المحاضرة الأولى

العمليات الجبرية للأسس والجذور وتطبيقاتها

المنفعة *هي شعور المستهلك بالرضا لاستهلاكه لسلعة معينة و قد قسم الكلاسيكيون المنفعة إلى*
منفعة كلية: *التي تعني مجموع المنافع التي يتحصل عليها المستهلك نتيجة لاستهلاكه لسلعة معينة و هي تبقى في تزايد مستمر إلى تصل إلى درجة عظمى لتتناقص بعدها*
منفعة حدية: *التي تعني الفرق بين المنفعة الكلية و المنفعة الكلية التي قبلها و هي تنقسم إلى منفعة حدية مكتسبة و منفعة حدية مضحى بها و هي تتناقص باستمرار*
المكتسبة منها *هي الدخل الذي كان الفرد مستعدا لاستغلاله*
المضحى بها *هو الدخل الذي استغله الفرد فعلا في السلع*

لتحديد المنفعه الحدية يكون عبر القانون التالي

$$م ح ن = م ك ن - م ك ن - 1$$

ن تعني الكمية المستهلكة كما سنلاحظ في المثال التالي

مثال ١

الكمية المستهلكة من السلعة	المنفعة الكلية	المنفعة الحدية
١	٣	-
٢	٥,٥	٢,٥
٣	٧,٥	٢,٠
٤	٩	١,٥
٥	١٠	١,٠
٦	١٠,٥	٠,٥
٧ > أقصى حد للمنفعة الكلية تم نلاحظ التناقص	١٠,٥	٠
٨ > من هنا يبدأ التناقص للمنفعة الكلية	١٠,٠	-٠,٥

قبل حل المثال نلاحظ التالي

إنه كلما زادت الكمية المستهلكة زادت المنفعة الكلية حتى تصل إلى أقصى حد هي الكمية (٧) ثم تتناقص ونلاحظ أن المنفعة الحدية تتناقص عند زيادة الكمية المستهلكة

ومما سبق يمكن الإجابة على الأسئلة التالية :

- ما علاقة المنفعة الكلية والكمية المستهلكة؟

هي علاقة طردية إلى حد معين .!

- ما علاقة المنفعة الحدية والكمية المستهلكة ؟

هي علاقة عكسية

نأتي لحل المثال

حدد المنفعة الحدية عند استهلاك (أ) **ثلاث وحدات** (ب) **وخمس وحدات** من السلعة؟

الحل / نحل الفقرة الأولى وهي عند استهلاك ٣ وحدات

نبدأ بالحل عبر القانون الذي ذكرته أعلاه وهو

$$م ح_{ن} = م ك_{ن} - م ك_{ن-1}$$

ن تعني الكمية المستهلكة كما سنلاحظ في المثال التالي

م ح تعني المنفعة الحدية

م ك تعني المنفعة الكلية

وبتوضيح أكثر لقانون المنفعة الحدية

المنفعة الحدية = المنفعة الكلية عند استهلاك وحده – المنفعة الكلية للوحدة التي قبلها

أي إذا قال لك تحديد المنفعة الحدية عند وحده معينه نقول مثلاً خمس وحدات تكون خمس وحدات وأربع وحدات

عند استهلاك ثلاث وحدات أي ان ن = ٣

$م_{ح}3 = م_{ك}3 - م_{ك}3 - 1$

$م_{ح}3 7.5 = - 5.5$

$= 2$

من أين أتت 7.5 و 5.5 ؟

من الجدول أعلاه حيث أن المنفعة الكلية عند استهلاك ٣ وحدات هي ٧,٥ و عند استهلاك وحدتين هي ٥,٥

ونلاحظ في القانون أن المنفعة الكلية الاخيره نقصنا ٣ وحدات من ١ لان القانون يطلب وحدات التي قبل الوحدة المستهلكة المطلوبة في السؤال وتصير ٢ بدل من ٣ من اجل ذلك كانت المنفعة الكلية ٥,٥ وليست كالسابقة ٧,٥

وعند حل الفقرة الثانية وهي حدد المنفعة الكلية عند خمس وحدات نتبع نفس الخطوات السابقة

توازن المستهلك :

يكون ذلك عندما يحصل المستهلك على أقصى منفعة ممكنه في حدود دخله

- حسناً كيف نستطيع أن نعلم أن هناك توازن ؟

عبر شرطين هما

- المنفعة المكتسبة = المنفعة المضحى بها
- المنفعة الحدية = الثمن ⟵ م ح = ث

- ما معنى المنفعة المكتسبة والمنفعة المضحى بها ؟

المنفعة المكتسبة هوا لدخل الذي كان الفرد مستعدا لاستغلاله

المنفعة المضحى بها هو الدخل الذي استغله الفرد فعلا في السلع

عندي مثلاً ١٠٠٠ ريال نويت أني اشتري بجميع هالمبلغ سلعه معينه هذا يسمى منفعة مكتسبة ومثلا إذا شريت بخمسمائة ريال سلعه تكون هذي منفعة مضحى بها

نلاحظ هنا أن المنفعة المكتسبة = المنفعة المضحى بها

٥٠٠ قيمة السلعة والباقي ٥٠٠ ريال منفعة مكتسبة إذن تحقق التوازن.

