المحاضرة الرابعة

حل المعادلات الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية

١- المعادلات الخطية في متغير واحد وتطبيقاتها

المعادلة الجبرية في متغير واحد وليكن المتغير (س) هي صيغة تعبر عن علاقة التساوي بين تعبيرين جبريين في (س) ويطلق على المتغير في المعادلة لفظ المجهول

من أمثلة المعادلات الخطية في متغير واحد

- ٣س -٣ = ٩-٦س
- ٢ص-٥=٨-٣ص

مثال ١

بفرض أن ثمن الوحدة (ث) بمئات الريالات من منتج معين يتحدد بالمعادلة التالية

٥ ث – ٣ [٢ ث – ٤ (ث-٤)] = -٤

المطلوب إيجاد ثمن الوحدة من تلك السلعة ث ؟

الحل /

٥ ث – ٣ [٢ ث – ٤ (ث-٤)] = -٤

٥ ث – ٣ [٢ث – ٤ث + ١٦] = -٤

٥ث – ٦ث +١٢ث – ٤٨ = -٤

٥ث - ٦ث + ١٢ث = -٤+٤٨

١١ ث = ٤٤

لحل المعادلة الخطية من الدرجة الأولى في متغير واحد نقوم بما يلي :

نتخلص من الكسور ثم نتخلص من الأقواس إن وجدت

معنى معادلة من الدرجة الأولى أي التي لها أس ١ فقط مثل ث و س و ك أما إذا وجد فيها $س^2$ فإنها من الدرجة الثانية

لاحظ أول خطوة تخلصنا من القوس الصغير بضرب -٤ في ث و -٤ في -٤

بعد ما تخلصنا من القوس الصغير نتخلص من القوس الكبير بضرب -٣ في ٢ث و -٣ في –٤ث و -٣ في +١٦

بعد ماتخلصنا من الأقواس فقط علينا أن نضع المجاهيل في طرف والمعاليم في الطرف الآخر كما هو موضح هنا مع تغيير الإشارات إذا نقلنا معلوم أو مجهول إلى الطرف الآخر انظر نقلنا ٤٨ إلى جانب المعاليم واستبدلنا إشارته بموجب

نقسم المعلوم على معامل المجهول

ضربناها بـ ١٠٠ لان في السؤال
يقول ثمن الوحدة بمئات الريالات

ث = $\frac{44}{11}$ = ٤

ثمن الوحدة = ث = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ ريال

مثال ٢

إذا تحدد المنفق على الدعاية بإحدى المؤسسات التجارية بجدة بمبلغ س آلف ريال أسبوعياً حيث تتحدد قيمة التغير س وفقاً للمعادلة التالية :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4س} = \frac{1}{3} + \frac{1}{س}$$

أوجد قيمة المنفق على الدعاية بتلك المؤسسة ؟

الحل /

نوجد قيمة المتغير س بحل المعادلة المعطاة كما يلي :

نتخلص من الكسور بضرب المعادلة × المضاعف المشترك البسيط وهو ١٢س

حيث ١٢ س $(\frac{1}{3} + \frac{1}{س})$ = ١٢ س $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4س})$

نأخذ المضاعف المشترك الأصغر للمقامات كالتالي
نضاعف الأعداد حتى نصل إلى قيمه موحده

س =
٢س، ٣س، ٤س، ٥س، ٦س، ٧س، ٨س، ٩س، ١٠س،
١١س، ١٢س

٣ = ٦ ، ٩ ، ١٢

٤س = ٨س ، ١٢س

٢ = ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢

حيث ١٢ + ٤س = ٩ + ٦س

نجعل الحدود التي تحتوي على المجهول س
في الطرف الأيمن وبقية الحدود في الطرف الأيسر

