

المحاضرة الثالثة
الدوال التربيعية والأسية واللوغاريتمية
وتطبيقاتها الاقتصادية

أولاً : الدوال التربيعية

إذا كانت قوة أو أس المتغير المستقل (س) أعلى من الدرجة الأولى فإنه يقال أن الدالة ص = د(س) دالة غير خطية ، مثل الدالة التربيعية والدالة التكعيبية وغيرها وبصفة عامة يمكن القول أن الدالة غير الخطية هي دالة كثيرة الحدود من الدرجة (ن < ١)

تتمثل المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد في الصورة التالية

$$أس^2 + ب س + ج = صفر$$

حيث أ هو معامل س²

ب هو معامل س

ج هو الحد المطلق

حيث أن المعامل ب والحد ج تأخذ أي قيمة

أما أ ≠ صفر حيث أنه إذا كانت أ تساوي الصفر تصبح المعادلة من الدرجة الأولى

تسمى المعادلة في صورتها السابقة معادلة من الدرجة الثانية في المتغير س

طرق حل معادلة الدرجة الثانية :-

- ١- طريقة التحليل .
- ٢- طريقة إكمال المربع .
- ٣- قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية .

طريقة التحليل

الحد المطلق
أو الخالي

الحد

الحد

تحليل المقدار الثلاثي $أس^٢ + ب س + ج$

هناك حالتين للتحليل

هما :-

(١) الحالة الأولى عندما $أ = ١$

(٢) الحالة الثانية عندما $أ \neq ١$

فهذه هي طريقة سهلة وأسلوب مبسط لتحليل المقدار الثلاثي ومطبقة في الميدان منذ عام ١٩٩٦ م .

وقبل البدء بشرح التحليل سأقوم بتذكيركم ببعض المسائل الرياضية التي ستتمكن من حل أي مسألة تخص طريقة التحليل وهي على سبيل المثال :

١- نريد عددين حاصل ضربهما = ٦ ومجموعهما = ٥ هما $[[٣ ، ٢]]$

٢- نريد عددين حاصل ضربهما = ٦ والفرق بينهما = ٥ هما $[[١ ، ٦]]$

٣- نريد عددين حاصل ضربهما = ١٢ والفرق بينهما = ٤ هما $[[٢ ، ٦]]$

٤- نريد عددين حاصل ضربهما = ٢٤ والفرق بينهما = ٥ هما $[[٨ ، ٣]]$

٥- نريد عددين حاصل ضربهما = ٢٤ والفرق بينهما = ٢ هما $[[٦ ، ٤]]$

٦- نريد عددين حاصل ضربهما = ٢٤ والفرق بينهما = ١٠ هما $[[١٢ ، ٢]]$

٧- نريد عددين حاصل ضربهما = ٣٦ والفرق بينهما = ٥ هما $[[٩ ، ٤]]$

أي عندما تأتي لكم مسألة بطريقة التحليل اسأل نفسك عندما تقرأ المعادلة بنفس الطريقة أعلاه لكي تستطيع وبسهولة أن تحل بهذه الطريقة

عندما $a = 1$

إذا كان الحد الأول يساوي 1

خطوات الحل

١- تحليل الحد الأول s^2 إلى مقدارين وتكون بهذا الشكل

٢- (س) (الإشارة) (العدد الأول) (س) (الإشارة) (العدد الثاني) (

٣- تحليل الحد الأخير (الخالي) إلى مقدارين كالتالي

• إذا كان الحد الثالث (الخالي) موجب

عدنان حاصل ضربهما الحد الثالث ومجموعهما الحد الأوسط (الثاني)

• إذا كان الحد الثالث (الخالي) سالب

عدنان حاصل ضربهما الحد الخالي (الثالث) والفرق بينهما الحد الأوسط (الثاني)

١- بعد ذلك نضبط الإشارات وهي سهلة ومفهومة وليست بجديدة .

✓ ((إذا كانت إشارة الحد الأخير { + } فإن إشارتي القوسين متشابهتين مثل إشارة الحد الأوسط))

✓ ((إذا كانت إشارة الحد الأخير { - } فإن إشارتي القوسين مختلفتين العدد الأكبر يأخذ إشارة الحد الأوسط))

تمارين محلولة

(١) $س٢ - ١١ س + ٣٠$

الحد الثالث موجب :

١- (س (الإشارة) (العدد الأول)) (س (الإشارة) (العدد الثاني))

٢- نبحث عن عدد حاصل ضربيهما الحد الثالث (٣٠+) ومجموعهما (١١-) وهما -٥، -٦

٣- الآن نكمل ما تبقى ما بين الأقواس من الفقرة ١ وهي الإشارات و الأعداد

(٢) $س٢ - ٧ س - ٣٠$

الحد الثالث سالب :

١- (س (الإشارة) (العدد الأول)) (س (الإشارة) (العدد الثاني))

٢- نبحث عن عدد حاصل ضربيهما الحد الثالث (٣٠-) والفرق بينهما (٧-) وهما +٣، -١٠

٣- الآن نكمل ما تبقى ما بين الأقواس من الفقرة ١ وهي الإشارات و الأعداد

٤- (س + ٣) (س - ١٠)

خطوات الحل /

- ٢- نبحث عن عددين حاصل ضربيهما $= a \times ج$ أي ناتج ضربيهما يساوي ناتج ضرب a في $ج$ ويكون مجموعهما أو الفرق بينهما الحد الأوسط
- أ- إذا كانت إشارة $ج$ (+) " جمع " نقول ومجموعهما $= ب$
- ب- إذا كانت إشارة $ج$ (-) " طرح " نقول والفرق بينهما $= ب$

أي نأخذ عددين حاصل ضربيهما $= a \times ج$ (ومجموعهما أو الفرق بينهما $= ب$)

- ٣- بعد تحليل العددين نأخذ الحد الأوسط ونقسمها إلى قسمين يحمل الحد $س$ ومعامله هما العددين اللذان بحثنا عنها مثلاً كانت المعادلة هي $٣س^٢ + ١٠س + ٨$ وكانا العددين اللذان حاصل ضربيهما ٢٤ ومجموعها ١٠ هما (٦ ، ٤) تكون المعادلة كالتالي
- ($٣س^٢ + ٤س$) ($٦س + ٨$) ثم نحلها كما في الأمثلة أدناه بحيث تجعل لكل قوس عامل مشترك بحيث إذا ضربت ما بخارج القوس ما بداخل القوس يكون الناتج ما بين الأقواس الأصلية.
- ٤- بعد ذلك نضبط الإشارات وهي سهلة ومفهومة وليست بجديدة .
- ✓ ((إذا كانت إشارة الحد الأخير { + } فإن إشارتي القوسين متشابهتين مثل إشارة الحد الأوسط)) .
- ✓ ((إذا كانت إشارة الحد الأخير { - } فإن إشارتي القوسين مختلفتين العدد الأكبر يأخذ إشارة الحد الأوسط)) .