حسناً نذهب للشرط الثاني يقول

المنفعة الحدية = الثمن

المنفعة الحدية هي المنفعة المكتسبة + المنفعة المضحى بها

إذا تساوت هذه معه الثمن نكون حققنا توازن

سؤال :

ماذا يكون هناك :

إذا كانت المنفعة الحدية اكبر من الثمن؟

إذا كانت المنفعة الحدية اصغر من الثمن ؟

إذا كانت المنفعة الحدية اكبر من الثمن يكون هناك **فائض**

مثال إذا كانت المنفعة الحدية عندي هي ١٠٠٠ ريال وشريت جهاز بـ ٥٠٠ ريال يكون هناك فائض مقداره ٥٠٠ ريال

أما إذا كانت المنفعة الحدية اصغر من الثمن يكون هناك **خسارة**

مثال إذا كانت المنفعة الحدية ١٠٠٠ ريال وشريت جهاز ١٢٠٠ ريال راح أضيف ٢٠٠ ريال زيادة وأنا حاط أصلاً ميزانيتي ١٠٠٠ تكون الخسارة مقدارها ٢٠٠ ريال .

مثال٢ على التوازن

عدد الوحدات المشتراه	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
المنفعة الحدية	٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣
الثمن (بالريال)	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥

المطلوب تحديد:

١- وضع توازن المستهلك بافتراض تقويم وحدات المنفعة بالنقود (الريال)
٢- الوضع الذي يحقق في المستهلك فائضاً أو خسارة
٣- مدى التأثير الذي يحدث على المستهلك في حال ما قامت الحكومة بفرض ضريبة على المنتج قدرها ٣ ريالات على الوحدة .

الحل :

يتحقق توازن المستهلك عندما تكون م ح = ث = ١٥
أي عند استهلاك ٦ وحدات من السلعة يكون هناك توازن

٢- يحقق المستهلك **فائضاً** إذا كانت المنفعة اكبر من الثمن وذلك يتحقق عند شراء الوحدات من ١ إلى ٥

كيف يتم حساب الفائض؟

الفائض = (المنفعة الحدية للسلعة الأولى – الثمن السلعة الأولى) + (المنفعة الحدية للسلعة الثانية – الثمن للسلعة الثانية) ..... وهكذا

اذن نحسب الفائض في هذا السؤال كالتالي

الوحدة	المنفعة الحدية - الثمن	مقدار الفائض

١	٢٠ ــ ١٥	٥
٢	١٩ ــ ١٥	٤
٣	١٨ ــ ١٥	٣
٤	١٧ ــ ١٥	٢
٥	١٦ ـ ١٥	١
مجموع الفائض		١٥ ريالاً

يحقق المستهلك خسارة عندما تكون المنفعة الحدية اصغر من الثمن وهو ما يتحقق عند استهلاك الوحدات ٧ و ٨

الوحدة	المنفعة الحدية ـ الثمن	مقدار الفائض
٧	١٤ ـ ١٥	١-
٨	١٣ ـ ١٥	٢-
مجموع الخسارة		٣- ريالات

ج – عند فرض الحكومة ضريبة على المنتج قدرها ٣ ريالات على الوحدة في هذه الحالة يحقق المستهلك خسارة

بما أن الضريبة مقدارها ٣ ريالات إذا يكون سعر السلعة ١٨ لان سعرها الأساسي ١٥ + ٣ مقدار الضريبة = ١٨ إذن :

١- ثمن الوحدة سيرتفع إلى ١٨ ريالاً بدلاً من ١٥ ريالاً ومن ثم يتحقق التوازن عند مستوى أقل أي عند شراء ٣ وحدات من السلعة حيث المنفعة الحدية = الثمن = ١٨

٢- ينخفض فائض المستهلك إلى ٣ ريال فقط وذلك لشراء ١ و ٢ بدلا من ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥

حيث أن

الوحدة	المنفعة الحدية - الثمن	مقدار الفائض
١	٢٠ – ١٨	٢
٢	١٩ - ١٨	١
مجموع الفائض		٣ ريالات

الإنتاج وعناصر الإنتاج

الإنتاج الكلي : يمثل ما ينتجه كل عناصر الإنتاج

الإنتاج المتوسط يمثل متوسط إنتاجية العنصر المتغير

= الإنتاج الكـــلـــــي ÷ عدد وحدات العنصر المتغير

الإنتاج الحدي : يمثل ما يضيفه كل عنصر إنتاجي جديد للإنتاج الكلي

= Δ الانتاج الكلي ÷ Δ كمية عنصر الانتاج المتغير

Δ = هذه تعني الإنتاج الكلي لنفس العامل أو العنصر – العامل أو العنصرالذي قبله

يعني نفس العامل أو العنصر ناقصاً العامل أو العنصر الذي قبله

مثال ٣

إذا كان :

عدد العمال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
إنتاج كلي	١	٣	٦	١٠	١٣	١٥	١٦	١٦	١٥	١٣

المطلوب : احسب الإنتاج المتوسط والحدي عند العامل ٤ والعامل ٧ والعامل ١٠

الحل /

أولاً : حساب الإنتاج المتوسط والحدي عند العامل (٤) :

الإنتاج المتوسط = الإنتاج الكلي عند ٤ عمال ÷ عدد العمال

= 10 ÷ 4 = 2.5 وحدة

الإنتاج الحدي = $\frac{\text{الانتاج الكلي عند العامل 4} - \text{الانتاج الكلي عند العامل السابق}}{\text{عدد العمال الجديد 4} - \text{عدد العمال السابق 3}}$

= $\frac{6-10}{3-4}$ = 4 وحدات

ثانياً : حساب الإنتاج المتوسط والحدي عند العامل (٧) :