٤س ــ ٦س = ٩ ــ ١٢

-٢س = -٣

س = $\frac{-3}{-2}$ = $\frac{3}{2}$

المنفق على الدعاية = س × ١٠٠٠

= $\frac{3}{2}$ × ١٠٠٠ = ١٥٠٠ ريال أسبوعياً

مثال ٣

إذا تحدد الراتب الشهري لأحد المدرسين بإحدى المدارس الأهلية بمبلغ س ألف ريال أوجد قيمة الراتب الشهري علماً بأن س تتحدد وفقاً للمعادلة التالية :

$$\frac{2س}{3} = \frac{س}{2} - 5$$

نستخرج المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ونضربه في الكسور لكي نتخلص منها

٢ ، ٤ = ٦

٣ = ٦

الحل /

نوجد المتغير س بحل المعادلة

بضرب طرفي المعادلة × المضاعف المشترك للمقامات وهو (٦)

$$٦ \times (\frac{2س}{3}) = ٦ \times (\frac{س}{2} - ٥)$$

حيث ٤ س = ٣٠ -٣س

نجعل الحدود التي تحتوي على المجهول (س) في الطرف الأيمن وبقية الحدود في الطرف الأيسر

حيث ٤ س + ٣س = ٣٠

٧س = ٣٠

نقسم المعلوم على معامل المجهول

$س = \frac{30}{7}$

الراتب الشهري للمدرس = س × ١٠٠٠

ضربنا في ١٠٠٠ لان الراتب بالآلاف

$= \frac{30}{7} \times ١٠٠٠ =$ ٤٢٥٨,٧ ريال

مثال ٤

بفرض أن قسم الاقتصاد بكلية الزراعة قرر توزيع مبلغ ٣٩ ألف ريال في صورة ثلاث جوائز متتالية القيمة على الثلاث الأوائل بالقسم استخدم المعادلات الخطية في تحديد مبالغ تلك الجوائز .

الحل :

نفرض :

أن مبلغ المركز الثالث = (س)

مبلغ المركز الثاني = (س + ١)

مبلغ المركز الأول هو (س + ٢)

أول خطوة نضع س مجهول ويعني المبلغ الذي سيأخذه كل من الأوائل المركز الثالث = س فقط والثاني س +١ أعلى منه بواحد والمركز الأول س + ٢ أي أعلى من المركز الثاني بواحد

وبالتالي تكون المجاهيل الثلاث هي (س) و (س+١) و (س+٢)

وحيث إن مجموع الجوائز الثلاث = ٣٩ ألف ريال

حيث (س) + (س+١) + (س+٢) = ٣٩

نضع الحدود الذي افترضناها جانب بعض بينما علامة موجب وبما أن مجموع جوائز المراكز هي ٣٩ إذن مجموع تلك الحدود تساوي ٣٩

الآن نرتب المعادلة نضع المعاليم (الأرقام) في طرف والمجاهيل (السينات) في طرف آخر

س + س+١ + س+٢ = ٣٩

س + س + س = ٣٩ – ١ – ٢

٣س = ٣٦

س = $\frac{36}{3}$ = ١٢

وبالتعويض عن قيمة س = ١٢

جائزة المركز الأول = س + ٢ = ١٢ + ٢ = ١٤٠٠٠ ريال

جائزة المركز الثاني = س+١ = ١٢ + ١ = ١٣٠٠٠ ريال

جائز المركز الثالث = س = ١٢٠٠٠ ريال

التحقق = ١٤٠٠٠ + ١٣٠٠٠ + ١٢٠٠٠ = ٣٩٠٠٠

مثال ٤

شخصان يزيد دخليهما بمقدار ألف ريال سنوياً فإذا كان مجموع دخليهما الآن هو ٣٥ ألف ريال وبعد ٥ سنوات سيصبح دخل الأول ضعف دخل الثاني

المطلوب : استخدام المعادلات الخطية في تحديد دخل كل من الشخصين الآن ؟

الحل /

بفرض أن دخل الشخص الأول (س) ألف ريال فإن :

	دخل الأول	دخل الثاني
الآن	س	٣٥ - س
بعد خمس سنوات	س + ٥	٣٥ – س + ٥ = ٤٠ - س

وحيث انه بعد خمس سنوات سيصبح دخل الأول ضعف الدخل الثاني فإن :

س + ٥ = ٢ (٤٠ – س)