مثال ١

$$(١) \quad ٣س^٢ + ١٠س + ٨$$

- ١- نبحث عن عددين حاصل ضربيهما يساوي ($a \times ج$) أي (٣×٨) أي ٢٤ ومجموعهما الحد الأوسط أي ١٠

$$\text{العدادان هما (٦ ، ٤)}$$

- ٢- الخطوة الثانية بعد إيجاد العددين نكتب نفس المعادلة

$$٣س^٢ + ١٠س + ٨$$

٣- ثالث خطوة احذف ١٠ س واجعل عوضاً عنها العددين (٤ ، ٦) مع زيادة س
لهما كالتالي :

$$(٣س^٢ + ٤س) (٦س + ٨)$$

٤- رابع خطوة تحليل القوسين كالتالي

ما بخارج القوس مع بعض وما بداخل
القوس مع بعض
ونأخذ واحد من ما بين الأقواس فقط

$$\begin{array}{c} (٣س^٢ + ٤س) (٦س + ٨) \\ \swarrow \quad \searrow \\ (٣س^٢ + ٤س) (٢س + ٤) \end{array}$$

مثال ٢

حل المعادلة التالية باستخدام طريقة التحليل للعوامل :

$$٣س^٢ + ١ = (١ - س)$$

الحل / أول شيء نقوم به هنا نفاك الأقواس حتى تنتج لنا معادلة بالصورة

أ س ^٢ + ب س + ج	
----------------------------	--

$$٣س^٢ + ١ = ٥ - ٥س$$

$$٣س^٢ + ٥س + ١ = ٥ - ٥س$$

$$٣س^٢ + ١٠س + ١ = ٥$$

نلاحظ أن المعادلة هنا معامل س^٢ لا يساوي ١ إذا هذه الحالة الثانية ولها خطوات أخرى

لنجرّب معاً كيف نستطيع حل المعادلة إذا كانت معامل س^٢ لا يساوي ١

- ١- نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي (أ × ج) أي (٣ × ٢) أي ٦
والفرق بينهما الحد الأوسط أي ٥
العددين هما (٦ ، ١)

٢- الخطوة الثانية بعد إيجاد العددين نكتب نفس المعادلة

$$٠ = ٢ - ٥س + ٣س٢$$

٣- ثالث خطوة احذف ٥س واجعل عوضاً عنها العددين (١، ٦) مع زيادة س لهما كالتالي :

$$(٣س٢ - ١س) (٦س - ٢)$$

٤- رابع خطوة تحليل القوسين كالتالي

ما بخارج القوس مع بعض وما بداخل القوس مع بعض
ونأخذ واحد من ما بين الأقواس فقط

$$\begin{array}{c} (١ - ٣س) ٢ (١ - ٣س) س \\ \swarrow \quad \uparrow \\ (١ - ٣س) (٢ + س) = \text{صفر} \end{array}$$

مثال ٣

أوجد جذري المعادلة التالية باستخدام طريقة التحليل للعوامل :

$$٠ = ١٥ - ٨س + ٣س٢$$

الحد الثالث موجب :

$$١- (س (الإشارة) (العدد الأول) (س (الإشارة) (العدد الثاني) ($$

$$٢- نبعث عن عدد حاصل ضربيهما الحد الثالث (١٥+) ومجموعهما (-٨) وهما -٣، -٥$$

٣- الآن نكمل ما تبقى ما بين الأقواس من الفقرة ١ وهي الإشارات و الأعداد

$$٤- (س - ٣) (س - ٥)$$

الطريقة الثانية : القانون العام

$$(أس^٢ + ب س + ج = ٠)$$

المميز = ب^٢ - ٤أج

المميز > صفر ليس لها حل في ح

المميز = صفر للمعادلة حل واحد فقط

المميز < صفر للمعادلة حلان على الصورة

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\text{المميز}}}{٢أ}$$

$$\text{أما س} = \frac{-ب + \sqrt{\text{المميز}}}{٢أ}$$

$$\text{أو س} = \frac{-ب - \sqrt{\text{المميز}}}{٢أ}$$

مثال ١

استخدم قانون المميز لحل المعادلة التربيعية التالية :

$$٢س^٢ + ٥س - ٣ = \text{صفر}$$

$$أ = ٢ \quad ب = ٥ \quad ج = -٣$$

نستخرج أولاً المميز

$$\text{المميز} = ب^٢ - ٤أج$$

$$= ٥^٢ - ٤ \times ٢ \times (-٣)$$

$$= ٢٥ - (-٢٤)$$

$$= ٢٥ + ٢٤ = ٤٩$$

الآن بعدما استخرجنا ناتج المميز وهو ٤٩ نطبق في القانون العام حتى نستخرج الجذران

$$\frac{\sqrt{\text{المميز}} \pm \text{ب-}}{أ2} = \text{س}$$

أخذنا جذر ٤٩ ويساوي ٧

$$\frac{\sqrt{49} \pm 5-}{2 \times 2} = \text{س}$$

± معناها تحلها مره بالموجب
ومره بالسالب كما فعلنا هنا

$$\frac{7 \pm 5-}{4} = \text{س}$$

$$\text{أما س} = \frac{2}{4} = \frac{7 + 5-}{4}$$

$$\text{أو س} = \frac{12-}{4} = \frac{7 - 5-}{4}$$

التطبيقات الاقتصادية

مثال ١

في سوق إحدى السلع بفرض أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة من تلك السلعة في الأسبوع (ك مليون وحدة) وكان ثمن الوحدة الواحدة هو $2 - ك$ بحيث أن :

$$ت = ٢ - ك$$

وتبين أن التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج ك مليون وحدة في الأسبوع كما يلي :

$$ت = (٠,٣ + ٠,٥ ك) \text{ مليون ريال}$$

المطلوب :

- ١- أوجد دالة الإيراد الكلي (ي) ؟
- ٢- أوجد دالة الربح (ر) ؟
- ٣- أوجد كمية الإنتاج التي بها يمكن تحقيق ربح أسبوعي قدره ٠,٢٠ مليون ريال ؟
- ٤- ما هو الثمن (ت) الذي يحقق ربح أسبوعي قدره ٠,٢٠ مليون ريال .