الإنتاج المتوسط = الإنتاج الكلي عند العامل ٧ ÷ عدد العمال

= 16 ÷ 7 = 2.3 وحدة

الإنتاج الحدي = $\frac{\text{الانتاج الكلي عند العامل 7} - \text{الانتاج الكلي عند العامل السابق}}{\text{عدد العمال الجديد 7} - \text{عدد العمال السابق 6}}$

= $\frac{15-16}{6-7}$ = 1 وحدات

ثالثاً: حساب الإنتاج المتوسط والحدي عند العامل (١٠) :

الإنتاج المتوسط = الإنتاج الكلي عند العامل ١٠ ÷ عدد العمال

= 13 ÷ 10 = 1.3 وحدة

الإنتاج الحدي = $\frac{\text{الانتاج الكلي عند العامل 10} - \text{الانتاج الكلي عند العامل السابق}}{\text{عدد العمال الجديد 10} - \text{عدد العمال السابق 9}}$

= $\frac{15-13}{9-10}$ = -2 وحدة

الإيراد الكلي والمتوسط والحدي

الربح (ر) = الإيراد (ي) – التكاليف (ي)

الإيراد الكلي (ي) = الثمن × الكمية المباعة من السلعة

$$\text{الإيراد المتوسط (ي م)} = \frac{\text{الايراد الكلي(ي)}}{\text{عدد الوحدات(ك)}}$$

$$\text{الإيراد الحدي (ي ح)} = \frac{\Delta \text{ الايرادات الكلي}}{\Delta \text{ عدد الوحدات}}$$

مثال ٤

الجدول التالي يوضح حجم المبيعات من سلعة ما (ك) عند المستويات المختلفة من الأثمان (ث) بمئات الريالات :

حجم المبيعات	١	٢	٣	٤	٥	٦
الثمن	١٠	٩	٨	٧	٦	٥

المطلوب :حساب مستويات الإيراد الكلي (ي) والإيراد الحدي (ي ح) ؟

الحل

- **لإيجاد** الإيراد الكلي نضرب حجم المبيعات في الثمن كما هو موضح في الجدول
- **لإيجاد** الإيراد الحدي دائما حجم المبيعات أو الكمية رقم ١ تكون فاضيه كما هو موضح في الجدول أما رقم ٢ نأخذ الفرق بين الإيراد الكلي لـ رقم ٢ وبين الإيراد الكلي رقم ١ قسمة الفرق بين حجم المبيعات رقم ٢ وحجم مبيعات رقم ١ وهكذا

حجم المبيعات	الثمن	الإيراد الكلي	الإيراد الحدي
١	١٠	١٠ = ١٠ ×١	–
٢	٩	١٨ = ٩ × ٢	

			$\frac{10-18}{1-2}$ = ٨
٣	٨	٣ × ٨ = ٢٤	$\frac{18-24}{2-3}$ = ٦
٤	٧	٤ × ٧ = ٢٨	$\frac{24-28}{3-4}$ = ٤
٥	٦	٥ × ٦ = ٣٠	$\frac{28-30}{4-5}$ = ٢
٦	٥	٦ × ٥ = ٣٠	$\frac{30-30}{5-6}$ =صفر

تكاليف الإنتاج

التكاليف الكلية للوحدة الإنتاجية (ت) في الأجل القصير تتكون من شقين يمكن تلخيصها في التالي :

أ – التكاليف الثابتة (ت ث) : وهي تمثل تكاليف عناصر الإنتاج المستقلة عن التغيرات في حجم الإنتاج .

التكاليف الثابتة (ت ث) = عدد الوحدات المستخدمة من العنصر الثابت × ثمنها (ث)

ب- التكاليف المتغيرة (ت غ) : وهي تمثل تكاليف عناصر الإنتاج المستخدمة في الإنتاج وهي ترتبط بحجم الوحدات المنتجة .

التكاليف المتغيرة (ت غ) = عدد الوحدات المستخدمة من العنصر المتغير × ثمنها (ث)

التكاليف الكلية (ت) = التكاليف الثابتة (ت ث) + التكاليف المتغيرة (ت غ)

ملاحظة / التكاليف في الأجل الطويل تكون كلها متغيرة

التكاليف الحدية (ت ح) = $= \frac{\Delta \text{ التكاليف الكلية}}{\Delta \text{ عدد الوحدات}}$

التكاليف المتوسطة $= \frac{\text{ت ك}}{\text{عدد الوحدات المنتجة(ك)}} = \frac{\text{ت ث}}{\text{ك}} + \frac{\text{ت غ}}{\text{ك}}$

منشأة بلغت تكاليفها الثابتة من المباني والآلات ٤٠٠٠٠ ريال والتكاليف المتغيرة للوحدة المنتجة ٥٠٠٠ ريال .

المطلوب حساب الآتي :

١- التكاليف الكلية (ت) فى حال أنتجت المنشأة :

أ) ١٠ وحدات
ب) ٢٥ وحدة

الحل /

أ) التكاليف الكلية (ت) بإنتاج ١٠ وحدات :

التكاليف الكلية (ت) = التكاليف الثابتة (ت ث) + التكاليف المتغيرة (ت غ)

التكاليف الكلية (ت) = ٤٠٠٠٠ + ٥٠٠٠ × ١٠
= ٤٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠
= ٩٠٠٠٠ ريال

ب) التكاليف الكلية (ت) بإنتاج ٢٥ وحدة :

التكاليف الكلية (ت) = التكاليف الثابتة (ت ث) + التكاليف المتغيرة (ت غ)

التكاليف الكلية (ت) = ٤٠٠٠٠ + ٥٠٠٠ × ٢٥
= ٤٠٠٠٠ + ١٢٥٠٠٠
= ١٦٥٠٠٠ ريال

مثال ٦

منشأة تكاليفها الثابتة الإجمالية من المباني والآلات ٦٠٠٠٠ ريال والتكاليف المتغيرة الإجمالية ٥٠٠٠ ريال .

