المحددات وتطبيقاتها الاقتصادية

مقدمة

- تعتبر المحددات من أهم الطرق التي يمكن استخدامها في حل المعادلات الخطية في مجهولين أو ثلاث مجاهيل أو بصفة عامة (ن) من المجاهيل وفي هذا الاسلوب الكثير من التبسيط إذا ما قورن بطرق أخرى مثل طريقة الحذف والاستبعاد أو طريقة التعويض وفي هذه المحاضرة سوف نتناول

- المحددات وقيمتها الجبرية
- حل المعادلات الخطية باستخدام طريقة كرامر
- التطبيقات الاقتصادية للمحددات

• تعريفات هامة

- **المحدد :** مجموعة من العناصر (أعداد أو رموز) موضوعة فى صفوف وأعمدة بين خطين رأسيين

لابد وأن يكون عدد الصفوف = عدد الأعمدة

مثال :

$$\begin{vmatrix} س & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

• المحيدد والمرافق

- **المحيدد :** هو المحدد الأصلي بعد حذف الصف والعمود اللذان يحتويان العنصر

فمثلاً إذا وجد المحدد التالي من الرتبة الثالثة

$$أ = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ س & -4 & 7 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

فإن محيدد العنصر س = أ١٢ =

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 7 & -4 & \text{س} \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

- **المرافق : لكل عنصر مرافق هو قيمة المحيدد مضروبا فى ــ ١ مرفوعا إلى قوة تساوى حاصل جمع ترتيب العنصر فى الصف والعمود**

التطبيق على المثالين السابقين .

- إشارات مرافقات العناصر فى المحدد من الرتبة الثانية

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$$

- إشارات مرافقات العناصر في المحدد من الرتبة الثالثة

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

القيمة الحسابية للمحدد

يرمز لقيمة المحدد بالرمز Δ (دلتا)

أولاً : القيمة الحسابية للمحدد من الرتبة الثانية = Δ =

حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي – حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي أو الفرعي

① المحور الثنائي:

ملحوظة: المحدد يكون لمصفوفة متماثلة فقط، أي عدد صفوفها = عدد أعمدتها.

القطر الرئيسي

$$\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} = أ \times د - ب \times جـ$$

نضرب القطر الرئيسي بإشارته والفرعي بعكس الإشارة

تمرين رقم ٧-٤:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١٥ + ٤ = ١٩$$

$$\begin{vmatrix} ٦ & ٦ \\ ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٢٤ - ٢٤ = صفر$$

مثال ٢ إذا كان :

$$ج = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

فأن $\Delta ج =$ (٢ × ٧) – (٣ × ٤-) = ٢٦

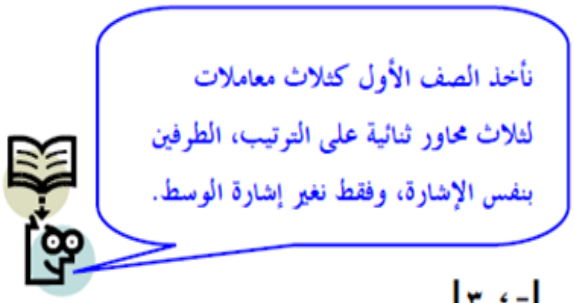
ثانياً : قيمة المحدد من الدرجة الثالثة = Δ = مجموع حواصل

ضرب عناصر أحد الصفوف (أو أحد الأعمدة x محيدداتها وذلك مع تطبيق قاعدة الإشارات السابقة

② المحور الثلاثي:

تمرين رقم ٨- ٤:

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ & -٢ \\ -٤ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$



فإن:

$$|\text{أ}| = ٣ \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ١ & -٤ \\ ٦ & -٢ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ٤٢ - ١١٠ + ٢٠ = -٤٨$$

ملاحظة:

الخاصية الإبدالية:

- إذا تغير صف مكان صف أخر، أو عامود مكان عامود ⟸ نفس ناتج المحور مع تغير الإشارة.

إذا غيرنا في المثال ٨ – ٤ العامود الأول مكان العامود الثالث ⟸ يكون نفس الناتج:

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٢ & -٥ & ٣ \\ ١ & ٣ & -٤ \end{bmatrix}$

فإن:

$$|\text{أ}| = ٣ \begin{vmatrix} -٤ & ٣ \\ -٦ & ٤ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} -٤ & ١ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$= -٢٠ + ١١٠ - ٤٢ = +٤٨$$

حل المعادلات (حل النظام):

حل المعادلات الخطية (باستخدام طريقة كرامر)

أكتشف Cramer في القرن الثامن عشر أن نظرية المحددات يمكن استخدامها في حل المعادلات الخطية ويعتبر حل المعادلات من أهم التطبيقات العملية لنظرية المحددات

أولاً: حل المعادلات الخطية في مجهولين

لحل مجموعة من المعادلات بشترط أن يكون عدد المجاهيل = عدد المعادلات

ففي حالة وجود مجهولين يشترط وجود معادلتين وفي حالة وجود ثلاث مجاهيل يشترط وجود ثلاث معادلات.

وعلى ذلك في حالة وجود المعادلتين التاليتين .