الحل

$$(١) \text{ الإيراد الكلي} = \text{كمية المبيعات} \times \text{ثمن بيع الوحدة الواحدة}$$

نعوض في القانون

كمية المبيعات = هي نفسها عدد الوحدات التي في السؤال وتساوي (ك)
و ثمن البيع هو $٢ - ك$

$$ي = ك \times ت$$

$$= ك (٢ - ك)$$

$$= ٢ ك - ك^٢$$

دالة الإيراد الكلي هي : $ي = ٢ ك - ك^٢$

ضربنا ما
بخارج القوس
في ما بداخل
القوس أي $ك \times$
 $٢ = ٢ ك$ و $ك \times$
 $- ك = - ك^٢$
تبع

عوضنا في القانون

الإيراد الكلي = $٢ ك - ك^٢$
التكاليف الكلية = $٠,٣ + ٠,٥ ك$

$$(٢) \text{ الربح} = \text{الإيراد الكلي} - \text{التكاليف الكلية}$$

$$ر = ي - ت$$

$$= ٢ ك - ك^٢ - (٠,٣ + ٠,٥ ك)$$

نرتب المعادلة حتى تكون بصورة
معادلة الدرجة الثانية

$$\text{أس}^٢ + \text{ب س} + \text{ج} = \text{صفر}$$

$$- ك^٢ + ٢ ك - ٠,٣ - ٠,٥ ك = ٠$$

$$- ك^٢ + ٢ ك - ٠,٥ ك - ٠,٣ = ٠$$

$$- ك^٢ + ١,٥ ك - ٠,٣ = ٠$$

$$= - ك^٢ + ٢ ك - ٠,٣ - ٠,٥ ك$$

$$= - ك^٢ + ١,٥ ك - ٠,٣$$

حيث

دالة الربح هي : $r = - (ك) ٢ + ١,٥ ك - ٠,٣$

(٣) لإيجاد كمية الإنتاج (ك) التي من خلالها يمكن تحقيق ربح أسبوعي قدره ٠,٢٠ مليون ريال يتم التعويض في دالة الربح السابقة عن ($r = ٠,٢٠$) وعلى ذلك فإن :

$$- (ك) ٢ + ١,٥ ك - ٠,٣ = ٠,٢٠$$

$$٠ = ٠,٢٠ + ٠,٣ + ك ١,٥ - ٢ (ك) +$$

$$٠ = ٠,٥ + ك ١,٥ - ٢ (ك) +$$

دائماً طريقة القانون العام نقسم حدود المعادلة إلى أ و ب و ج

الحد الأول هو أ

والحد الثاني هو ب

والحد الثالث هو ج

نكتب إعداد الحدود مع إشارتها

$$٥ + = ج$$

$$١,٥ - = ب$$

$$١ + = أ$$

نستخرج أولاً المميز

$$\text{المميز} = ب^2 - ٤ أ ج$$

$$= - 1.5^2 - ٤ \times ١ \times ٠,٥٠$$

$$= - 2.25 - (2) = 0.25$$

الآن بعدما استخرجنا ناتج المميز وهو 0.25 نطبق في القانون العام حتى نستخرج الجذران

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\text{المميز}}}{٢ أ}$$

أخذنا جذر 0.25 ويساوي 0.5

\pm معناها تحلها مره بالموجب ومره بالسالب كما فعلنا هنا

$$س = \frac{\sqrt{0.25} \pm 1.5-}{1 \times 2}$$

$$س = \frac{0.50 \pm 1.5-}{2-}$$

$$س = \frac{1.5- + 0.5}{2-} = ٠,٥ \text{ أما}$$

$$س = \frac{1.5- - 0.5}{2-} = 1 \text{ أو}$$

(٤) لتحديد ثمن البيع الذي يحقق الربح المطلوب يكون على النحو التالي :
ثمن بيع الوحدة = ث = ٢ - ك وبالتالي نجد

- ١- إذا كانت ك = ١ فإن ث = ١ أي انه يمكن أن يحدد الثمن بريال واحد للوحدة وبالتالي يمكن بيع مليون وحدة أسبوعياً .
- ٢- إذا كانت ك = ٠,٥٠ فإن ث = ١,٥ أي انه يمكن يحدد الثمن بمبلغ ١,٥ ريال للوحدة وبالتالي يمكن بيع نصف مليون وحدة اسبوعياً

منحنيات إمكانيات الإنتاج :

تعتبر منحنيات إمكانيات الإنتاج من أهم التطبيقات الاقتصادية للدالة التربيعية وفي ظل وجود منحنى إمكانيات الإنتاج إما أن يكون المطلوب تقدير أقصى ما يمكن إنتاجه من أي من سلعتين مختلفتين أو إيجاد الكميات من كل السلعتين معاً في ظل وجود قانون معين (أو قاعدة معينة) يربط بين السلعتين .

فعلى سبيل المثال إذا كانت س ، ص تمثل كميات الإنتاج من سلعتين يتم إنتاجهما وفقاً لمنحنى إمكانيات إنتاج معين يمكن أن يكون قاعدة إنتاج السلعتين معاً في الصورة
س ثلاثة أمثال ص أو س ضعف ص أو س = ٥ ص أو

ومن هنا نستنتج أنه لا يمكن زيادة الكمية المنتجة من إحدى السلعتين إلا بتخفيض الكمية المنتجة من السلعة الأخرى كما أنه يفترض لأسباب اقتصادية أن منحنى تحويل المنتج يكون محدباً من الأسفل .

مثال ١

مصنع بمدينة جدة ينتج كميات س ، ص بآلاف الوحدات من سلعتين مختلفتين باستخدام نفس خطوات وطريقة الإنتاج وفقاً للمعادلة التالية الممثلة لمنحنى تحويل المنتج :

$$ص + ٢س + ٨ص - ٢٠ = ٠$$

المطلوب تحديد أقصى كميات يمكن إنتاجها من كل سلعة ؟

الحل

إذا أراد المصنع أن ينتج فقط السلعة س (أرادت أن تنتج أقصى كمية ممكن من السلعة س) فهذا يعني أن كمية ص = صفر وبالتالي فإن أقصى إنتاج ممكن من السلعة يمكن تحديده بالتعويض عن ص = صفر في المعادلة السابقة أي أن :

بفرض انه ينتج فقط س يعني
ص = صفر وبالتعويض بنفس
المعادلة تكون س = ٢٠

$$ص + ٢ + س + ٨ - ص = ٢٠ = ٠$$

$$ص + ٠ + س + ٠ = ٢٠ = \text{صفر}$$

$$س = ٢٠$$

أي أن أقصى كمية يمكن إنتاجها من السلعة الأولى = ٢٠٠٠٠ وحدة

وبالمثل فإن أقصى كمية يمكن للمصنع إنتاجها من ص نحددها بالتعويض عن س = صفر في المعادلة السابقة أي أن :

$$ص + ٢ + س + ٨ - ص = ٢٠ = ٠$$

$$ص + ٠ + ٢ + ٠ + ٨ - ص = ٢٠ = ٠$$

بفرض انه ينتج فقط ص يعني
س = صفر وبالتعويض بنفس المعادلة
تكون ص = (٢، ١٠) استخراجها
عن طريق القانون العام لأنها معادلة
من الدرجة الثانية

$$ص + ٢ + ٨ - ص = ٢٠ = ٠$$

ثوابت القانون :