المطلوب : حساب التكاليف المتوسطة الثابتة والمتغيرة والكلية في حال أنتجت المنشأة :

أ) ١٠ وحدات

ب) ٢٥ وحدة

أ) التكاليف المتوسطة عند إنتاج ١٠ وحدات :

التكاليف الثابتة المتوسطة (ت ث م) = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{عدد الوحدات}}$ = $\frac{60000}{10}$ = 6000 ريال

التكاليف المتغيرة المتوسطة (ت غ م) = $\frac{\text{التكاليف المتغيرة}}{\text{عدد الوحدات}}$ = $\frac{5000}{10}$ = 500 ريال

التكاليف المتوسطة الكلية(ت م) = التكاليف الثابتة المتوسطة + التكاليف المتغيرة المتوسطة

٦٠٠٠ + ٥٠٠ = ٦٥٠٠ ريال

ب) التكاليف المتوسطة عند إنتاج ٢٥ وحدات :

التكاليف الثابتة المتوسطة (ت ث م) = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{عدد الوحدات}}$ = $\frac{60000}{25}$ = 2400 ريال

التكاليف المتغيرة المتوسطة (ت غ م) = $\frac{\text{التكاليف المتغيرة}}{\text{عدد الوحدات}}$ = $\frac{5000}{25}$ = 200 ريال

التكاليف المتوسطة الكلية(ت م) = التكاليف الثابتة المتوسطة + التكاليف المتغيرة المتوسطة

٢٤٠٠ + ٢٠٠ = ٢٦٠٠ ريال

مثال ٧

الجدول التالي يوضح مستويات التكاليف الثابتة (ت ث) والتكاليف المتغيرة (ت غ) والتكاليف المتوسطة الكلية (ت م ؟) بآلاف الريالات

عدد الوحدات المنتجة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكاليف الثابتة (ت ث)	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠
تكاليف متغيرة (ت غ)	٥	٨	١٢	١٧	٢٦	٣٠	٣٢
تكاليف المتوسطة الكلية (ت م)	-	١٨	١١	٩	٩	٨	٧

المطلوب حساب كل من :

١- التكاليف الكلية و التكاليف الحدية عند كل مستوى من مستويات الإنتاج
٢- التكاليف المتوسطة الثابتة والتكاليف المتوسطة المتغيرة عند كل مستوى من مستويات الإنتاج.

الحل /

عمود١	عمود٢	عمود٣	عمود٤	عمود٥	عمود٦	عمود٧	عمود٨
عدد الوحدات	**ت ث**	**ت غ**	**ت**	**ت ح**	**ت م**	**ت ث م**	**ت غ م**
			ت ث + ت غ	Δ التكاليف الكلية / Δ عدد الوحدات	ت ÷ ك	ت ث ÷ ك	ت غ ÷ ك
٠	١٠	٥	١٠ + ٥ = ١٥	-	-	-	-
١	١٠	٨	١٨	٣	١٨	١٠	٨
٢	١٠	١٢	٢٢	٤	١١	٥	٦
٣	١٠	١٧	٢٧	٥	٩	٣,٣٣	٥,٦٧
٤	١٠	٢٦	٣٦	٩	٩	٢,٥	٦,٥
٥	١٠	٣٠	٥٠	١٤	٨	٢	٦
٦	١٠	٣٢	٥٢	٢٢	٧	١,٦٧	٥,٣٣

العمود الرابع (التكاليف الكلية) هو حصيلة العمود الثاني (التكاليف الثابتة) **+** العمود الثالث (التكاليف المتغيرة)

العمود الخامس (التكاليف الحدية) هو حصيلة (التكاليف الكلية عند المستوى المطلوب – التكاليف الكلية عند المستوى الذي قبله أو السابق) **–** (عدد الوحدات عند المستوى نفسه – عدد الوحدات عند المستوى الذي قبله أو السابق)

العمود السادس هو حصيلة العمود الرابع (التكاليف الكلية) (ت) **قسمة** العمود الأول (عدد الوحدات) (ك)

العمود السابع هو حصيلة التكاليف الثابتة (ت ث) **قسمة** عدد الوحدات (ك)

العمود الثامن هو حصيلة العمود الثالث (التكاليف المتغيرة) **قسمة** العمود الأول (عدد الوحدات) (ك)

الجدول التالي يوضح المستويات المختلفة من الكميات المطلوبة (ك) من الشاي ومستويات أثمان بيعها (ث) وكذلك التكاليف الكلية لإنتاج الوحدات المختلفة منها (بمئات الريالات).

الكمية المطلوبة	٠	١	٢	٣	٤	٥
الثمن	٢٠	١٨	١٦	١٤	١٢	١٠
التكاليف الإجمالية	٢٠	٢١	٢٤	٣٠	٤٠	٥٥

المطلوب

١- إيجاد قيم كل من الإيراد الحدي (ي ح) والتكلفة الحدية (ت ح) .
٢- المستوى الذي يحقق فيه أقصى ربح ممكن (ر).