وبحل هذه المعادلة نحصل على قيمة المتغير (س) :

حيث

س + ٥ = ٨٠ – ٢ س

س + ٢س = ٨٠ – ٥

٣س = ٧٥

س = $\frac{75}{3}$ = ٢٥٠٠

وعلى ذلك فأن

نفرض أن دخل الأول س

إما الدخل الثاني ٣٥-س

وتعني أن المتبقي من دخل الأول – مجموع دخليهما هو دخل الفرد الثاني أكيد ☺

س + ٥ يعني دخل الفرد اللي هو س + خمس سنوات

٣٥-س+ ٥ يعني دخل الفرد الثاني اللي هو ٣٥ – س + خمس سنوات

	دخل الأول	دخل الثاني
الآن	٢٥٠٠	١٠٠٠
بعد خمس سنوات	٣٠٠٠٠	١٥٠٠٠

مثال ٥

استثمر طالبان بكلية الزراعة مبلغين متتاليين في القيمة مجموعهما يعادل ١٩ ألف ريال

المطلوب : استخدام المعادلات الخطية في تحديد المبلغين ؟

حيث أن المبلغين متتالين في القيمة نفرض أن المبلغ الأصغر هو (س) ألف وبالتالي يكون المبلغ الثاني هو (س + ١) ألف

وحيث إن حاصل جمع المبلغين هو ١٩ ألف يمكن الحصول على المعادلة التالية :

(س) + (س + ١) = ١٩

دائما لإيجاد المجهول نفرض العدد الأول س وإذا كانت متتالية مثل هالسؤال والسؤال رقم ٤ أعلاه

نجعل العدد الذي بعد يساوي س + ١

انظر هذا المثال والمثال رقم ٤

وبحل المعادلة للحصول على قيمة س كما يلي :

٢س + ١ = ١٩

٢س = ١٩ – ١

٢س = ١٨

س = $\frac{18}{2}$ = ٩ الأف ريال

وعلى ذلك يكون المبلغ

المبلغ الأصغر هو ٩٠٠٠ ريال

المبلغ الأكبر (س + ١) = ١٠٠٠٠ ريال

المعادلات الخطية في متغيرين

يوجد العديد من الطرق التي يمكن من خلالها حل المعادلات الخطية الآتية ومن تلك الطرق :

- طريقة التعويـــض
- طريقة الحـــــذف

١- طريقة التعويض

من خلال هذه الطريقة يتم إيجاد متغير بدلالة المتغيرات الأخرى في إحدى المعادلات ومن ثم تعويضها في المعادلة (أو المعادلات) الأخرى لإيجاد قيم جميع متغيرات المعادلات

مثال ٧

أوجد نقطة التوازن لدالتى الإنتاج التاليتين للسلعتين س ، ص

٢ س + ٤ ص = ٢٠ ..... (١)

٥س – ١٠ ص = ١٠ .....(٢)

من المعادلة (١) وهي

٢ س + ٤ ص = ٢٠

أول خطوة في طريقة التعويض خذ إحدى المعادلتين ومن ثم اجعلها بدلالة س أو بدلالة ص

بدلالة س يكون

٢س = ٢٠ – ٤ص

دائما إذا كان معامل المتغير المستقبل اكبر من ١ اقسمه على باقي الحدود لكي تتخلص منه انظر هنا قسمنا معامل س ٢ على ٢٠ وعلى ٤ فإذا قسمنا ٢س على ٢ و ٢٠ على ٢ و -٤ على ٢ تكون النتيجة س = ١٠ – ٢ص

س = ١٠ – ٢ص

بتعويض هذه النتيجة في المعادلة (٢) ٥س – ١٠ ص = ١٠

٥ (١٠ – ٢ص) – ١٠ ص = ١٠

عوضنا بدل س بالقيمة التي استخرجناها وهي س = ١٠ – ٢ص ومن ثم ضربنا ٥ في ١٠ و -٢ص حتى نتخلص من القوس