دائما طريقة القانون العام نقسم
حدود المعادلة إلى أ و ب و جـ

الحد الأول هو أ

والحد الثاني هو ب

والحد الثالث هو جـ

نكتب إعداد الحدود مع إشارتها

$$١ = أ \quad ٤ = ب \quad جـ = -٢٠$$

نستخرج أولاً المميز

$$\text{المميز} = ب^2 - ٤أجـ$$

$$= -٢٠ \times ١ \times ٤ - ١٦ =$$

$$= -٦٤ - ١٦ = -٨٠$$

الآن بعدما استخرجنا ناتج المميز وهو -٨٠ نطبق في القانون العام حتى نستخرج الجذران

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\text{المميز}}}{٢أ}$$

أخذنا جذر ١٤٤ ويساوي ١٢

$$س = \frac{-٨ \pm \sqrt{١٤٤}}{١ \times ٢}$$

+ معناها تحلها مره بالموجب
ومره بالسالب كما فعلنا هنا

$$12 \rightarrow + \quad 8 \rightarrow -$$

$$\frac{12 + 8}{2} = \text{س}$$

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{12}{2} + \frac{8}{2} = \text{س} \quad \text{أما}$$

$$10 = \frac{20}{2} = \frac{12}{2} - \frac{8}{2} = \text{س} \quad \text{أو}$$

وحيث أن الكمية لا يمكن أن تكون بالسالب فنجد أن أكبر كمية يمكن إنتاجها من ص = ٢٠٠٠ وحدة إنتاج

مثال ٢

إذا كان منحنى التكلفة الكلية لمنتج معين هو

$$ت = ٢ ك + \frac{3}{2} ك^2 + ٤ ك + ت$$

حيث ك تمثل حجم الانتاج ، ت تمثل التكاليف الثابتة

المطلوب :

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية علماً بأن هذه التكاليف = ١٠٠٠ ريال عند ك = صفر

٢- إيجاد دالة التكاليف المتوسطة ؟

الحل

$$\text{التكاليف الكلية } ت = ٢ ك + \frac{3}{2} ك^2 + ٤ ك + ت$$

وحيث أن التكاليف الكلية = ١٠٠٠ ريال عند ك = صفر فإن :

معادلة التكاليف الكلية هي :

$$ت = ٢ ك + \frac{3}{2} ك^2 + ٤ ك + ت$$

$$١٠٠٠ + ٤ ك + \frac{3}{2} ك^2 + ٢ ك = ت$$

بقسمة التكاليف الكلية (ت) على عدد وحدات المنتجة (ك) تنتج التكاليف المتوسطة لأن

$$\frac{ت}{ك} = \frac{\text{التكاليف الكلية}}{\text{عدد وحدات المنتجة}} = \text{التكاليف المتوسطة (ت م)}$$

هل تعرف لماذا حظ الـ ١٠٠٠ هنا؟

لأنه يقول التكاليف الكلية = ١٠٠٠ عند ك = صفر حسناً !

دعونا نعوض بنفس المعادلة بقيمة ك = صفر

$$ت = ٢ ك + \frac{3}{2} ك^2 + ٤ ك + ت$$

$$ت = ٢ (٠) + \frac{3}{2} (٠) + ٤ (٠) + ت$$

$$ت = ٠ + ٠ + ٠ + ت$$

$$ت = ت$$

$$\frac{1000}{ك} + \frac{3ك}{ك} + \frac{2ك}{ك} + \frac{3ك}{2ك} = م$$

$$ت م = 2 + ك \frac{3}{2} + ك^2 + \frac{1000}{ك}$$

توازن السوق

يتحقق التوازن في السوق

إذا تعادل أو تساوى العرض مع الطلب أي العرض = الطلب

خطوات حل مسائل التوازن

١- تساوي معادلة الطلب بالعرض أي ط = ض

٢- ترتب المعادلة بحيث تكون على صورة المعادلة من الدرجة الثانية

$$أث^2 + بث + ج = صفر$$

٣- عندما تستخرج قيمة ث تعوض في احد المعادلتين إما معادلة العرض أو معادلة الطلب لكي تستخرج الكمية

مثال

أوجد الثمن (ث) بمئات الريالات والكمية (ك) بآلاف الأجهزة الكهربائية المنتجة لمعادلتي العرض والطلب التاليتين :

$$\text{معادلة العرض : } ض = ٣ - ث + ٢ث$$

$$\text{معادلة الطلب : } ط = ٢٧ - ث - ٣ث$$

يمكن إيجاد ثمن وكمية التوازن بمساواة العرض مع الطلب

$$ط = ض$$

$$٣ - ث + ٢ث = ٢٧ - ث - ٣ث$$

١- (س الإشارة) (العدد الأول) (س الإشارة) (العدد الثاني) ()

٢- نبحث عن عدد حاصل ضربيهما الحد الثالث (-١٢) ومجموعهما (-١)

وهما ٣، -٤

٣- الآن نكمل ما تبقى مابين الأقواس من الفقرة ١ وهي الإشارات و الأعداد

$$3\text{ث}^2 - 2\text{ث} - \text{ث} - 27 + 3 = \text{صفر}$$

$$2\text{ث}^2 - 2\text{ث} - 24 = \text{صفر}$$

$$\underline{2\text{ث}^2 - 2\text{ث} - 12 = \text{صفر}}$$

$$\text{صفر} = (\text{ث} + 3) (\text{ث} - 4)$$

$$\text{أما } \text{ث} = 3 \text{ - أو } \text{ث} = 4$$

أما $\text{ث} + 3 = 0$

$\text{ث} = 3 \text{ -}$

أو $\text{ث} - 4 = 0$

$\text{ث} = 4$

وحيث أن الثمن لا يمكن أن يكون سالباً فنجد أن توازن السوق يحدث عند مستوى
ثمن ٤٠٠ ريال للجهاز .

ولإيجاد كمية التوازن نعوض عن الثمن في معادلة الطلب او العرض

وبالتعويض في دالة الطلب نجد أن

$$\text{كمية التوازن (ك)} = 3 - 2\text{ث} + 3$$

$$= 3 - 4 + 2(4) =$$

$$= 16 + 3 - 4 = 17 \text{ وحدة إنتاج}$$

ثانياً : الدوال الأسية

الدالة الأسية

طرق تبسيط المقادير والحدود المحتويه على أسس

أولاً : عمليات الضرب والقسمة

- ١- تحليل الاساسات إلى عوامل أولية (٢, ٤, ٥,)
- ٢- دمج الأساسات المتشابهة في أساس واحد فإذا كانت ضرب نجمع الأسس وإذا كانت قسمة نطرح الأسس .

ثانياً : عمليات الجمع والطرح

- ١- تحليل الأساسات إلى عوامل أولية
- ٢- فك الأقواس والتخلص من الجذور بتطبيق القوانين
- ٣- دمج الأساسات المتشابهة في أساس واحد بتطبيق القوانين لكل مقدار على حده
- ٤- إخراج عامل مشترك بين حدود البسط والمقام وذلك بأصغر أس
- ٥- اختصار المقدار

حل المعادلات الأسية حسب القواعد التالية :

- ١- إذا اتفقت الأساسات فان : الأس = الأس
- ٢- إذا اتفقت الأسس فان الأساس = الأساس
- ٣- إذا اتفقت الأسس وكان الأساس مختلف فإن الأس = صفر

مثال ١

مندوبي مبيعات بإحدى المؤسسات التجارية بجدة يحصل الأول على $\frac{1}{5}$ ألف ريال

بينما يحصل الثاني على $\frac{1}{6}$ (٧٢٩) ألف ريال كراتب شهري ثابت والمطلوب

حساب ما يحصل عليه كل من المندوبين كراتب شهري ؟

الحل /

نحلل ٣٢ إلى العوامل الأولية
واستخراج القاسم المشترك .

