الفصل الثاني: المنطق الرياضي
Ch 2: Mathematical Logic

المنطق ← علم دراسة طرق الاستنباط الصحيح عن الاستنباط الخاطئ
← جميع البرهنات في الأنظمة العددية تبرهن باستخدام قواعد المنطق
← جميع الخوارزميات في علم الحاسوب تعتمد على قواعد المنطق

2.1 حساب التقارير (القضايا)
Sentential (Propositional) calculus

← من أبسط الأنظمة المنطقية حساب التقارير
← كل جملة تحمل أخباراً ربما الكثير عليل بالصواب والخطأ تسمى تقريراً
← التقرير البسيط يحمل خبراً واحداً
← التقرير المركب يحمل أكثر من خبر.
← التقرير الصواب فيه صوابه T أو 1
← التقرير الخطأ فيه صوابه F أو 0

EX: عين التقارير من بين الجمل الآتية وصدق كل منها

① العدد 48 عدد صحيح موجب ← تقرير صائب
② العدد 48 يقسم العدد 56 ← تقرير خاطئ
③ كم الساعة الآن ؟
④ الرياض عاصمة السعودية
⑤ ما أجمل اليوم !
⑥ العدد 1101 عدد ثنائي
⑦ العدد 685 عدد ثنائي
⑧ $x + 1 < 5$
⑨ اليوم حار الجمعة

جملة مفتوحة
تقرير صائب، وتقرير خاطئ في نفس اليوم وفي أيام أخرى

2.1.1 أدوات الربط
Connectives

①	∧ ← و	←	$A \wedge B$	$B \nearrow A$
②	∨ ← أو	←	$A \vee B$	B أو A
③	¬ ← ليس صحيحاً	←	$\neg A$	نفي A
④	→ ← إذا فإن		$A \rightarrow B$	A يقود إلى B
⑤	↔ ← إذا وإذا فقط		$A \leftrightarrow B$	A يقود إلى B و B يقود إلى A

جدول الصواب للعبارات التقريرية

① جدول الصواب للعبارة التقريرية $\neg p$

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	$\neg p$
1	0
0	1

② جدول الصواب للعبارة التقريرية $p \wedge q$ ؟ $p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

Ex1: $A \vee B$

① السماء ممطرة أو الطقس بارد

$A \vee \neg B$

② إما السماء ممطرة أو الطقس حار

$\neg A \wedge \neg B$

③ ليست السماء ممطرة ولا الطقس بارد

④ السماء ممطرة أو الطقس بارد ولكنه ليس كلاهما

$(A \vee B) \wedge (\neg (A \wedge B))$

⑤ السماء ليست ممطرة إذا كان الطقس حاراً

$B \rightarrow \neg A$

Ex2: أوجد جدول الصواب للعبارة التقريرية التالية:

$P = (p \wedge \neg r) \rightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$p \rightarrow q$	P
T	T	T	F			T
T	T	F	T			T
T	F	T	F			F
T	F	F	T			F
F	T	T	F			T
F	T	F	T			T
F	F	T	F			T
F	F	F	T			T

(1.3.5) التكافؤ المنطقي Logical equivalence

يقال للتقريرين أن متكافئان منطقيا إذا كانا لهما نفس جدول الصواب ونكتب $A \equiv B$

يسمى التقرير $B \to A$ عكس $A \to B$

يسمى التقرير $\neg A \to \neg B$ معاكس $A \to B$

يسمى التقرير $\neg B \to \neg A$ المكافئ العكسي للتقرير $A \to B$

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

بكافئ $A \to B \equiv \neg A \vee B$

لا يكافئ $A \to B \not\equiv B \to A$

$A \to B \not\equiv \neg A \to \neg B$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

$B \leftrightarrow A \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

EX1: اثبت أن $\neg P \wedge (\neg q) \equiv \neg (P \vee q)$

p	q	¬p	¬q	p∨q	¬(p∨q)	¬p ∧ ¬q
T	T					F
T	F					F
F	T					F
F	F					T

(1.3.6) المصدوقات والتناقضات Tautologies and contradictions

نقول أن التقرير A تقرير مصدوقي إذا كانت عبارته مصدوقة

نقول أن التقرير A تقرير تناقضي إذا كانت عبارته تناقضا

Ex1: اثبت أن العبارة التقريرية $P \vee \neg P$ مصدوقة

اثبت أن التقرير $A \wedge \neg A$ تناقضي

p	¬p	p ∨ ¬p
T	F	T
F	T	T

p	¬p	A ∧ ¬p
T	F	F
F	T	F

Ex_2 :