الحل /

١- لإيجاد قيم الإيراد الحدي (ي ح) والذي تحدد قيمه بالعلاقة التالية :

$$(\text{ي ح}) = \frac{\Delta \text{ الايرادات الكلي}}{\Delta \text{ عدد الوحدات}}$$

لكي نستطيع حل قانون الإيراد الحدي لابد أن نستخرج قيمة الإيراد الكلي وذلك عن طريق قانونه كما تم ذكرهـ في الدرس السابق وهو

الإيراد الكلي (ي) = الكمية (ك) × الثمن (ث)

ومن نستخرج قيمة التكاليف الحدية أيضاً عبر قانونه الذي ذكرته في الدرس السابق وهو

$$\text{التكاليف الحدية (ت ح)} = \frac{\Delta \text{ التكاليف الكلية}}{\Delta \text{ عدد الوحدات}}$$

٢- الربح (ر) = الإيراد الكلي (ي) – التكاليف الكلية أو الإجمالية (ت)

الآن نستطيع حل الفقرتين في الجدول التالي عند جميع الكميات او عدد الوحدات كالتالي

العمود ١	العمود ٢	العمود٣	العمود ٤	العمود ٥	العمود ٦	العمود ٧
ك	ث	ت	ي (ك × ث)	ي ح	ت ح	ر (ي – ت)
٠	٢٠	٢٠	٠	--	--	٢٠-
١	١٨	٢١	١٨	١٨	١	٣-

٢	١٦	٢٤	٣٢	١٤	٣	٨
٣	١٤	٣٠	٤٢	١٠	٦	١٢
٤	١٢	٤٠	٤٨	٦	١٠	٨
٥	١٠	٥٥	٥٠	٢	١٥	٥-

شرح الجدول

العمود الأول وهو الكميات أو عدد الوحدات وهو معطى في السؤال (راجع الجدول)

العمود الثاني هو الثمن وهو معطى في السؤال (راجع الجدول)

العمود الثالث هي التكاليف الإجمالية (الثابتة + المتغيرة) وهو معطى في السؤال (راجع الجدول)

العمود الرابع هو الإيراد الحدي وهو حصيلة ضرب العمود الأول (الكمية) في العمود الثاني (الثمن)

العمود الخامس وهو الإيراد الحدي وهو حصيلة $\frac{\Delta \text{ الايرادات الكلي}}{\Delta \text{ عدد الوحدات}}$ وقد شرحنا كيف نستطيع الحل على مثل هذه القوانين وبشرح سريع سأحل لكم أول خانة ١٨ ــ ٠ قسمة ١ ــ ٠ = ١٨ انظر الجزء الملون

يعني الجزء الملون الإيراد الحدي الذي نريد استخراجه (١٨) هو حصيلة الإيراد الكلي له أي ١٨مطروحا من الذي قبله أي صفر قسمة عدد الوحدات للإيراد الكلي المراد استخراجه مطروحا من عدد الوحدات التي قبلها

العمود السادس وهو (الربح) وهو حصيلة العمود الرابع (الإيراد الكلي) مطروحاً منه العمود الثالث (التكاليف الإجمالية)

يلاحظ عند بيع ٣ وحدات من السلعة يتحقق اعلى ربح = ١٢٠٠ ريال وعند هذا المستوى فان الإيراد الحدي يفوق التكاليف الحدية بمقدار ٤٠٠ ريال .

فصل

العمليات الجبرية للنسب والكسور

النسب المئوية : هي عادة ما تكون في صورة كسور ويرمز لها بالرمز %

لابد التفريق في النسب المئوية في التالي

نسبة مئوية من العدد ويقصد بها $\frac{\text{النسبة}}{100} \times$ العدد

مثال ١

تفرض القواعد التنفيذية للدراسة الجامعية بأن التغيب عن المحاضرات بنسبة ٢٥% من إجمالي المحاضرات البالغ عددها ٤٠ يعني الحرمان من دخول الامتحان النهائي وحصول الطالب على درجة محروم .

المطلوب : حساب المحاضرات التي تمثل تلك النسبة .

عدد المحاضرات = $\frac{25}{100} \times$ ٤٠ = ١٠ محاضرات

تغير العدد بمقدار س % وتعني $\frac{\text{س}}{100} \times$ العدد

مثال ٢

نال الموظف (س) علاوة تشجيعية قدرها ١٠% على راتبه البالغ ٥٠٠٠ ريال

والمطلوب : حساب مقدار الزيادة في الراتب .

الحل :

مقدار الزيادة في الراتب = $\frac{10}{100} \times$ ٥٠٠٠ = ٥٠٠ ريال

التغير في العدد : العدد + مقدار التغير

نال الموظف (س) علاوة تشجيعية قدرها ٢٠% على راتبه البالغ ٥٠٠٠ ريال

المطلوب : حساب راتب الموظف الإجمالي بعد الزيادة

نحسب أولاً الزيادة $\frac{20}{100} \times$ ٥٠٠٠ = ١٠٠٠ ريال

إذا الراتب بعد الزيادة = الراتب قبل الزيادة + الزيادة

= ٥٠٠٠ + ١٠٠٠ = ٦٠٠٠ ريال

قوانين الكسور

جمع وطرح الكسور

$$\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{د} = \frac{أ\,د + ج\,ب}{ب\,د}$$