في الجدول أدناه قمنا بتحليل العدد ٣٢
ودائماً عند التحليل نبدأ من ٢ ونرى
هل يقسم على العدد أم لا فإن لم نجده
يقسم نذهب لـ ٣ فإن لم نجده يقسم
نذهب إلى ٤ وهكذا وكلها بالاله ☺

$$\text{الراتب الشهري للمندوب الأول} = 1000 \times \frac{1}{5} \times 32 = 2000 \text{ ريال}$$

$$= 1000 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{52} =$$

$$= 1000 \times 2^{\frac{1}{5} \times 5} =$$

$$= 2 \times 1000 = 2000 \text{ ريال}$$

ضربنا أس القوس في
أس الرقم وهذا من
خصائص الأسس

كيف
أنت

52

من
تحليل
العدد
٣٢ كما
هو
موضح
في
الجدول

وأيضاً

63

$$\text{الراتب الشهري للمندوب الثاني} = 1000 \times \frac{1}{6} \times 729 = 3000 \text{ ريال}$$

$$= 1000 \times \left(\frac{1}{6} \right)^{63} =$$

$$= 1000 \times 3^{\frac{1}{6} \times 6} =$$

$$= 3 \times 1000 = 3000 \text{ ريال}$$

ضربنا أس القوس في
أس الرقم وهذا من
خصائص الأسس

٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	٢
$52 =$	

52

معناها
تكررت خمس
مرات في

٧٢٩	٣
٢٤٣	٣
٨١	٣
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	٣
$63 =$	

مثال ٢

بفرض أن أحد المرشحين حصل على **س** % من أصوات الناخبين في إحدى الدوائر الانتخابية حيث

$$\text{س} = \frac{\frac{3}{49} \times 1029 \times 343}{171 \times 21} \text{ والمطلوب :}$$

أوجد النسبة المئوية للأصوات التي حصل عليها ذلك المرشح ؟

الحل

أولاً نحلل جميع الأعداد التي تحتاج إلى تحليل انظروا جداول التحليل

٧	٣٤٣
٧	٤٩
٧	٧
	١

= 37

٧	١٠٢٩
٧	١٤٧
٧	٢١
٣	٣
	١

3 × 37

٣	٢١
٧	٧
	١

٧ × ٣

٧	٤٩
٧	٧
	١

27

٥	١٧١٥
٧	٣٤٣
٧	٤٩
٧	٧
	١

37 × 5

$$\frac{3 \times \overset{1029}{37} \times 3 \times \overset{343}{37}}{27 \times \overset{49}{37} \times \overset{1715}{5} \times \overset{21}{7} \times 3} = \frac{\frac{3}{49} \times 1029 \times 343}{1715 \times 21} = \text{س}$$

نقلنا ٤٩ إلى البسط بعد ماحللناه وتركناه لنبسّط السؤال ونبعد الكسر

حللنا العدد ٣٤٣ وكان الناتج = 37
حللنا العدد ١٠٢٩ وكان الناتج = 37 × 3
حللنا ٤٩ وكان الناتج = 27
حللنا ٢١ وكان الناتج = 7 × 3
حللنا ١٧١٥ وكان الناتج = 37 × 5

الآن نبسط بعد التحليل كيف ؟

في حالة الضرب : نأخذ الأساسات المتشابهة في البسط ونجمع أسسه انظر الأساس ٧ أخذنا أسسه وجمعناها

والعدد ٣ تكرر مرتين أخذنا أسسه وهي ١ لان الواحد دايم ماينكتب فصار

$$1+13$$

وفي المقام نجد الأساس ٧ تكرر ثلاث

$$\frac{1+13 \times 3+37}{2+3+17 \times 5 \times 3}$$

بعد جمع الأسس تكون بهذه الصورة

ونبسطها أكثر بأخذ الأساسات المتشابهة في البسط والمقام ونطرح أسسها لان من قواعد الأسس إذا كانت هناك قسمة وتريد تبسيطها وكانت الأساسات متشابهة تنقص أسسها من بعض وهنا نجد أنه لا يوجد سوى الأساس ٧ والأساس ٣ متشابهة في البسط والمقام نبسطها بطرح أسسه وجعلها بالمقام

$$\frac{23 \times 67}{67 \times 5 \times 3} =$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times \text{صفر}7}{5} = \frac{1-23 \times 6-67}{5} =$$

من المعروف أن $7^{\text{صفر}} = 1$ دائما إذا الأساس اسه صفر يكون ناتجه ١ لهذا طلع الناتج ٣ في البسط لان ١ في ٣ ب ٣

$$\text{النسبة المئوية للأصوات} = 100 \times \frac{3}{5} = 60\%$$

ضربناها ب ١٠٠ لأنه يريد النسبة المئوية

مثال ٢

بفرض أن احد مندوبي البيع بإحدى المؤسسات التجارية يحصل س ريال أسبوعياً مقابل دوام جزئي حيث تحدد س وفقاً للعلاقة الرياضية التالية :

$$\frac{1^{\frac{2}{5}}(5) \times \frac{1}{6}(625) \times \frac{1}{5}(125)}{\frac{3}{5}(3125) \times 3^{-(25)}} = س$$

٥	١٢٥
٥	٢٥
٥	٥
٥	١

$$3^5 =$$

والمطلوب حساب ما يحصل عليه ذلك الشخص أسبوعياً ؟

$$\begin{array}{r} 5 \quad 625 \\ 5 \quad 125 \\ 5 \quad 25 \\ 5 \quad 5 \\ 1 \end{array}$$

$$45 =$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 25 \\ 5 \quad 5 \\ 5 \quad 1 \end{array}$$

$$35 =$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 3125 \\ 5 \quad 625 \\ 5 \quad 125 \\ 5 \quad 25 \\ 5 \quad 5 \\ 1 \end{array}$$

$$55 =$$

الحل:

$$\frac{625 \quad 125}{(5)^{\frac{7}{5}} \times (45)^{\frac{1}{3}} \times (35)^{\frac{1}{5}}} = \text{س}$$

$$\frac{3125}{(55)^{\frac{3}{5}} \times (25)^{3-}}$$

ضربنا
أسس
الأقوا
س في
الأرقام
داخل
الأقوا
س
للتبسيط

$$\frac{(5)^{\frac{7}{5}} \times (5)^2 \times (5)^{\frac{3}{5}}}{(5)^3 \times (5)^{6-}} = \frac{(5)^{\frac{7}{5}} \times (5)^{\frac{4}{2}} \times (5)^{\frac{3}{5}}}{(5)^{\frac{15}{5}} \times (5)^{6-}}$$

نجمع الأسس طالما الأساسات
متشابهة لأنها ضرب ونجمع
الأسس في البسط ونجمع
الأسس في المقام

$$\frac{(5)^{1\frac{1}{5}}}{(5)^{3-}} = \frac{(5)^{\frac{7}{5} + 2 + \frac{3}{5}}}{(5)^{3+6-}}$$

