أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول: [16 درجة]

(أ) ادرس كل عبارة فيما يلي من حيث كونها صائبة أو خاطئة، مع التبرير:

(1) $\forall\, x \in A : \{x\} \subseteq P(A)$

(2) لأي مجموعتين A و B فإن: $A \times B = B \times A$

(3) إن صنف التكافؤ الذي ينتمي إليه العدد -22 في $\mathbb{Z}_9$ هو $\overline{8}$

(ب) أكمل الفراغات الآتية:

(1) إذا كانت $S_1, S_2, \cdots, S_n$ مجموعات غير خالية فإن:

$$(i) \bigcap_{k=1}^{n} S_k = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n = \{\cdots | \cdots\cdots\cdots\}$$

$$(ii) \prod_{k=1}^{n} S_k = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{\cdots | \cdots\cdots\cdots\}$$

(iii) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \cdots\cdots$, (iv) $\mathbb{R}^n = \{\cdots | \cdots\cdots\cdots\}$

(2) لتكن X مجموعة غير خالية و $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعات جزئية من X. نقول إن المجموعة $P = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ تجزئة للمجموعة X إذا حققت الشروط الآتية:

.....(1)
.....(2)
.....(3)

السؤال الثاني: [14 درجة]

(أ) إذا عرفنا علاقة R على $\mathbb{Z}^+$ كما يلي:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}^+ : \; xRy \Leftrightarrow x|y \qquad (y \text{ يقسم } x)$$

فادرس R من حيث كونها:

(1) انعكاسية (2) تناظرية (3) متعدية (4) تخالفية (5) علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}^+$

(6) علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}^+$ (7) علاقة ترتيب كلي على $\mathbb{Z}^+$

(ب) أثبت أن مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي.

(ج) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي صحة التقرير الآتي:

$$P(n) \equiv 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1) \; : \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$$