$$\frac{أ}{ب} - \frac{ج}{د} = \frac{أ\,د - ج\,ب}{ب\,د}$$

فيما يلي بعض العمليات الكسرية

١- $\frac{3\,س}{2+3\,س} + \frac{س}{1+س}$

في جمع الكسور نطبق حركة المقص
نلاحظ هنا في هذه الخطوة سنضرب وسطين في طرفين أي حركة المقص س نضربها في 3 + 2 س ونضرب ٣ س في س + ١

$$\frac{(2+3\,س)\,س + (1+س)\,3\,س}{(1+س)(2+3\,س)}$$

$$\frac{(3س+2\,س^2) + (3\,س^2+3\,س)}{(1+س)(2+3\,س)}$$

$$\frac{(5\,س^2+6\,س)}{(1+س)(2+3\,س)}$$

نأتي الآن لنبسطها أكثر كالتالي نذهب للبسط

نأخذ الشق الأول 3س + 2 س^2 والشق الثاني + 3 س

3 س^2 نجمع السينات مع بعض والسينات بتربيع مع بعض

وتكون 5 س^2 + 6 س

كيف أتت هذه الخطوة ؟

في الخطوة السابقة الأولى أعلاه

ـ تم ضرب وسطين في طرفين (حركة المقص) أليس كذلك في هذه الخطوة نفك الأقواس كالتالي

(3 + 2 س) س = س × 3 = **3 س** و س × 2 س = **2** س^2

نأتي للشق الثاني نفك القوس كالتالي (س + 1) 3 س

نضرب 3 س(برى القوس) في س (داخل القوس) = **3** س^2

نضرب 3 س (برى القوس) في 1 (داخل القوس) = 3 س

ضرب الكسور

في ضرب الكسور نضرب المقام في المقام والبسط في البسط

$$\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \times \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$$

$$\frac{\text{البسط} \times \text{البسط}}{\text{المقام} \times \text{المقام}}$$

$$\frac{\text{الناتج النهائي}}{\text{الناتج النهائي}}$$

$$= \frac{6}{4} \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{6 \times 5}{4 \times 3}$$

$$\frac{30}{12}$$

أما في الضرب في المجاهيل والمعاليم يحتاج إلى فن سهل جدا

تضرب كل حد في القوس الأول بكل حد في القوس الثاني مثال

$$(\text{س}-١)\ (٢\text{س}-٢)$$

لاحظ الأسهم التي بالأسفل ضربنا الحد الأول في كل حدود القوس الثاني

س × ٢س = ٢ س^2

س × -٢ = - ٢ س

الآن نأخذ الحد الثاني ونضربها في جميع حدود القوس الثاني (لاحظ الأسهم أعلى القوسين)

-١ × ٢س = -٢س

-١ × -٢ = + ٢

الآن نأخذ النواتج ونجعلها كمعادلة جانب بعض مع نقل إشاراتها

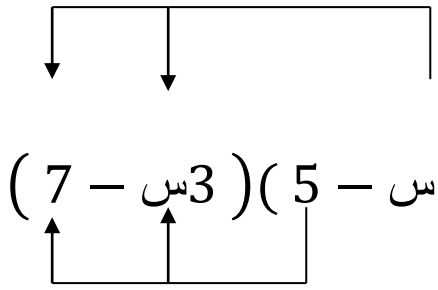
٢ س^2 - ٢ س – ٢ س +٢

٢ س^2 - ٤ س +٢

مثال ٥

$$\frac{3س-7}{س-5} \times \frac{2س-5}{س+1}$$

$$= \frac{(2س-5)(3س-7)}{(س-5)(س+1)} = \frac{6س^2-29س+35}{س^2-4س-5}$$



في السهم أعلاه ضربنا

٢س × ٣س = + ٦ س^2

٢س × -٧ = -١٤ س

في السهم أدنى القوسين ضربنا

-٥ × ٣س = -١٥ س

-٥ × -٧ = +٣٥

الآن نرتب النواتج على شكل معادلة مع نقل إشارتها

+س^2 ٦- ١٤ س -١٥ س + ٣٥

+س^2 ٦- ٢٩ س + ٣٥

قسمة الكسور

نفس الضرب فقط عليك أن تتبع الخطوات التالية

إذا أتى السؤال عن كسور بهذا الشكل

١- تقلب الكسر الثاني
٢- تحول إشارة القسمة إلى ضرب
٣- تحل بنفس الطريقة السابقة

$$\frac{3س+2}{س-5} \div \frac{س+1}{2س}$$

لاحظ هنا قلبنا الكسر الثاني جعلنا البسط مقام و المقام بسط ومن ثم نغير إشارة القسمة ونحطها ضرب ونحل مثل ماحلينا في المثال اللي قبله ☺

$$\frac{س-5}{3س+2} \times \frac{س+1}{2س}$$

الميل / يقيس التغيرات التي تحدث في المتغير التابع (ص) والذي عادة ما يرمز له بالرمز (ص) نتيجة للتغيرات في احد المتغيرات المستقلة (س)

الدخل

إذا كان عندي راتب نهاية كل شهر هذا يسمى دخل أليس كذلك ☺

حسناً عادة ماذا نفعل بهذا الدخل؟

الدخل = الاستهلاك + الادخار

سنلقي الضوء الآن على نقطتين هامتين :

١- الميل المتوسط للاستهلاك والادخار .
٢- الميل الحـــدي للاستهلاك والادخار .