لاحظ هنا بعدما جمعنا
الأسس في البسط والمقام
لنتشابه الأساس يبقى آخر
خطوه طالما الأساسات في
الكسور متشابهة نطرح
الأسس

$$(3-)^{-1\frac{1}{5}}(5) =$$

$$4\frac{1}{5}(5) =$$

$$= 862,3 \text{ ريال}$$

كيف تستخرج الأس بالالة الحاسبة ؟

$$862,3 = 4\frac{1}{5} = 4\frac{1}{5}(5) = \text{اضغط } 5 \text{ ثم علامة } ^ \text{ ثم } 4\frac{1}{5}$$

مثال ٤

موظف بجامعة الملك سعود يحصل على س ألف ريال كراتب شهري أوجد راتب
الموظف إذا تحدد المتغير س وفقاً للدالة الأسية التالية :

$$25^{س+1} = 125^{س-2}$$

الحل / لأن المجهول س يقع في الأس نوحده الأساسات

$$5^{س-2} (35) = 1^{س+1} (25)$$

$$15-س65 = 2+س25$$

إذا اتفقت **الأساسات** فإن **الأس = الأس** إذن $2س + 2 = 6س - 15$
نرتب المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف حتى نستخرج قيمة **س**

$$2س + 2 = 6س - 15$$

$$2س - 6س = -15 - 2$$

$$-4س = -17$$

$$س = \frac{-17}{-4}$$

$$\text{الراتب الشهري للموظف} = \frac{-17}{-4} \times 1000 = 4250 \text{ ريال}$$

مثال ٥

إذا تم تحديد الراتب الشهري الثابت لأحد مندوبي المبيعات بإحدى المؤسسات التجارية بجدة بأنه يعادل س ألف ريال . أوجد راتب ذلك الشخص إذا تحدد المتغير س وفقاً للدالة الآتية التالية :

٢	١٢٨
٢	٦٤
٢	٣٢
٢	١٦
٢	٨
٢	٤
٢	٢
٢	١

$72 = 2^س$

$$128 = 7(س - ٤)$$

$$72 = 7(س - ٤)$$

$$س - ٤ = 2$$

$$س = ٤ + 2$$

$$س = 6$$

بما أن الأسس متشابهة فإن الأساس = الأساس
س-٤ = ٢ نجعل المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف كما هو موضح

$$\text{الراتب الشهر للمندوب} = 6 = 1000 \times 6 = 6000 \text{ ريال}$$

ضربها في ١٠٠٠ لأنه
يقول س ألف ريال

مثال ٦

إذا تم تقدير صافي الربح الشهري لإحدى المؤسسات التجارية بجدة بأنه يعادل س ألف ريال أوجد صافي الربح إذا تحدد المتغير س وفقاً للدالة الأسية

$$75 - 3^5 = 75 - 3^8$$

الحل

$$75 - 3^5 = 75 - 3^8$$

حيث أن الأس = الأس والأساس لا يساوي الأساس

إذن الأس = صفر

أول ما تكون المسألة بهذه الطريقة
تأخذ الأس وتساويه بالصفر وتحل
المعادلة كالتالي

$$3^x - 75 = 75 - 3^8$$

$$3^x = 75$$

$$3 = \frac{75}{3}$$

$$\text{صافي الربح} = 25 = 1000 \times 25 = 25000 \text{ ريال شهرياً}$$

ثالثاً : الدوال اللوغاريتمية

اللوغاريتمات

تستخدم في تسهيل العمليات الحسابية وتحسب عن طريق الآلة الحاسبة وترمز بالرمز
log

مفهوم اللوغاريتم

من الدراسة السابقة للأسس وجدنا أن $128 = 2^7$

٢ تعني أسس و ٧ تعني أس و ١٢٨ تعني العدد

بالمقابل يمكن أن نطلق على ١٢٨ العدد وعلى ٢ الأساس وعلى ٧ اللوغاريتم

ويمكن تعبيرها رياضياً لـ $7 = \log_2 128$

القواعد الأساسية للوغاريمات :

$$(1) \text{ لوس } (أ \times ب) = \text{ لوس } أ + \text{ لوس } ب$$

فمثلاً $\text{ لوس } (١٠ \times ٣) = \text{ لوس } ١٠ + \text{ لوس } ٣$

$$(2) \text{ لوس } أ + \text{ لوس } ب = \text{ لوس } (أ \times ب)$$

فمثلاً $\text{ لوس } ١٠٠٠٠ + \text{ لوس } ١٠ = \text{ لوس } (١٠٠٠٠ \times ١٠)$

$$٤ = ٣ + ١ = \text{ لوس } ١٠٠٠ + \text{ لوس } ١٠ =$$

$$(3) \text{ لوس } \left(\frac{أ}{ب}\right) = \text{ لوس } أ - \text{ لوس } ب$$

فمثلاً: $\text{ لوس } \left(\frac{٣}{٥}\right) = \text{ لوس } ٣ - \text{ لوس } ٥$

$$(4) \text{ لوس } أ - \text{ لوس } ب = \text{ لوس } \left(\frac{أ}{ب}\right)$$

فمثلاً $\text{ لوس } ١٠ - \text{ لوس } ٣ = \text{ لوس } \left(\frac{١٠}{٣}\right)$

$$(5) \text{ لوس } ١ = ٠$$

فمثلاً: $\text{ لوس } ١ = ٠$ ، $\text{ لوس } ١٠ = ١$ وهكذا

$$(6) \text{ لوس } (ب)^ن = ن \times \text{ لوس } ب$$

فمثلاً: $\text{ لوس } (٣)^٢ = ٢ \times \text{ لوس } ٣$

$$(7) ن \times \text{ لوس } ب = \text{ لوس } (ب)^ن$$

فمثلاً: $٦ \times \text{ لوس } ٩ = \text{ لوس } (٩)^٦$

$$(8) \text{ لوس } ١ = \text{ صفر}$$

$$(9) \text{ لوس } \left(\frac{\text{لوس } 10 \text{ ص}}{\text{لوس } 10 \text{ س}}\right) = \text{ لوس } (ص)$$

فمثلاً: $\text{ لوس } ٧ (٣٦٥) = \frac{\text{لوس } 10 (365)}{\text{لوس } 10 (75)}$

ويمكن تحويل المعادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية حيث أنه إذا أمكن التعبير عن المقدار (ص) في الصورة :

$$\text{لوس ص} = \text{أ} \dots\dots\dots (\text{صورة لوغاريتمية})$$

$$\text{فإن ص} = \text{س}^{\text{أ}} \dots\dots\dots (\text{صورة أسية})$$

$$\text{فمثلا : لو} ١٠٠٠٠ = ٤ \dots\dots\dots (\text{صورة لوغاريتمية})$$

$$\text{.....} ١٠ = ١٠٠٠٠ \dots\dots\dots (\text{صورة أسية})$$

ومن هنا يمكن القول بأن اللوغاريتم هو أس أساس العدد.