اثبت أن التعبير $(A \wedge \neg A) \longrightarrow B$ تعبير مصدوق

نكون جدول الصواب

x	y	$\neg x$	$x \wedge \neg x$	$(x \wedge \neg x) \longrightarrow y$
T	T	F		T
T	F			T
F	T			T
F	F			T

E_3 :

اثبت أن العبارة التعبيرية

تناقضية $p = \neg[(\neg(p \vee q)] \longleftrightarrow p \wedge \neg q]$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q)$	
T	T							F
T	F							F
F	T							F
F	F							F

الإقتضاء

يقال أن القضية A تقتضي B إذا كانت $A \rightarrow B$
القضية A مصدوقة وسنرمز لذلك بالرمز $A \models B$

Ex1: اثبت أن $A \models A \vee B$

الحل: نعتبر $A \rightarrow A \vee B$
نكون جدول الصواب للعبارة $X \rightarrow X \vee Y$

X	Y	$X \vee Y$	$X \rightarrow X \vee Y$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

$A \models A \vee B$ إذن $\leftarrow$ { $A \rightarrow (A \vee B)$ قضية مصدوقة
$X \rightarrow (X \vee Y)$ مصدوقة

مبرهنة: يقال أن $P \equiv Q$ إذا وفقط إذا $P \leftrightarrow Q$ مصدوقة

مبرهنة: مبدأ التعويض للمصدوقات
إذا كانت $P(X_1, \dots X_n)$ مصدوقة وكانت $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ العبارات القضوية فإن $P(Q_1, \dots Q_n)$ مصدوقة

مبرهنة: مبدأ التعويض لتكافؤ المنطقي
إذا كانت $P(X_1, \dots X_n)$ ، $Q(X_1, \dots X_n)$ عبارتين قضويتين وكانت $R_1, \dots R_m$ عبارات قضوية فإذا كانت $P(X_1, \dots X_n) \equiv Q(X_1, \dots X_n)$ فإن $P(R_1, \dots R_n) \equiv Q(R_1, \dots R_n)$

مبرهنة: إذا كانت P, Q, R متغيرات قضوية و t_1 قضية مصدوقة فإن
$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

و Φ تناقضة فإن
- قانوني الإبدال
- قانوني التجميع

مبرهنة 4.1

إذا كانت p, q, r متغيرات قضوية
و t صوتة و c تناقضة فإن:

① قانون الإبدال:

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p$$

② قانون التجميع:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

③ قانون التوزيع

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

④ قوانين t, c

$$p \vee t \equiv t \quad , \quad p \wedge t \equiv p \quad , \quad p \vee c \equiv p \quad p \wedge c \equiv c$$

⑤ قوانين النفي:

$$\neg c \equiv t \quad , \quad \neg t \equiv c \quad , \quad \neg(\neg p) \equiv p \quad , \quad p \vee \neg p \equiv t$$
$$p \wedge \neg p \equiv c$$

⑥ قانون الجمود

$$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p$$

⑦ قانون دي مورغان

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

⑧ قانون الامتصاص

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Arguments البرهان أو الحجج

لـ نقول أن العبارات $A_1, A_2, \dots, A_n$ تقتضي منطقياً العبارة B إذا كان
$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \models B$
العبارات $A_1, \dots, A_n$ تقتضي B

صورة (برهان)

لتكن $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ عبارات تقريرية و $X_1, \dots, X_n$
عندئذ تكون الجملة الآتية متكافئة:

① $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \models Q$

② إذا كانت $A_1, \dots, A_n$ تقارير حيث:
$P_1(A_1, \dots, A_n)$ تقرير صائب، $P_2(A_1, \dots, A_n)$ تقرير صائب
...
$Q(A_1, \dots, A_n)$ تقرير صائب

Ex_1: اثبت أن العبارة التقريرية
$[(p \to (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \to \neg p$ مصدوقة

Ex_2: اثبت أن العبارات التقريرية
$p \to q$ ، $r \to \neg p$ ، $r \to q$
لا تقتضي منطقياً q