أ١ س + ب١ ص = ك١ ..... (١)

أ٢ س + ب٢ ص = ك٢ .....(٢)

وعلى ذلك يمكن وضع قيمتي (س ، ص)في صورة محددات من الدرجة الثانية على النحو التالي :

١- نوجد محدد المعاملات ونرمز له بالرمز Δ وهو عبارة عن معاملات س ، ص

$$\Delta = \text{محدد المعاملات} = \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

٢- نوجد محدد كل مجهول من المجاهيل كالتالي :

$$\Delta \text{ س} = \text{محدد س} = \begin{vmatrix} ك_1 & ب_1 \\ ك_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{محدد ص } (\Delta \text{ ص}) = \begin{vmatrix} أ_1 & ك_1 \\ أ_2 & ك_2 \end{vmatrix}$$

٣ ـ نوجد قيمة كل مجهول

$$\text{س} = \frac{\Delta \text{س}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta}$$

مثال : إذا كان دالتي الطلب والعرض على النحو التالي:

-٣ س + ص = ١٧٠

٥ س + ص = ٤٥٠ . حيث س السعر ، ص الكمية

الحل

١- نوجد محدد المعاملات ونرمز له بالرمز Δ وهو عبارة عن معاملات س ، ص

$$\text{محدد المعاملات } \Delta = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (-٣ \times ١) - (٥ \times ١) = -٨$$

٢- نوجد محدد كل مجهول من المجاهيل كالتالي :

$$\text{محدد س } (\Delta \text{ س}) = \begin{vmatrix} ١٧٠ & ١ \\ ٤٥٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (١٧٠ \times ١) - (٤٥٠ \times ١) = -٢٨٠$$

$$\text{محدد ص } (\Delta \text{ ص}) = \begin{vmatrix} -٣ & ١٧٠ \\ ٥ & ٤٥٠ \end{vmatrix}$$

$$= (-3 \times ٤٥٠) - (٥ \times ١٧٠) = -٢٢٠٠$$

٣ ـ نوجد قيمة كل مجهول

$$\text{سعر التوازن س} = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-280}{-8} = ٣٥ \text{ وحدة نقدية}$$

$$\text{كمية التوازن ص} = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-2200}{-8} = ٢٧٥ \text{ وحدة انتاج}$$

ثانياً: حل المعادلات الخطية في ثلاث مجاهيل

الحل بطريقة كرامر (المحددات):

مثال: أوجد قيمة س ، ص ، ع

س + ٣ص − ع = −٤
٣س − ٢ص + ع = ٧
س − ص + ٢ع = ٦

$[ب] = [س] \times [أ]$
معامل المجاهيل × المجاهيل = النواتج

خطوات الحل

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & -١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ \\ ٧ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

① المحدد العام محور المعاملات:

$$|أ| = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = ١ \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$|أ| = -٣ - ١٥ + ١ = -١٧$$

② محدد المجهول الأول، محدد (س) $|أ_1|$:

$$|أ_1| = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|أ_1| = -4 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|أ_1| = 12 - 24 - 5 = -17$$

③ محدد المجهول الثاني، محدد (ص) $|أ_2|$:

$$|أ_2| = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|أ_2| = 1 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|أ_2| = 8 + 20 - 11 = 17$$

تأكد أن نواتج $|أ_1|$ ، $|أ_2|$ ، $|أ_3|$ تقبل القسمة على المحدد العام، لتتأكد أن حلك صحيح.

④ محدد المجهول الثالث محدد (ع) $|أ_3|$:

$$|أ_3| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|أ_3| = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|أ_3| = -5 - 33 + 4 = -34$$

$$س = \frac{|أ_1|}{|أ|} = \frac{-17}{-17} = 1$$

$$ص = \frac{|أ_2|}{|أ|} = \frac{17}{-17} = -1$$

$$ع = \frac{|أ_3|}{|أ|} = \frac{-34}{-17} = 2$$

والآن نقوم بالتعويض في أي من المعادلات الثلاثة:

$$س + 3ص - ع = -4$$

$$(1) + 3(-1) - (2) = -4$$

تمارين

تمرين ١

إذا كان ب =

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & ب \end{vmatrix}$$

أوجد Δ ب

تمرين ٢

أوجد قيمتي س ، ص من الآتي :

٣ س + ص = ١٧

س – ٢ ص = - ٦

استخدام المحددات في التعبير عن المشكلات التطبيقية وحلها

تمرين ٣

مصنع ينتج سلعتين في قسمين

الوحدة من السلعة الأولى تحتاج إلى ساعتين في القسم الأول وساعتين في الثاني

الوحدة من السلعة الثانية تحتاج إلى ساعتين في القسم الأول وثلاث ساعات في الثاني

طاقة تشغيل القسم الأول ٢٠٠ ساعة

طاقة تشغيل القسم الثاني ٢٥٠ ساعة

إحسب عدد الوحدات الممكن إنتاجها من السلعتين بافتراض استخدام طاقة المصنع بالكامل .

<u>خطوات للمساعدة على الحل :</u>

١. افتراض أن عدد الوحدات من السلعة الأولى س ومن السلعة الثانية ص

٢. تلخيص المشكلة السابقة في نظام من المعادلات الخطية كالتالى:

$$٢ س + ٢ ص = ٢٠٠$$
$$٢ س + ٣ ص = ٢٥٠$$

ثم أكمل باقي حل المعادلات باستخدام المحددات

تمرين ٤

بفرض أن النموذج الخطي لمجموعة من المعادلات الخطية على النحو التالي

$$٣س - ٢ ص + ٣ ع = -٧$$

$$س + ٣ص - ٢ ع = ١٧$$

$$٢ س + ص – ع = ١٢$$

أوجد قيمة س ، ص ،ع باستخدام المحددات.