ولحل المعادلة اللوغاريتمية يتم تحويلها من صورة لوغاريتمية إلى صورة أسية وفقا للعلاقة السابقة ، ثم يتم التعامل معها وحلها وفقا لقواعد حل المعادلة الأسية كما سبق.

إيجاد عناصر المعادلة اللوغاريتمية

١- إيجاد العدد بمعلومية الأساس واللوغاريتم

مثال ١

إذا كانت مدخرات أحد المواطنين تعادل س ألف ريال بأحد البنوك أوجد مدخرات ذلك الشخص إذا تحددت قيمة س وفقاً للمعادلة التالية :

$$\text{لو}_2 \text{س} = ٧$$

الحل :

نوجد المتغير **س** بحل المعادلة اللوغاريتمية السابقة

$$\text{لو}_2 \text{س} = ٧$$

في هذا المثال إذا كانت لو بهذه الطريقة تأخذ ٢ تخليه أساس و ٧ تخليها أس وتستخرج الناتج

$$\text{س} = 2^7 = ١٢٨$$

مدخرات الشخص بالبنك = س × ١٠٠٠ ريال

$$١٢٨٠٠٠ = ١٠٠٠ \times ١٢٨ \text{ ريال}$$

٢- إيجاد العدد بمعلومية العدد واللوغاريتم

مثال ٢

إذا تم تحديد الراتب الشهري الثابت لأحد مندوبي البيع بإحدى المؤسسات التجارية بجدة بأنه يعادل س ألف ريال أوجد راتب ذلك الشخص إذا تحدد المتغير س وفقاً للدالة اللوغاريتمية التالية :

$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 625 \\ 125 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$
$$4^5 =$$

$$\text{لوس} \quad 625 = 4$$

بتحويلها إلى الصورة الأسية

حللنا ٦٢٥ إلى العوامل
الأولية وبما أن الأسس
تشابهت إذن
الأساس = الأساس

$$4^{\text{س}} = 625$$

$$4^{\text{س}} = 4^5$$

س = ٥ (لأن الأسس متساوية)

الراتب الشهري للمندوب = س × ١٠٠٠

$$= ٥ \times ١٠٠٠ = ٥٠٠٠ \text{ ريال}$$

٣- إيجاد اللوغاريتم بمعلومية العدد والأساس

مثال ٣

إذا تم تحديد المصروف الشهري الثابت لأحد طلاب كلية الزراعة بأنه يعادل س ألف ريال أوجد مصروف ذلك الطالب إذا تحدد المتغير س وفقاً للدالة اللوغاريتمية:

$$\begin{array}{r} \overline{7 \quad 343} \\ 7 \quad 49 \\ 7 \quad 7 \\ \underline{\quad \quad 1} \\ 37 = \end{array}$$

$$\text{لو} 7 \quad 343 = \text{س}$$

الحل /

نوجد المتغير س بحل المعادلة اللوغاريتمية السابقة

$$\text{لو} 7 \quad 343 = \text{س} \quad (\text{بتحويلها إلى الصورة الأسية})$$

$$7^{\text{س}} = 343 \quad \text{وبالتحليل تنتج أن}$$

$$7^3 = 343$$

ولأن الأساسات متساوية فإن $\text{س} = 3$

المصروف الشهري للطالب = $1000 \times \text{س}$

$$= 3000 = 1000 \times 3 \text{ ريال}$$

أهم تطبيقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

١ - تقدير عدد السكان عند تزايد السكان بمعدل ثابت.

٢ - أستهلاك الأصول الثابتة بطريقة القسط المتناقص .

مثال ١

بفرض أن السكان في إحدى الدول يتزايدون بمعدل سنوي ٤ % وأن عدد السكان يساوي ٥٠ مليون نسمة عام ١٤٢٥ هـ والمطلوب تقدير عدد السكان في عام ١٤٣٥ هـ؟

ر تعني المعدل السنوي

س تعني العدد

الحل /

س = ٥٠ مليون ، ر = ٤% سنوي ، ن = ١٤٣٥ - ١٤٢٥ = ١٠ سنوات

لاستخراج قيمة ن اللي هي عدد السنوات ننقص سنة المقارنة من سنة الأساس أي الجديدة - القديمة في هذا المثال نقصنا ١٤٢٥ - ١٤٢٥ = ١٠ سنوات

$$س_n = س_1 (1 + r)^{n-1}$$

عدد السكان في سنة ١٤٣٥ هـ = $50 (1 + 0,04)^{10}$

$$= 50 (1,04)^{10}$$

$$= 74 \text{ مليون نسمة تقريباً} = 2,480,244 \times 50 =$$

استخرجنا ١,٠٤ أس ١٠
بالالة الحاسبة

كيف تستخرج قيمة الأس من الة الحاسبة أحسب $(1.04)^{10}$ ؟

10

علامة ^

1.04

1,480,244

مثال ٢

بفرض أن سكان أحد المناطق يتزايدون بنسبة ثابتة وكان عدد السكان في تلك المنطقة سنة ١٤١٥ هـ = ٤٤ مليون نسمة وكان عدد السكان في سنة ١٤٢٥ هـ يعادل ٦٤ مليون نسمة : المطلوب :

- ١- ما هو معدل الزيادة السنوية للسكان
- ٢- في أي سنة سيصل عدد السكان إلى ١٠٤ مليون نسمة .
- ٣- ما هو عدد السكان في السنة ١٤٣٥ هـ .

الحل :

باعتبار سنة ١٤١٥ هـ سنة أساس نجد أن :

$$س = ٤٤ \text{ مليون نسمة}$$

$$ن = ١٤١٥ - ١٤٢٥ = ١٠$$

$$س_ن = ١٠ = ٦٤ \text{ مليون نسمة}$$

١- معدل الزيادة السنوية للسكان

س تعني عدد السنة الأولى أو القديمة
ن يتم استخراجها كما ذكرت لكم في المثال
السابق السنة الجديدة - السنة القديمة
س_ن وتعني عدد السنة الجديدة أو الثانية
وبعد استخراجها نطبق على القانون
مباشرة

$$ز = \left(\frac{س_ن}{س} \right)^{\frac{1}{ن}} - ١$$

$$ز = \left(\frac{64}{44} \right)^{\frac{1}{10}} - ١ = ١,٠٣٨ - ١ = ٣,٨ \% \text{ سنوياً}$$

٢- تحديد النسبة التي سيصل فيها عدد السكان إلى ١٠٤ ملايين نسمة .

$$س_ن = س$$

وباعتبار أن سنة ١٤١٥ هـ هي سنة الأساس نجد أن :

$$س = ٤٤ \text{ مليون}$$

$$س_ن = ١٠٤ \text{ مليون}$$

$$\frac{\text{لوسن} - \text{لوس}}{\text{لو} (1+z)}$$

$$\text{ن} = \frac{\text{لو} - 104}{\text{لو} (0.038+1)} = \frac{1.64-2.017}{0.0162} = \text{٢٣ سنة}$$

وعلى ذلك فان عدد السكان سيصل إلى ١٠٤ ملايين نسمة بعد ٢٣ سنة من عام ١٤١٥ أي في عام ١٤٣٨ هـ