٥٠ – ١٠ص – ١٠ ص = ١٠

-١٠ص – ١٠ص = ١٠ – ٥٠

-٢٠ ص = -٤٠

$ص = \frac{-40}{-20}$

ص = ٢

نعوض بقسمة ص في إحدى المعادلتين وليكن في المعادلة (١) فأن :

٢س + ٤ص = ٢٠

٢س + ٤ (٢) = ٢٠

٢س + ٨ = ٢٠

٢س = ٢٠ – ٨

٢س = ١٢

$س = \frac{12}{2}$

س = ٦

طريقة الحذف والاستبعاد

وتعتمد هذه الطريقة في حلها للمعادلات الخطية الآتية على حذف متغير (أو أكثر) من المجاهيل في كل مرحلة وهذه الطريقة ينتج عنها دائماً الحل المباشر والصحيح ومن الممكن تطبيقها على أكثر من معادلتين بمجهولين

مثال ٨

باستخدام طريقة الحذف أوجد قيمتي س ، ص في الدالتين التاليتين وتمثلان كمية الإنتاج من سلعتين يحتاج لهما السوق .

-٣ص + ٦س = ٢١٠

- س + ٤ص – ٤٢٠ = صفر

الخطوة (١) ترتيب المعادلات :

أول خطوة في طريقة الحذف نرتب المعادلة كالتالي :

- نجعل المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف
- نحط السين تحت السين والصاد تحت الصاد والرقم تحت الرقم

٦س - ٣ ص = ٢١٠ ..... (١)

- س + ٤ص = ٤٢٠ ..... (٢)

الخطوة (٢) يضرب المعادلة (٢) × +٦ وجمعهما مع المعادلة (١)

٦س - ٣ ص = ٢١٠ ..... (١)

-٦ س + ٢٤ص = ٢٥٢٠ ..... (٢)

الهدف من الضرب من اجل أن يذهب أحد الحدود المجهولة يا س ولا ص ☺

بالجمع

٢١ ص = ٢٧٣٠

ص = $\frac{2730}{21}$ = ١٣٠

وبالتعويض في أي من المعادلات السابقة وليكن في المعادلة (١) عن ص = ١٣٠

٦س – (٣ × ١٣٠) = ٢١٠

٦س – ٣٩٠ = ٢١٠

٦س = ٢١٠ + ٣٩٠ = ٦٠٠

س = $\frac{600}{6}$ = ١٠٠

ويمكن التحقق من صحة الحل بالتعويض بقيمتي س ، ص الناتجتين في المعادلتين نجد أن :

٦س - ٣ ص = ٢١٠ ..... (١)

- س + ٤ص = ٤٢٠ ..... (٢)

حيث :

(٦ × ١٠٠) – (٣ × ١٣٠) = ٦٠٠ – ٣٩٠ = ٢١٠
(-١ × ١٠٠) + (٤ × ١٣٠) = -١٠٠+٥٢٠ = ٤٢٠

مثال ٩

باستخدام طريقة الحذف أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين :

٣ س + ٤ص – ١٢ = صفر ..... (١)
٥ ص + ٤س = ٢٠ ..... (٢)

الحل /

نرتب المعادلات بحيث تكون س في أول المعادل وص في ثاني حد وبعد اليساوي الحد الثابت أي الرقم

(١) ترتيب المعادلات :

٣س + ٤ص = ١٢ .... (١)
٤س + ٥ص = ٢٠ .... (٢)

(٢) بضرب المعادلة (١) × ٤ وضرب المعادلة (٢) × -٣ وجمعهما فإن :

١٢ س + ١٦ ص = ٤٨ ..... (١)
-١٢س – ١٥ص = -٦٠ .....(٢)

+ بالجمع

ص = - ١٢

وبالتعويض في أي من المعادلات السابقة وليكن في المعادلة (١) عن ص = -١٢

٣ س + ٤ص = ١٢
٣س + (٤ × - ١٢) = ١٢
٣س – ٤٨ = ١٢
٣س = ١٢ + ٤٨ = ٦٠
س = $\frac{60}{3}$ = ٢٠

