جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	الاختبار الثاني مقرر ١٣١ ريض المدة: ٩٠ دقيقة	الفصل الدراسي الأول الأربعاء ٢٤-٤-١٤٤٥هـ يمنع استخدام الآلة الحاسبة

: ________ :

السؤال الأول: أجب عن ما يأتي (٩ درجات):

١- لتكن $A=\{1,2\}$، ولتكن R هي علاقة الاحتواء $\subseteq$ على $p(A)$. بين أن R علاقة ترتيب جزئي على $p(A)$، ثم بين أنها ليست علاقة ترتيب كلي.
٢- لتكن $A=\{1,2\}$، ولتكن R هي العلاقة $A \times A$. بين أن R علاقة تكافؤ على A ثم أوجد $\bar{1}$.
٣- متى نقول عن تطبيقين أنهما متساويان؟

السؤال الثاني: (٤ درجات):

١- هات مثالا على تجزئة للمجموعة $A=\{1,2\}$ مع التوضيح لماذا هي تجزئة.
٢- هات مثالا على تطبيق $f:D\rightarrow B$ بحيث يكون f تقابلا، مع التوضيح لماذا هو تطبيق أصلا، ثم لماذا هو تقابل.

السؤال الثالث: أثبت ما يلي (١٢ درجة):

(أ) إذا كان لدينا ثلاث مجموعات A وB وC فإن:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

(ب) إذا كان $a, b \in A$ و R علاقة تكافؤ على A فإن:

$$aRb \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

(ج) إذا كان لدينا تطبيق $f: C \rightarrow D$ وكانت المجموعتان A وB محتواتين في C فإن:

$$A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

(د) إن تركيب تطبيقين متباينين هو تطبيق متباين.

الحل

السؤال الأول:

١- $\forall C \in p(A): C \subseteq C$ فالعلاقة انعكاسية.

$$(C,B) \wedge (B,C) \in R \Longrightarrow C \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow B = C$$

فالعلاقة تخالفية.

$$(C,B) \wedge (B,D) \in R \Longrightarrow C \subseteq B \wedge B \subseteq D \Longrightarrow C \subseteq D$$

فالعلاقة متعدية.

وبما أن R انعكاسية وتخالفية ومتعدية فهي علاقة ترتيب جزئي على $p(A)$، ولكنها ليست علاقة ترتيب كلي بسبب أنه توجد عناصر في $p(A)$ غير مرتبطة ببعضها بواسطة العلاقة R، فمثلا $\{1\},\{2\} \in p(A)$ ومع ذلك $\{1\} \nsubseteq \{2\} \wedge \{2\} \nsubseteq \{1\}$.

٢- $(1,1),(2,2) \in A \times A$ فالعلاقة انعكاسية.

$(1,1),(2,2),(1,2),(2,1) \in A \times A$ فالعلاقة تناظرية (أو $R = A \times A = R^{-1}$).

$$(1,1) \wedge (1,2) \in R \Longrightarrow (1,2) \in R$$
$$(1,2) \wedge (2,2) \in R \Longrightarrow (1,2) \in R$$
$$(1,2) \wedge (2,1) \in R \Longrightarrow (1,1) \in R$$
$$(2,1) \wedge (1,2) \in R \Longrightarrow (1,1) \in R$$
$$(2,1) \wedge (1,1) \in R \Longrightarrow (2,1) \in R$$
$$(2,2) \wedge (2,1) \in R \Longrightarrow (2,1) \in R$$

فالعلاقة متعدية.

وبما أن R انعكاسية وتناظرية ومتعدية فهي علاقة تكافؤ على A. نلاحظ أن:

$\bar{1} = \{x \in A \ni xR1\} = \{1,2\} = A$.

٣- نحتاج ثلاثة شروط: أن يكون لهما المنطلق (النطاق – المجال – مجموعة التعريف) نفسه وأن يكون لهما المستقر (المجال المقابل – النطاق المصاحب) نفسه وأن تكون قيمهما (صورهما أو خيالهما) عند كل عنصر في المجال متساوية.

السؤال الثاني:

١- $B = \{1\}, C = \{2\}$ تشكل تجزئة للمجموعة A لأن كلا من B وC غير خالٍ وتقاطعهما خالٍ واتحادهما هو A.

٢- بافتراض أن $B = \{1\}, D = \{2\}$ فإن العلاقة f المعرفة من D إلى B بالشكل التالي $f(2)=1$ تشكل تطبيقا لأن كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط وهو تقابل لأن كل

عنصر في المجال المقابل صورة لعنصر واحد فقط في المجال (أو لأن f^{-1} ستكون تطبيقا في هذه الحالة).

السؤال الثالث: (أ)

$A \times (B \cup C) = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in (B \cup C)\}$ تعريف ضرب مجموعتين

$= \{(x, y) | x \in A \wedge [(y \in B) \vee (y \in C)\}$ تعريف اتحاد مجموعتين

$= \{(x, y) | [(x \in A) \wedge (y \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (y \in C)]\}$ $\wedge$ يتوزع على $\vee$

$= \{(x, y) | [(x, y) \in A \times B] \vee [(x, y) \in A \times C]\}$ تعريف ضرب مجموعتين

$= (A \times B) \cup (A \times C)$ تعريف اتحاد مجموعتين

(ب) سنبرهن أن $aRb \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$. لنفرض أن $x \in \bar{a}$. إذن:

$x \in \bar{a} \Longrightarrow xRa$ تعريف $\bar{a}$

$\Longrightarrow xRb$ لأن علاقة التكافؤ علاقة متعدية و$xRa \wedge aRb$

$\Longrightarrow x \in \bar{b}$ تعريف $\bar{b}$

$\Longrightarrow \bar{a} \subseteq \bar{b}$ تعريف الاحتواء

وبالمثل يمكن إثبات أن $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ باستخدام أن R علاقة تكافؤ. إذن من تعريف تساوي المجموعات نجد أن $\bar{a} = \bar{b}$.

الآن سنبرهن أن $\bar{a} = \bar{b} \Longleftarrow aRb$. لما كانت R انعكاسية فإن $a \in \bar{a}$ ومنه $a \in \bar{b}$ لأن $\bar{a} = \bar{b}$. إذن من تعريف $\bar{b}$ نجد أن aRb.

(ج)

$$f(A) = \{f(x) \in D | x \in A\} \subseteq \{f(x) \in D | x \in B\} = f(B)$$

لأن $A \subseteq B$.

(د) ليكن كل من $f:A \to B$ و$g:B \to C$ تطبيقا متباينا، وليكن $x, y \in A$. بفرض أن:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$$

سيكون لدينا ما يلي:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$$

$$\Longrightarrow g\big(f(x)\big) = g(f(y))$$ تعريف تركيب التطبيقات

$$\Longrightarrow f(x) = f(y)$$ لأن g تطبيق متباين

$$\Longrightarrow x = y$$ لأن f تطبيق متباين

وهذا هو تعريف التباين. إذن تركيب تطبيقين متباينين هو تطبيق متباين.