أولاً الميل المتوسط (للاستهلاك والادخار)

الميل المتوسط للاستهلاك : يقيس نسبة ما ينفق من الدخل على الاستهلاك

$$\text{الميل المتوسط للاستهلاك (م . م . س)} = \frac{\text{س}}{\text{ل}}$$

الميل المتوسط للادخار : يقيس ما ينفق من الدخل على الادخـــــــــــار

$$\text{الميل المتوسط للادخار (م . م . د)} = \frac{\text{د}}{\text{ل}}$$

ثانياً الميل المتوسط (للاستهلاك والادخار)

الميل المتوسط للاستهلاك : يقيس التغير اللحظي في الاستهلاك نتيجة حدوث تغير طفيف جداً في الدخل

الميل الحدي للاستهلاك (م .ح . س) = $\frac{\Delta س}{\Delta ل}$

الميل المتوسط للادخار : يمثل التغير اللحظي في الادخار نتيجة حدوث تغير طفيف جداً في الدخل

الميل الحدي للادخار (م . ح . د) = $\frac{\Delta د}{\Delta ل}$

ملاحظة هامة : أي زيادة في الميل الحدي للاستهلاك يترتب عليها نقص في الميل الحدي للادخار حيث

الميل الحدي للاستهلاك (م . ح . س) + الميل الحدي للادخار (م . ح . د) = ١

مثال٦

الجدول التالي يمثل قيم كل من الدخل والاستهلاك القومي لدولة مقدراً ببلايين الريالات :

السنة	الدخل	الاستهلاك
١٤٢٥	١٠٠٠ < الدخل للسنة السابقة	٨٠٠ < الاستهلاك للسنة السابقة
١٤٢٦	٢٠٠٠ < الدخل للسنة التالية	١٥٠٠ < الدخل للسنة التالية

نغير الإشارة حسب قانون المعادلات

المطلوب : إيجاد كل من الميل المتوسط والحدي لكل من الاستهلاك والادخار خلال السنوات السابقة

الحل /

الدخل = الاستهلاك + الادخار

الادخار = الدخل – الاستهلاك

الادخار = ١٠٠٠ - ٨٠٠

- **قيمة الادخار خلال عام ١٤٢٥هـ = ١٠٠٠ – ٨٠٠ = ٢٠٠**
- **الميل المتوسط للاستهلاك لعام ١٤٢٥هـ = $\frac{س}{ل}$ = $\frac{800}{1000}$ = ٠,٨**
- **الميل المتوسط للادخار لعام ١٤٢٥هـ = $\frac{د}{ل}$ = $\frac{200}{1000}$ = ٠,٢**
- **م م س + م . م . د = ٠,٨ + ٠,٢ = ١**

الميل التوسط للاستهلاك = الاستهلاك ÷ الدخل أي ٨٠٠ ÷ ١٠٠٠ = ٠,٠٨

الميل المتوسط للادخار = الادخار ÷الدخل أي ٢٠٠ ÷ ١٠٠٠ = ٠,٢

- **قيمة الادخار خلال عام ١٤٢٦هـ = ٢٠٠٠ – ١٥٠٠ = ٥٠٠**
- **الميل المتوسط للاستهلاك لعام ١٤٢٦هـ = $\frac{س}{ل}$ = $\frac{1500}{2000}$ = ٠,٧٥**

- **الميل المتوسط للادخار لعام ١٤٢٦هـ = $\frac{\text{د}}{\text{ل}}$ = $\frac{500}{2000}$ = ٠,٢٥**
- **م م س + م . م . د = ٠,٧٥ + ٠,٢٥ = ١**

الميل الحدي للاستهلاك (م . ح . س) = $\frac{\Delta \text{س}}{\Delta \text{ل}}$ = $\frac{800-1500}{1000-2000}$ = ٠,٧

الاستهلاك للسنة التاليةد – الاستهلاك للسنة السابقة
الدخل للسنة التالية – الدخل للسنة السابقة

الميل الحدي للادخار (م . ح . د) = $\frac{\Delta \text{د}}{\Delta \text{ل}}$ = $\frac{200-500}{1000-2000}$ = ٠,٣

الادخار للسنة التاليةد – الادخار للسنة السابقة
الدخل للسنة التالية – الدخل للسنة السابقة

- **م . ح . س + م . ح . د = ١**

٠,٧ + ٠,٣ = ١

مثال ٧

اذا كان الميل الحدي للاستهلاك = ٠,٧٧ والمطلوب :

١- حساب الميل الحدي للادخار .
٢- حساب حجم الادخار بفرض أن الدخل القومي لدولة ما = ١٠٠٠ (مقدراً بملايين الريالات)
والاستهلاك = ٤/٣ الدخل القومي .

+ م . ح . س + م . ح . د = ١

لأننا نريد الميل الحدي للادخار م . ح . د ننقل الميل الحدي للاستهلاك م . ح . س بعد يساوي مع تغيير الإشارة ويكون

+ م . ح . د = ١ – م . ح . س

م . ح . د = ١ – م . ح . س

= ١- ٠,٧٧

= ٠,٢٣

الادخار = الدخل – الاستهلاك

= ١٠٠٠ – ($\frac{3}{4}$ × ١٠٠٠)

= ١٠٠٠ – ٧٥٠ = ٢٥٠ بليون ريال

$\frac{3}{4}$ × ١٠٠٠

لأنه في السؤال لم يعطنا قيمة الاستهلاك مباشرة وقال الاستهلاك يساوي **٤/٣ الدخل القومي**

إذن نضرب **٤/٣** في قيمة الدخل (١٠٠٠)
والناتج هو قيمة الاستهلاك

مثال ٨

إذا علمت أنه :

