مبدول المصفوفة $أ' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

واضح أن : أ = أ'

إذن : أ **تسمى مصفوفة متماثلة.**

٤ **مصفوفة الوحدة :** وهى مصفوفة مربعة كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي يساوى الواحد الصحيح، وباقي عناصر المصفوفة أصفار. ويرمز لها بالرمز I مثال ذلك :

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ويرمز لها بالرمز I٢ .

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ويرمز لها بالرمز I٣ .

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ويرمز لها بالرمز I٤ .

٥ - **المصفوفة المحورة (مدور المصفوفة):** هي المصفوفة الناتجة من استبدال صفوف مصفوفة ما بأعمدتها وأعمدتها بصفوفها.

مثال : المصفوفة ب= $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

مبدل المصفوفة هو : $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

إيجاد معكوس (مقلوب) المصفوفة :

يجب توافر شرطين للمصفوفة وهما :

١ – أن تكون المصفوفة مربعة

٢ – ان يكون قيمة محدد المصفوفة لا يساوي الصفر

مقلوب المصفوفة(٢×٢) =

{ 1 / محدد المصفوفة } × { *المصفوفة الأصلية بعد التبديل*
عناصر القطر الرئيسي وعكس
إشارات عناصر القطر الفرعي }

تمارين محلولة

العمليات الحسابية للمصفوفات

• جمع و طرح وضرب المصفوفات:

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات ، ويشترط لجمع أو طرح المصفوفات أن تكون من نفس الدرجة على أن يتم جمع العناصر المتناظرة جمعاً جبرياً.

مثال

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix} = \text{ج} \quad ، \quad \begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \text{ب} \quad ، \quad \begin{bmatrix} 3 & 2- & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1- & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فأوجد:

١ - أ + ب ٢- ب - جـ ٣- ٢ أ – ٣ ب + جـ

الحل:

١- أ + ب =

$$\begin{bmatrix} 10 & 5- & 6 \\ 12 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2- & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1- & 1 \end{bmatrix}$$

٢- ب - جـ =

$$\begin{bmatrix} 2 & 4- & 3 \\ 1- & 1- & 3 \\ 3- & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

٣- ٢أ - ٣ب + جـ =

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} 3- \begin{bmatrix} 3 & 2- & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1- & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 7- & 5 & 9 \\ 1 & 12- & 5- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21- & 9 & 3- \\ 24- & 3 & 0 \\ 9- & 12- & 6- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4- & 10 \\ 8 & 2 & 12 \\ 4 & 2- & 2 \end{bmatrix} =$$

مثال٢ :

إذا كان:

أ = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، **ب =** $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

(i) أوجد مبدول المصفوفة أ′ ، ب′

(ii) أثبت أن : (أ′ + ب′) = (أ + ب)′

الحل :

(i)

أ′ = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، **ب′ =** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) أ′ + ب′ = (أ + ب)′

الطرف الأيمن = أ′ + ب′

= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

الطرف الأيسر = (أ + ب)′

(أ + ب) = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

(أ + ب)′ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

وبالتالى فإن:

أ′ + ب′ = (أ + ب)′

مثال (٣) :

إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

فاحسب : ٣ أ - ٥ ب + ٣ I

الحل :

٣ أ - ٥ ب + ٣ I =

$$= ٣\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 & -15 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & -9 \\ 42 & 26 \end{bmatrix}$$

مثال (٤) :

أ = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

أثبت أن : أ′ + ب′ + جـ′ = (أ + ب + جـ)′

الحل :

أ = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ⇔ أ′ = $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ⇔ ب′ = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ⇔ جـ′ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

الطرف الأيمن = أ′ + ب′ + جـ′

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 13 & -6 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيسر = أ + ب + جـ

$$\left(\begin{bmatrix}6- & 4\\13 & 4\end{bmatrix}\right)' = \left(\begin{bmatrix}3- & 1\\6 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4- & 0\\5 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1-\end{bmatrix}\right)' =$$

(أ + ب + جـ)′ = $\begin{bmatrix}4 & 4\\13 & 6-\end{bmatrix}$

أى أن : أ′ + ب′ + جـ′ = (أ + ب + جـ)′

تمارين (واجب)

تمرين ١

إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix}3 & 3- & 5\\4 & 1 & 6\\3 & 1- & 1\end{bmatrix}$ ، **ب =** $\begin{bmatrix}7 & -1 & 1\\5 & 1- & 1\\3 & 4 & 2\end{bmatrix}$ ، **جـ =** $\begin{bmatrix}5 & 1 & 2-\\9 & 0 & 3-\\6 & 2 & 1-\end{bmatrix}$

أوجد

- **أ + ب + جـ**
- **أ – جـ**
- **ب + جـ**
- **٢أ + ٥ب - ٢جـ**
- **أ′ + ب′ + جـ′**
- **أثبت أن أ′ + ب′ + جـ′ = (أ + ب + جـ)′**