ويمكن التوصل لنفس النتيجة بالتعويض في المعادلة (٢) عن ص = -١٢

ويمكن التحقق من صحة الحل بالتعويض بقيمتي س ، ص الناتجتين في المعادلتين نجد أن :

٣س + ٤ص = ١٢
(٣ × ٢٠) + (٤ × - ١٢) = ٦٠ – ٤٨ = ١٢

وكذلك :

٤س + ٥ ص = ٢٠
(٤ × ٢٠) + (٥ × - ١٢) = ٨٠ – ٦٠ = ٢٠

لاحظ إذا أردنا أن نتحقق من صحة قيمتي س وص نعوضها في المعادلتين والنتيجة ستساوي ١٢ في الأولى و ٢٠ في الثانية

مثال ١١

مصنع بمدينة جدة به قسمان لإنتاج نوعين من السلع وتبين أن إنتاج الوحدة من السلعة الأولى يحتاج الى ساعتين في القسم الأول وساعتين في القسم الثاني بينما إنتاج الوحدة

من السلعة الثانية يحتاج إلى ساعتين في القسم الأول وثلاث ساعات في القسم الثاني فإذا كانت طاقة القسم الأول ٢٠٠ ساعة والقسم الثاني ٢٥٠ ساعة أوجد باستخدام طريقتي الحذف والتعويض عدد الوحدات اللازم إنتاجها من نوعي السلع بحيث يمكن استغلال طاقة المصنع بالكامل .

الحل /

بفرض أن كمية إنتاج السلعة الأولى (س) وكمية إنتاج السلعة الثانية (ص) .

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في صورة معادلتين كما يلي :

نلخص المسألة على صيغة معادلات
السلعة الأولى أي المعادلة الأولى والسلعة الثانية أي المعادلة الثانية والقسم الأول (س) والقسم الثانى (ص)

٢س + ٢ص = ٢٠٠ ..... (١)
٢س + ٣ص = ٢٥٠ .....(٢)

١- طريقة الحذف :

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢)

نطرح حدود المعادلتين من بعض ٢ س من ٢س و ٢ص من٣ص و ٢٠٠ من ٢٥٠

٢س + ٢ص = ٢٠٠
٢س + ٣ص = ٢٥٠
بالطرح
ص = ٥٠ وحدة

وبالتعويض في أي من المعادلات السابقة وليكن في المعادلة (١) عن ص = ٥٠

٢س + (٢ × ٥٠) = ٢٠٠

نعوض بقيمة ص في المعادلة كما فعلنا هنا عوضنا ص بـ ٥٠ كما استخرجناها في الخطوة السابقة

٢س + ١٠٠ = ٢٠٠

٢س = ٢٠٠ - ١٠٠

٢س = ١٠٠

س = $\frac{100}{2}$ = ٥٠ وحدة

٢- طريقة التعويض

من المعادلة (١) وهي ٢س + ٢ص = ٢٠٠

بدلالة س يكون :

بالقسمة على ٢

٢س = ٢٠٠ – ٢ص

س = ١٠٠ – ص

بدلالة س أي نجعل س قبل = والباقي الحدود بعد المجاهيل مع نقل الإشارات

وقسمنا على ٢ علشان نتخلص كما قلت لكم قبل من ٢ قسمناها على كل الحدود وكانت النتيجة
س = ١٠٠ - ص

بتعويض هذه النتيجة في المعادلة (٢) نحصل على :

٢ (١٠٠ – ص) + ٣ص = ٢٥٠

٢٠٠ – ٢ص + ٣ص = ٢٥٠

ص = ٢٥٠-٢٠٠ = ٥٠ وحدة

بالتعويض عن قيمة ص في إحدى المعادلتين وليكن في المعادلة (٢) فإن :

٢س + ٣ (٥٠) = ٢٥٠

٢س + ١٥٠ = ٢٥٠

٢س = ٢٥٠-١٥٠

٢س = ١٠٠

س = ٥٠ وحدة

بعد ماعوضنا بدل قيمة ص بـ (٥٠) وضربناها ب ٣ علشان نفك القوس صارت ١٥٠ تكون لنا معادل من مهول واحد ومعلومين نحط المجهول في طرف والمعلوم في طرف آخر ونستخرج قيمة س ☺

وهي نفس النتيجة التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة الحذف وعلى ذلك يجب على المصنع إنتاج ٥٠ وحدة من السلعة الأولى (س) و ٥٠ وحدة من السلعة الثانية (ص) حتى يمكن استغلال الطاقة الإنتاجية القصوى للمصنع .