في عام ١٤٢٦هـ كان الدخل القومي = ٢٠٠٠ مليون ريال والادخار = ٢٠٠ مليون ريال

وفي عام ١٤٢٨هـ أصبح الدخل القومي = ٣٠٠٠ مليون ريال والادخار = ٣٠٠ مليون ريال

المطلوب / حساب الميل الحدي للاستهلاك

الحل /

من قانون الدخل

الدخل = الاستهلاك + الادخار

إذن نريد الاستهلاك نحطه بدل الدخل ونغير الإشارة

الاستهلاك = الدخل – الادخار

- **استهلاك ١٤٢٦ = ٢٠٠٠ – ٢٠٠ = ١٨٠٠ مليون ريال**
- **استهلاك ١٤٢٨ = ٣٠٠٠ – ٣٠٠ = ٢٧٠٠ مليون ريال**

- **م . ح . س = $\frac{\Delta س}{\Delta ل} = \frac{1800-2700}{2000-3000} = \frac{900}{1000} =$ ٠,٩**

الاستهلاك للسنة التالية – الاستهلاك للسنة السابقة

الدخل للسنة التالية – الدخل للسنة السابقة

مثال ٩

اذا كانت البيانات التالية (بملايين الريالات) :

الدخل	الاستهلاك	الادخار
صفر	٨٠	٨٠-
١٠٠	١٦٠	٦٠-
٢٠٠	٢٤٠	٤٠-
٣٠٠	٣٢٠	٢٠-
٤٠٠	٤٠٠	صفر
٥٠٠	٤٨٠	٢٠
٦٠٠	٥٦٠	٤٠
٧٠٠	٦٤٠	٦٠
٨٠٠	٧٢٠	٨٠

المطلوب حساب كل من :

١- الميل الحدي للاستهلاك والادخار .

٢- حجم الاستهلاك والادخار إذا كان الدخل الممكن التصرف فيه ٩٠٠ مليون ريال

الحل :

سبق شرحه أعلاه

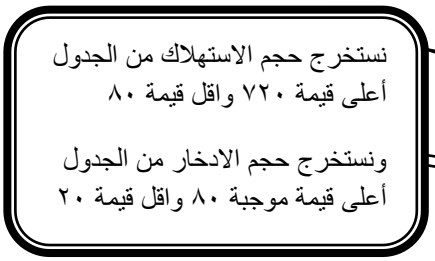
الميل الحدي للاستهلاك (م .ح . س) = $\frac{\Delta س}{\Delta ل} = \frac{80-160}{0-100} =$ ٠,٨٠

الميل الحدي للادخار (م .ح . س) = $\frac{\Delta د}{\Delta ل} = \frac{(80-)-60-}{0-100} =$ ٠,٢٠

أو

م . ح . د = ١ – ٠,٨٠ = ٠,٢٠

٣- اذا كان الدخل = ٩٠٠ مليون ريال



حيث حجم الاستهلاك = ٧٢٠ + ٨٠ = ٨٠٠ مليون ريال

حجم الادخار = ٨٠ + ٢٠ = ١٠٠ مليون ريال

أو حجم الادخار = ٩٠٠ – ٨٠٠ = ١٠٠ مليون ريال

تمارين

تمرين ١ :

الجدول التالي يوضح عدد الوحدات المشتراه والمنفعة الحدية والثمن بالريال لأحد المستهلكين

عدد الوحدات المشتراه	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
المنفعة الحدية	٢١	٢٠	١٩	١٨	١٩	١٦	١٥	١٤
الثمن (بالريال)	١٦	١٦	١٦	١٦	١٦	١٦	١٦	١٦

المطلوب تحديد:

١ - وضع توازن المستهلك بافتراض تقويم وحدات المنفعة بالنقود (الريال)

٢ - الوضع الذي يحقق فيه المستهلك فائضاً أو خسارة

٣-مدى التأثير الذي يحدث على المستهلك في حال ما قامت الحكومة بفرض ضريبة على المنتج قدرها ٤ ريالات على الوحدة .

تمرين ٢ :

الجدول التالي يوضح مستويات التكاليف الثابتة (ت ث) والتكاليف المتغيرة (ت غ) وعدد الوحدات المنتجة .

عدد الوحدات المنتجة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكاليف الثابتة (ت ث)	١٢	١٢	١٢	١٢	١٢	١٢	١٢
تكاليف متغيرة (ت غ)	٧	١٠	١٤	١٩	٢٨	٣٢	٣٤

المطلوب حساب كل من :

١ – التكاليف الكلية و التكاليف الحدية عند كل مستوى من مستويات الإنتاج

٢ - التكاليف المتوسطة الثابتة والتكاليف المتوسطة المتغيرة عند كل مستوى من مستويات الإنتاج.

٣ – التكاليف المتوسطة الكلية عند كل مستوى من مستويات الانتاج .

تمرين ٣ :

الجدول التالي يوضح المستويات المختلفة من الكميات المباعة (ك) من المنتج (أ) ومستويات أثمان بيعها (ث) وكذلك التكاليف الكلية لإنتاج الوحدات المختلفة منها (بمئات الريالات).

الكمية المباعة	٠	١	٢	٣	٤	٥
الثمن	٢٠	١٩	١٧	١٥	١٣	١١
التكاليف الإجمالية	٢٠	٢٢	٢٥	٣١	٤١	٥٦

المطلوب

١- إيجاد قيم كل من الإيراد الحدي (ي ح) والتكلفة الحدية (ت ح) .

٢- المستوى الذي يحقق فيه أقصى ربح ممكن (ر).