المحاضرة الثامنة

ثانياً : ضرب المصفوفات

يشترط لضرب مصفوفتين أن يكون عدد **أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية** والمصفوفة الناتجة تكون فى هذه الحالة من الدرجة (عدد صفوف الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية) ومثال ذلك :

$$أ_{٢\times٣} \times ب_{٣\times٣} = جـ_{٢\times٣}$$

$$أ_{٣\times١} \times ب_{١\times٣} = جـ_{٣\times٣}$$

$$أ_{٣\times٢} \times ب_{٢\times٣} = جـ_{٣\times٣}$$

مثال (١) :

إذا كان :

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \\ أ_{13} & أ_{23} \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ب_{11} & ب_{21} \\ ب_{12} & ب_{22} \end{bmatrix}$$

أوجد : جـ = أ ب

الحل :

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة أ = ٢

حيث عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

يمكن إيجاد حاصل الضرب جـ = أ ب ، حيث :

$$جـ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \\ أ_{13} & أ_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ب_{11} & ب_{21} \\ ب_{12} & ب_{22} \end{bmatrix}$$

$$جـ = \begin{bmatrix} أ_{11}\times ب_{11} + أ_{21}\times ب_{12} & أ_{11}\times ب_{21} + أ_{21}\times ب_{22} \\ أ_{12}\times ب_{11} + أ_{22}\times ب_{12} & أ_{12}\times ب_{21} + أ_{22}\times ب_{22} \\ أ_{13}\times ب_{11} + أ_{23}\times ب_{12} & أ_{13}\times ب_{21} + أ_{23}\times ب_{22} \end{bmatrix}$$

العنصر جـ١١ = أ١١ × ب١١ + أ٢١ × ب١٢ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصر جـ٢١ = أ١١ × ب٢١ + أ٢١ × ب٢٢ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

العنصر جـ١٢ = أ١٢ × ب١١ + أ٢٢ × ب١٢ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصر جـ٢٢ = أ١٢ × ب٢١ + أ٢٢ × ب٢٢ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

العنصر جـ١٣ = أ١٣ × ب١١ + أ٢٣ × ب١٢ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصر جـ٢٣ = أ١٣ × ب٢١ + أ٢٣ × ب٢٢ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

والأمثلة الآتية توضح كيفية ضرب مصفوفتين.

مثال (١) :

إذا كان :

$$أ = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد :

(i) أ ب (ii) ب أ

(iii) هل أ ب = ب أ ؟

الحل :

(i) أ ب $= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (6\times3)+(4\times2) & (-2\times3)+(-1\times2) \\ (6\times5)+(4\times-1) & (-2\times5)+(-1\times-1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 26 & -8 \\ 26 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+8 & -6-2 \\ 30+4- & -10-1 \end{bmatrix}$

(ii) ب أ $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (5\times4)+(3\times-1) & (-1\times4)+(2\times-1) \\ (5\times6)+(3\times-2) & (-1\times6)+(2\times-2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 24 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20+3- & -4-2 \\ 30+6- & -6-4 \end{bmatrix}$

(iii) أ ب ≠ ب أ

معكوس المصفوفة

مثال (٢) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية :

$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

الحل :

لإيجاد معكوس المصفوفة نتبع الخطوات الآتية:

(i) نوجد محدد المصفوفة.

$\Delta = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = (-٣ \times ٢) - (-٥ \times ١)$

$= -٥ + ٦ = ١$

(ii) نوجد مصفوفة المرافقات مع أخذ قاعدة الإشارات في الاعتبار.

مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} 2- & (5-)+ \\ 1+ & (3-)- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 5- \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) نوجد مبدول مصفوفة المرافقات :

مبدول مصفوفة = $\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix}$

(iv) $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{1} =$

ملاحظة هامة

من المعروف أن حاصل ضرب المصفوفة فى معكوسها يساوى مصفوفة الوحدة. أى أن :

$$\text{أ} \times \text{أ}^{-1} = \text{أ}^{-1} \times \text{أ} = I$$

$$\text{أ} \times \text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 5- & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 3-)+(3\times 1) & (2-\times 3-)+(5-\times 1) \\ (1\times 5-)+(3\times 2) & (2-\times 5-)+(5-\times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-3 & 6+5- \\ 5-6 & 10+10- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الواجب

تمرين (١) :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 1- & 1 \\ 2- & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد :

(i) أ ب

(ii) ب أ

(iii) هل أ ب = ب أ ؟

تمرين (٢) :

إذا كان:

$$أ = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \\ 12 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5- & 9 \\ 1- & 2 & 1- \end{bmatrix}$$

المطلوب : هل يمكن ايجاد حاصل ضرب أ ب أم ب أ ولماذا؟ ثم أوجد الحل