مثال ١٢

إذا كانت دالة الطلب والعرض على سلعة معينة كدوال في الثمن (ث) هما :

الطلب : ك + ٣ث = ١٧ ..... (١)

العرض : -٢ك + ث = -٦ ..... (٢)

حيث ك تمثل الكمية المطلوبة أو الكمية المعروضة ، ث = السعر أو الثمن .

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن .

الحل / طريقة الحذف

بضرب معادلة الطلب (١) في (٢) وضرب معادلة العرض (٢) في (١)

حيث

٢ ك + ٦ث = ٣٤

-٢ك + ث = -٦

نضرب معامل ك أي -٢ في المعادلة الأولى في كل حدود المعادلة الثانية ونضرب معامل ك أي ١ في المعادلة الثانية في كل حدود المعادلة الأولى

٧ث = ٢٨

ث = $\frac{28}{7}$ = ٤ وحدة نقدية

طرحنا المعادلتين من بعض يكون الناتج هي معادلة من مجهول واحد نقسم المعلوم على معامل المجهول حتى نستخرج قيمة ث

وبالتعويض في أي من معادلتي العرض أو الطلب السابقة ولتكن معادلة العرض (٢) عن ث = ٤

-٢ ك + ٤ث = -٦

-٢ك + (٤) = -٦

-٢ك = -٦ - ٤

بعد التعويض نجعل المعاليم في طرف والمجاهيل في طرف مع تغيير الإشارات عند النقل

ك = $\frac{-10}{-2}$ = ٥ وحدة

معادلة من مجهول واحد نقسم المعلوم على معامل المجهول حتى نستخرج قيمة ك

٢ - طريقة التعويض

من معادلة الطلب (١) وهي :

ك + ٣ث = ١٧

بدلالة ك يكون :

نجعل المعادلة بدلالة ك أي تكون قبل = وباقي المجاهيل والمعاليم بعد يساوي مع تغيير الإشارة إذا نقلتها

ك = ١٧ - ٣ث (٣)

بتعويض هذه النتيجة في معادلة العرض (٢) نحصل على :

-٢ (١٧ – ٣ث) + ث = -٦

-٣٤ + ٦ث + ث = -٦

بالتعويض بقيمة ك في إحدى المعادلتين وهنا عوضنا في ٢ كالتالي

٧ث = -٦ + ٣٤

٧ث = ٢٨

ث = $\frac{}{7}$ = ٤ وحدة نقدية

بالتعويض عن قيمة ث في المعادلة (٣) أو في إحدى معادلتي الطلب أو العرض وليكن في المعادلة (٣) فإن :

ك = ١٧ – ٣ (٤)

= ١٧ – ١٢ = ٥ وحدات

وهي نفس النتيجة التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة الحذف وعلى ذلك يكون ثمن التوازن هو ٤ وحدات وتكون كمية التوازن هي ٥ وحدات إنتاج .

تمارين

تمرين ١

إذا كان دالتي الانتاج لسلعتين مختلفتين بكميات (س) ، (ص) بآلاف الوحدات هما:

٢س + ٣ص = ١٧٠

س = ٤٠

فإن كميات الانتاج من السلعتين معا هي س = ٤٠ ، ص = ٥٠

(أ) الفقرة صح (ب) الفقرة خطأ

تمرين ٢

في ظل وجود دالتين خطيتين على النحو التالى

٢س – ٤ ص -١٢ = صفر

٤ص + ٤س =٢٠

أوجد قيمتي س ، ص بأستخدام طريقتي الحذف والتعويض .