طريقة أخرى

يمكن أخذ سنة ١٤٢٥ هـ كسنة أساس لتحديد السنة المطلوبة فيكون

$$\text{س} = ٦٤ \text{ مليون}$$

$$\text{سن} = ١٠٤ \text{ مليون}$$

$$\text{ن} = \frac{\text{لو} - 104}{\text{لو} (0.038+1)} = \frac{1.806-2.017}{0.0162} = \text{٢٣ سنة}$$

وعلى ذلك فان عدد السكان سيصل إلى ١٠٤ مليون نسمة بعد ١٣ سنة من عام ١٤٢٥ هـ أي في عام ١٤٣٨ هـ تقريباً

٣ - تقدير عدد السكان في السنة ١٤٣٥ هـ

باعتبار أن سنة ١٤١٥ هـ هي سنة الأساس :

$$\text{س} = ٤٤ \text{ مليون} \quad \text{ن} = ١٤٣٥ - ١٤١٥ = ٢٠ \quad \text{ز} = ٠,٠٣٨$$

$$\text{سن} = \text{س} (1+z)^{\text{ن}}$$

$$\text{عدد السكان في سنة ١٤٣٥ هـ} = \text{س} (1+z)^{\text{ن}} = ٤٤ \times (1+0,038)^{20} = ٩٢,٧٧ \text{ مليون نسمة}$$

الفائدة المركبة

كيف تحسب الفائدة المركبة ؟

عن طريق هذا القانون



$$ص = س (١ + ف)^ ن$$

س = تعني قيمة المبلغ

ف = تعني الفائدة خلال (سنة - ربع سنة - ثلث سنه - نص سنة)

ن = تعني السنوات

جميع تلك القيم تأتي في السؤال مباشرة لكن **ن** هناك عدة ملاحظات أريد منك أن تنبه لها حتى تستطيع أن تحددتها بالطريقة الصحيحة

$$ن \times ١ = \text{إذا كانت الفائدة خلال سنة كاملة}$$

$$ن \times ٢ = \text{إذا كانت الفائدة خلال نصف سنة}$$

$$ن \times ٣ = \text{إذا كانت الفائدة خلال ثلث سنة}$$

$$ن \times ٤ = \text{إذا كانت الفائدة خلال ربع سنة}$$

مثال ١

اوجد جملة مبلغ ٥٠٠٠ ريال في نهاية ٥ سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوي قدره ١١% ؟

الحل / س = ٥٠٠٠ ، ف = ١١% ، ن = ٥ سنوات

س = المبلغ .
ف = الفائدة .
ن = عدد السنوات مع الأخذ بالاعتبار هل الفائدة سنه كاملة أم نصف سنوي أم ربع سنوية أم ثلث سنوية .

$$ص = س (١ + ف) ^ ن$$

$$\text{جملة المبلغ} = ٥٠٠٠ (١ + 0.11) ^ ٥$$

لاحظ هنا السنة عددها ٥ ولم تتغير لأنه قال في السؤال فائدة مركبة سنوي أي ٥ × ١ = ٥

قيمة المبلغ ومقداره ٥٠٠٠

هذي مقدار الفائدة ١١% أي ١١ قسمة ١٠٠ = ٠,١١

$$١,٦٨٥.٥٨١٥٥ \times ٥٠٠٠ = ٨٤٢٥,٣ \text{ ريال}$$

كيف تستخرج قيمة الأس من اله الحاسبة أحسب $١.١١^٥$ ؟

١,١ ← علامة ^ ← ٥

١ ٦ ٨ ٥ . ٥ ٨ ١ ٥ ٥ -

تمارين

تدريب ١

أوجد حل المعادلة التالية باستخدام طريقة التحليل ؟

$$٣س٢ + ٧س - ٦ = ٠$$

تدريب ٢

أوجد جذري المعادلة التالية باستخدام طريقة التحليل للعوامل

$$س٢ - ١٢س + ٠ = ٠$$

تدريب ٣

أوجد جذري المعادلة التالية باستخدام طريقة التحليل للعوامل :

$$س٢ + ٩س + ١٤ = ٠$$

تدريب ٤

أوجد جذري المعادلة التالية باستخدام طريقة التحليل للعوامل :

$$٤ - = (١ - س ٣) (٣ + س ٢)$$

تدريب ٥

باستخدام قانون المميز أوجد حل المعادلة التالية :

$$س٢ + ٥س - ٣ = ٠ \text{ صفر}$$

تدريب ٦

شركة صناعية بمدينة جدة تنتج كميات س ، ص من سلعتين مختلفتين باستخدام نفس خطوات وطريقة الإنتاج وفقاً للمعادلة التالية الممثلة لمنحنى تحويل المنتج :

$$٢ص٢ + س + ص - ٢٠ = ٠$$

فإذا إرادات الشركة أن تنتج كميات من كل من س ، ص بنسبة معينة مثل $س = ٥ص$ حدد كميات الإنتاج من السلعتين س ، ص ؟

تدريب ٧

أوجد الثمن (ث) والكمية التوازنية لمعادلتى العرض والطلب التاليتين :

$$\begin{aligned} \text{معادلة الطلب : } & \text{ط} = 5\text{ث}^2 - 6\text{ث} + 20 \\ \text{معادلة العرض = ض} & = 4\text{ث}^2 + 2\text{ث} + 5 \\ & \text{(استخدم قانون المميز بالحل)} \end{aligned}$$

تدريب ٨

أوجد الثمن (ث) والكمية لمعادتي العرض والطلب التاليتين

$$\begin{aligned} \text{معادلة الطلب : } & \text{ط} = 8\text{ث}^2 - 4\text{ث} - 20 \\ \text{معادلة العرض = ض} & = 5\text{ث}^2 + 3\text{ث} - 14 \\ & \text{(استخدم قانون المميز بالحل)} \end{aligned}$$

تدريب ٩

إذا كانت الكمية المعروضة لعدد من لعب الأطفال التي تنمي التفكير الابداعي تعطي بالمعادلة $\text{ض} = 10\text{ث}^2 + 2\text{ث}$ حيث (ث) ثمن اللعبة الواحدة و (ض) المعروض من اللعب فإذا كان الطلب والإقبال على هذا النوع من اللعب يعطي بالمعادلة $\text{ط} = -102\text{ث} + 4560$ فما هو ثمن اللعبة التي يكون عندها حالة التوازن في السوق (استخدم قانون المميز بالحل)؟

تدريب ١٠

ماهي الجملة التي يؤول إليها مبلغ ٥٠٠٠ ريال بعد ٤٠ سنة إذا حسبت الفوائد المركبة بمعدل سنوي ١١%؟

تدريب ١١

استثمر شخص مبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه لمدة ٥ سنوات بمعدل فائدة مركبة ١١% أوجد جملة المستحق في نهاية المدة .

تدريب ١٢

ماهي الجملة التي يؤول إليها مبلغ ٥٠٠٠ ريال في نهاية ٥ سنوات إذا حسبت الفوائد بمعدل ١٢% سنوياً .